VI. KAPITOLA

TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

Často lidé v běžném životě mluví o padesátiprocentní, osmdesátiprocentní nebo devadesátiprocentní pravděpodobnosti a ani si přitom neuvědomují, že teorie pravděpodobnosti je jednou z matematických disciplín a že její význam v moderním světě stále stoupá.

Základním pojmem této teorie je pravděpodobnost. Je to zobrazení množiny určitých jevů do množiny všech reálných čísel větších nebo rovných nule a menších nebo rovných jedné. Číslo takto přiřazené nějakému jevu se nazývá pravděpodobností tohoto jevu. Jev, který nastane zcela jistě, má pravděpodobnost rovnou jedné, jev nemožný má pravděpodobnost rovnou nule. Jestliže A a B jsou dva jevy, které nemohou nastat současně, pak pravděpodobnost jevu spočívajícího v tom, že nastane buď jev A, nebo jev B, je rovna součtu pravděpodobností jevu A a jevu B.

Házíme-li hrací kostkou, pak zřejmě pravděpobnost toho, že padne některé číslo, je stejná jako pravděpodobnost padnutí kteréhokoliv jiného čísla. Protože všech možných čísel je šest, je pravděpodobnost padnutí kteréhokoliv čísla rovna jedné šestině (součet všech těchto pravděpodobností musí být 1).

Pravděpodobnost, že padne sudé číslo, je rovna jedné polovině. Nastane to totiž ve třech případech (říkáme jim příznivé případy); jsou to případy, kdy padne 2, 4 nebo 6. Počet těchto případů dělíme šesti, což je počet všech možných případů, a dostaneme jednu polovinu. Podobně pravděpodobnost, že padne číslo dělitelné třemi, je rovna jedné třetině.

Házejme nyní dvěma kostkami současně. Jaká je pravděpodobnost, že na první kostce padne sudé číslo a na druhé číslo dělitelné třemi? Jde o současný výskyt dvou nezávislých jevů (výsledek na jedné kostce nikterak neovlivňuje výsledek na druhé). První jev má pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, druhý $\frac{1}{3}$, pravděpodobnost současného výskytu obou jevů je rovna součinu těchto pravděpodobností, tedy $\frac{1}{6}$. Skutečně, příznivých případů je šest, jsou to dvojice [2, 3], [4, 3], [6, 3], [2, 6], [4, 6], [6, 6], a počet všech možných případů je počet všech možných uspořádaných dvojic z čísel od jedné do šesti, tedy 36. Dělením dostaneme $\frac{1}{6}$.

Nyní házejme opět jednou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padne buď sudé číslo, nebo trojka? Jevy „padne sudé číslo" a „padne trojka" nemohou při jednom hodu jednou kostkou nastat současně; jsou to takzvané jevy disjunktní. Pravděpodobnost toho, že nastane jeden z těchto jevů, je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů, tedy $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$. Skutečně jsou čtyři příznivé případy ze šesti možných, a to 2, 3, 4, 6.

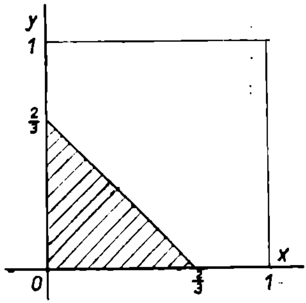
Nyní si představme trochu složitější případ. Máme tři osudí: ve dvou z nich je po třech bílých a dvou černých koulích, v jednom je jedna bílá a čtyři černé koule. Osudí nejsou nijak označena, takže předem nevíme, kolik jakých koulí v kterém osudí je. Nyní náhodně vy bereme jedno osudí a vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že tato koule bude bílá?

Pravděpodobnost toho, že zvolíme osudí s třemi bílými koulemi a z něho potom vytáhneme bílou kouli, je rovna součinu příslušných pravděpodobností, to jest $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Pravděpodobnost, že zvolíme osudí s jednou bílou koulí a vytáhneme z něho bílou kouli, je $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$. Oba jevy jsou disjunktní — taháme jen z jednoho osudí. Celková pravděpodobnost vytažení bílé koule je tedy $\frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$.

Jak však budeme zjišťovat pravděpodobnost tehdy, když je jak příznivých případů, tak všech možných případů nekonečný počet? Představme si, že ze dvou lidí každý nezávisle na druhém zvolí nezáporné reálné číslo nepřevyšující číslo 1. Jaká je pravděpodobnost, že součet obou čísel nepřevýší $\frac{2}{3}$?

Zde užíváme takzvané geometrické pravděpodobnosti. Zvolenou dvojici čísel můžeme považovat za souřadnice některého bodu čtverce, jehož vrcholy jsou body [0, 0], [0, 1], [1, 0], [1, 1]. Dvojicím čísel, jejichž součet je menší než $\frac{2}{3}$, odpovídají body pod přímkou $y = \frac{2}{3} - x$; tyto body tvoří trojúhelník, který vidíme na obr. VI.1. Jeho obsah je roven $\frac{2}{9}$, obsah čtverce je roven 1. Hledaná pravděpodobnost je podílem těchto čísel, tedy $\frac{2}{9}$.

Kdybychom zkoumali pravděpodobnost toho, že součet zvolených čísel bude roven $\frac{2}{3}$, zjistili bychom,



Obr. VI.1

že je to nula. Odpovídající body vyplňují v našem čtverci pouze úsečku, což je útvar jednorozměrný a jeho obsah je tedy roven 0. Přesto nejde o jev nemožný. Každý nemožný jev má pravděpodobnost 0, ale ne každý jev o pravděpodobnosti 0 je nemožný. Podobně jev s pravděpodobností 1 nemusí být vždy jistý; v našem případě by to mohl být jev spočívající v tom, že součet není roven $\frac{2}{3}$.

Popsali jsme si základní poznatky, které budete potřebovat k tomu, abyste porozuměli dalšímu textu. Jinak teorie pravděpodobnosti je značně rozvinutým odvětvím matematiky a její význam se zdaleka neomezuje jen na hazardní hry. Tato teorie se uplatňuje v různých oblastech matematiky i v jiných vědách (fyzika, ekonomie) a v technice. Těsně s ní souvisí i matematická statistika.

SPORTKA

Všichni asi znáte pravidla sázkové soutěže Sportka. Proto nebudeme vysvětlovat tato pravidla a rovnou si řekneme, jaké jsou pravděpodobnosti výher v jednotlivých pořadích. Omezíme se na výhry v jednom tahu bez prémiového čísla.

Všech možných případů, to jest všech možných šestic čísel, které mohou být sázeny, je $\binom{49}{6}$. Má-li sázející vyhrát první pořadí, musí zvolit právě tu jedinou šestici čísel, která je vylosována. Pravděpodobnost výhry v prvním pořadí je tedy

$$p_1 = \frac{1}{\binom{49}{6}}.$$

Aby sázející vyhrál druhé pořadí, musí vsadit pět čísel z oněch šesti tažených a jedno číslo ze zbývajících 43 netažených. Počet příznivých případů je tedy $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}$ a pravděpodobnost je

$$p_2 = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}.$$

Na výhru ve třetím pořadí je třeba vsadit čtyři čísla ze šesti tažených a dvě čísla ze 43 netažených. Pravděpodobnost je tedy

$$p_3 = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$$

Konečně výhra ve čtvrtém pořadí má pravděpodobnost

$$p_4 = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}.$$

Pravděpodobnost, že vůbec něco vyhrajeme, je pak součtem těchto pravděpodobností.

Nemělo by význam, kdybychom zde uváděli číselné hodnoty těchto pravděpodobností; pohrajte si s tím sami na kalkulačce. Uvedeme jen, že pravděpodobnost výhry v prvním pořadí je přibližně rovna jedné čtrnáctimiliontině. Kdyby každý občan Československa vsadil sportku, bylo by to možno provést tak, že převážná většina všech šestic by byla vsazena jen jednou a jen poměrně malé množství, jen nějaký milión, by bylo vsazeno dvakrát. Reklamní heslo na poutači u silnice vedoucí k ruzyňskému letišti v Praze „Sportka — jistá výhra!“ je tedy velmi daleko od pravdy.

Polovina výtěžku sportky se dělí mezi vyhrávající, druhá polovina je věnována na rozvoj našeho sportu. Spravedlivé dělení je takové, že výška výhry je nepřímo úměrná její pravděpodobnosti. Výhry v jednotlivých pořadích jsou tedy $\frac{k}{p_1}, \frac{k}{p_2}, \frac{k}{p_3}, \frac{k}{p_4}$, kde k je nějaké číslo. Jsou-li počty výherců v jednotlivých pořadích n_1, n_2, n_3, n_4 a rozdělovaná částka S, pak platí

$$\frac{kn_1}{p_1} + \frac{kn_2}{p_2} + \frac{kn_3}{p_3} + \frac{kn_4}{p_4} = S.$$

Z toho se dá k snadno vypočíst.

Ovšem tím by naše úvahy nad sportkou nekončily. Všimněme si, jak sázíme. Co by lidé asi řekli o člověku, který by vsadil čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6? Asi by poznamenali něco nelichotivého o jeho inteligenci, protože by byli přesvědčeni, že takováto čísla přece nemohou nikdy vyjít. A přesto všechny šestice, tedy i šestice {1, 2, 3, 4, 5, 6}, mají stejnou pravděpodobnost, že budou taženy; je to vždy

$$\frac{1}{\binom{49}{6}}.$$

Uspořádání kuliček v osudí je přece zcela náhodné a nijak nezávisí na pořadí příslušných čísel. Vždyť místo čísel by na kuličkách mohly být libovolné jiné znaky. Sázet čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 může být naopak výhodné. Nejde totiž jen o pravděpodobnost výhry, ale i o její možnou výši. Jak už jsme uváděli, polovina výtěžku sportky se dělí mezi vyhrávající; uvedli jsme také, jak se dělí. Z toho je vidět, že vsadí-li někdo zmíněná čísla a vyhraje-li, pak má naději získat podstatně větší částku, než kdyby vyhrál na nějaká jiná čísla, protože — vzhledem k výše uvedenému — bude jedním z mála výherců. Pak se tedy naplní přísloví, že kdo se směje naposled, ten se směje nejlépe.

Při sázení sazky je ovšem situace podstatně jiná. Tam nejde o náhodné vytahování kuliček z osudí, ale o výsledky sportovních zápasů, které nejsou zcela náhodné (i když do jisté míry také), ale závisí především na výkonu jednotlivých mužstev. Při sázení tedy také nemají všichni sázející stejné šance, ale lépe je na tom ten, kdo se zajímá o výkony sportovních mužstev a dovede podle nich předpovědět výsledky budoucích zápasů. Totéž ovšem platí i o sázení na koňských dostizích.

RULETA

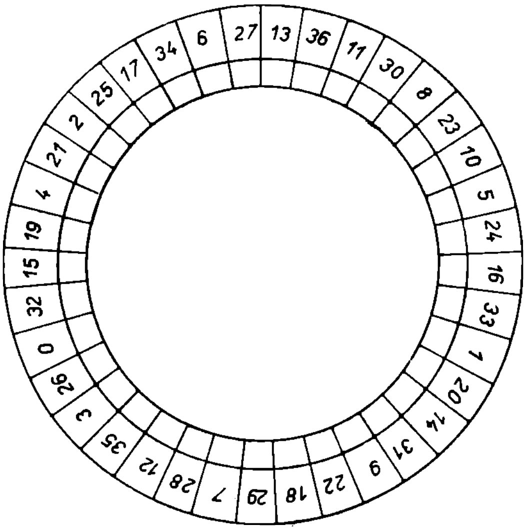
Jednou z hazardních her, na kterých si můžeme dobře vysvětlit teorii pravděpodobnosti, je ruleta. Hraje se s kolem vyobrazeným na obr. VI.2. Na obvodu kola jsou napsána čísla od 0 do 36, vedle nich jsou prohlubně. Kolo se roztočí a vhodí se na ně kulička. Po zastavení kola zapadne kulička do jedné z prohlubní a určí tak vyhrávající číslo. Pravděpodobnost, že vyjde určité číslo, je ovšem u všech čísel stejná a je rovna $\frac{1}{37}$.

Vsazené obnosy se kladou na hrací plán (obr. VI.3). Polovina nenulových čísel na tomto plánu je kreslena černě, druhá polovina červeně. Na našem nebarevném obrázku jsou černá čísla značena orámováním. Nula není ani černá, ani červená.

Jsou možné tyto typy sázek:

(a) na určité číslo (pleine) — výhra je šestatřicetinásobek sázky;
(b) dvě čísla vedle sebe (cheval) — osmnáctinásobek;
(c) vodorovná řada s třemi čísly (transversale pleine) — dvanáctinásobek;

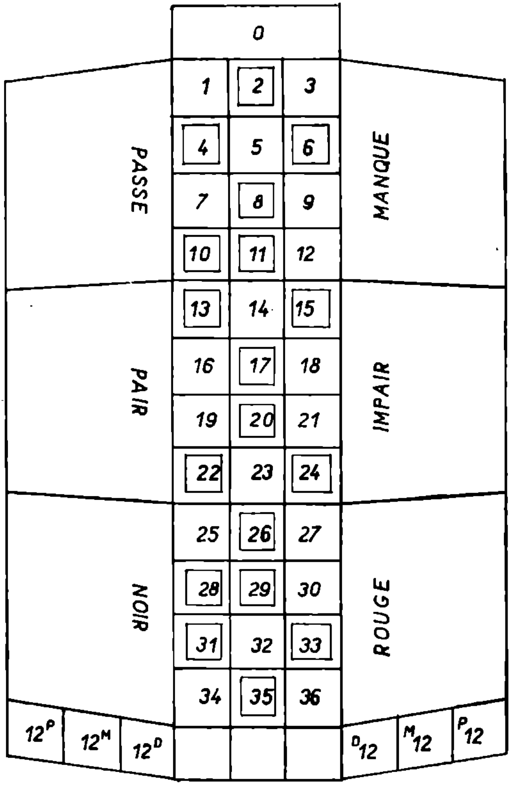
(d) čtyři čísla ve čtverci (carré) — devítinásobek;
(e) první čtyři čísla (0, 1, 2, 3) — devítinásobek;
(f) dvě vodorovné řady (transversale 6) — šestinásobek;
(g) svislá řada s 12 čísly (colonne) — trojnásobek;
(h) první tucet čísel 1—12 (12 p) — trojnásobek;
(i) druhý tucet čísel 13—24 (12 m) — trojnásobek;
(j) třetí tucet čísel 25—36 (12 d) — trojnásobek;
(k) všechna sudá čísla (pair) — dvojnásobek;
(l) všechna lichá čísla (impair) — dvojnásobek;
(m) všechna červená čísla (rouge) — dvojnásobek;
(n) všechna černá čísla (noir) — dvojnásobek;



Obr. VI.2

(o) první polovina všech čísel 1—18 (manque) — dvojnásobek;

(p) druhá polovina všech čísel 19—36 (passe) — dvojnásobek.



Obr. VI.3

Číslo 0 má v ruletě zvláštní postavení. Nepokládá se za sudé (i když víme, že sudé je), není červené ani černé. Vyjde-li nula, vyhrává pouze ten, kdo sázel přímo na ni nebo podle bodu (e). Ti, kteří sázeli na jednotlivá čísla, mohou dostat zpět polovinu sázky nebo hrát s toutéž sázkou v dalším kole. Ostatní prohrávají.

Na okamžik zapomeňme, že na ruletě je také nula. Pak vidíme, že výhra je vždy k-násobkem sázky, kde $\frac{1}{k}$ je pravděpodobnost výhry. Je to správné. Sází-li někdo na jednotlivé číslo, má pravděpodobnost výhry rovnou $\frac{1}{36}$; vyhraje-li, dostane šestatřicetinásobek sázky. Sází-li na lichá čísla, má pravděpodobnost výhry $\frac{1}{2}$, tedy výhra je pouze dvojnásobkem sázky.

Existence nuly tyto úvahy poněkud komplikuje. Pravděpodobnost výhry na jednotlivé číslo není $\frac{1}{36}$, ale $\frac{1}{37}$; pravděpodobnost výhry na lichá čísla není $\frac{1}{2}$, ale $\frac{18}{37}$. To však nejsou tak velké rozdíly a je to proto, že herna je výdělečný podnik a musí být proti hráčům poněkud zvýhodněna. Známá herna Casino v Monte Carlu například kryje podstatnou část státního rozpočtu Monackého knížectví. Hraje-li se ruleta v soukromé společnosti, musí jeden z hráčů řídit hru čili dělat krupiéra. Ten nemůže uvažovat, co by vsadil, ale musí přijmout každou sázku a ze své kapsy vyplácet příslušné výhry. (Inkasuje ovšem všechny prohrané částky.) Za toto si také zaslouží zvýhodnění.

Pokud v herně někdo „rozbije bank", to jest vyhraje v řadě případů za sebou velké částky, koná se jakýsi symbolický pohřební obřad. Ruletový stůl se zakryje černým suknem a vyřadí se z provozu. Není to však jen obřad, ale má to i praktický význam. Nic na světě není dokonalé, tedy ani ruleta, a může se stát, že ruletové kolo není přesně vyváženo, takže některá čísla mají podstatně větší pravděpodobnost, že vyjdou, než ostatní. Proto je třeba v takovém případě vyřadit ruletu z provozu a zkontrolovat její vyvážení.

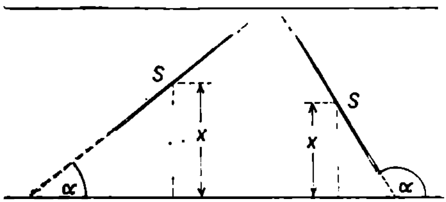
Název Stendhalova románu „Červený a černý" sice značí červený oděv vojáka a černý oděv kněze, není však zcela vyloučeno, že zde měl autor na mysli i ruletu a přirovnání života svého hlavního hrdiny k této hře.

Závěrem bych poznamenal, že pokud by mě chtěl někdo obviňovat z toho, že nabádám mládež k hazardním hrám, měl by si podrobně pročíst tento odstavec a promyslit si všechny zmíněné pravděpodobnosti; pak pozná, že tento text vyznívá spíše opačně.

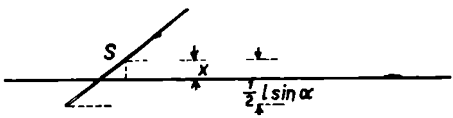
JEHLA A ČÍSLO π

Franc. matematik Buffon (1707—1788) vymyslel zajímavou úlohu. Na papíře jsou nakresleny rovnoběžné linky, vzdálenost dvou sousedních linek je d. Na papír z velké výšky házíme jehlu délky l, přičemž $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla dopadne tak, aby ležela přes některou linku? (Jehlu bereme jako úsečku, zanedbáváme její tloušťku.)

Polohu jehly na papíře lze charakterizovat dvěma čísly. Jedním z nich je vzdálenost středu jehly od nejbližší linky, která je na papíře níže než tento střed. Tato vzdálenost může nabývat hodnot od 0 do d; všechny tyto hodnoty můžeme považovat za stejně pravděpodobné. Zmíněnou vzdálenost budeme značit x. Druhým číslem je velikost α úhlu, který svírá jehla s libovolnou z linek, je-li tato linka orientována zleva doprava. (Viz obr. VI.4.) Tento úhel měříme v obloukové míře. Číslo α tedy může nabývat všech hodnot od 0 do π; všechny



Obr. VI.4



Obr. VI.5

tyto hodnoty můžeme považovat opět za stejně pravděpodobné.

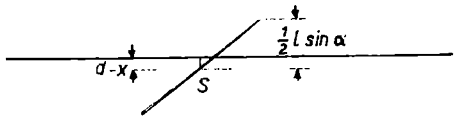
Snadno zjistíme, že jehla leží přes linku právě tehdy, je-li buď

$$\frac{1}{2} l \sin \alpha > x.$$

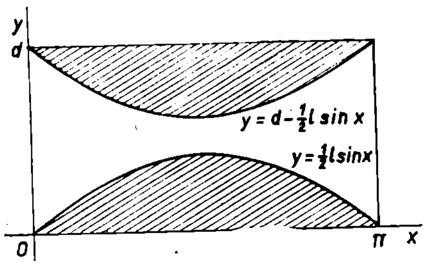
(obr. VI.5), nebo

$$\frac{1}{2} l \sin \alpha > d - x$$

(Obr. VI.6). Použijeme geometrické pravděpodobnosti. Každá dvojice $[x, \alpha]$ představuje souřadnice některého bodu obdélníka, jehož vrcholy jsou body $[0, 0]$, $[d, 0]$, $[d, \pi]$, $[0, \pi]$. Body, jejichž souřadnice splňují první nerovnost, jsou body pod grafem funkce $y = \frac{1}{2} l \sin x$:



Obr. VI.6



Obr. VI.7

body, jejichž souřadnice splňují druhou nerovnost, jsou nad grafem funkce $y = d - \frac{1}{2} l \sin x$. Jsou tedy ve dvou obrazcích vyšrafovaných na obr. VI.7. Součet obsahů těchto obrazců je roven $2l$. (Musíte mi to zatím věřit; až budete umět integrovat, přesvědčíte se o tom sami.) Obsah celého obdélníka je πd, tedy hledaná pravděpodobnost je $\frac{2l}{\pi d}$.

Asi jste už něco slyšeli o zákonu velkých čísel. Provádějme několikrát určitý pokus, například házení hrací kostkou. Házíme-li n-krát a z toho m-krát nám padne šestka, řekneme, že relativní četnost padnutí šestky je $\frac{m}{n}$. Zákon velkých čísel zde nebudeme přesně formulovat, ale řekneme si, že při velkém počtu pokusů z něho plyne, že s velkou pravděpodobností se relativní četnost jevu bude jen velmi málo lišit od jeho pravděpodobnosti. Házíme-li kostkou třicettisíckrát, můžeme čekat, že šestka padne přibližně pěttisíckrát.

Opakujeme tedy házení jehlou n-krát pro značně velké n, a je-li počet případů, kdy jehla padla žádaným způsobem, roven m, pak

$$\frac{m}{n} \doteq \frac{2l}{\pi d}$$

Z toho pak

$$\pi \doteq \frac{2ln}{dm}.$$

Takto bychom se při rostoucím n postupně přibližovali k číslo π a mohli bychom tedy házením jehlou přibližně určit toto číslo. Je to ovšem úvaha ryze teoretická; prakticky to provádět by nemělo smysl. Ani l, ani d totiž neměříme s přesností na mnoho desetinných míst, nemluvě o tom, že jehla i linky mají také určitou tloušťku, kterou jsme zcela zanedbávali. Snažit se tedy určit π na mnoho desetinných míst z takovýchto nepřesných údajů nemá význam. Nicméně jde o zajímavou hříčku.

Lewis Carroll (1832—1898) je světové veřejnosti znám především jako autor knih „Alenčina dobrodružství v říši divů“ a „Alenčina dobrodružství za zrcadlem“. Tyto knihy jsou stále oblíbenou četbou dětí i dospělých; mnozí lidé, mezi nimi i významný filozof a matematik Bertrand Russell (1872—1970) tvrdili, že jde o knihy výlučně pro dospělé. Méně je už známo, že Lewis Carroll je autorem řady prací o matematické logice; tyto práce ovšem podepisoval svým občanským jménem Charles Lutwidge Dodgson. Zmiňme se ještě o tom, že patřil také k průkopníkům umělecké fotografie.

Jakési hraniční pásmo mezi jeho činností vědeckou a uměleckou tvoří řada matematických hádanek a úloh, které Carroll, jak uvádí, vymýšlel v bezesných nocích. Jsou to úlohy vtipné a rozhodně nikoli lehké. Mezi nimi je i jedno pozoruhodné sofisma, které zde uvedeme.

V urně jsou dvě koule, o nichž víme jen to, že každá z nich je buď černá, nebo bílá. Máme určit jejich barvu, aniž bychom je vyjímali z urny. (Použití rentgenu se nedovoluje.) K řešení se užívá teorie pravděpodobnosti.

Řešení je překvapivé. Nejprve provedeme přípravnou (zřejmě bezchybnou) úvahu. Jsou-li v urně tři koule, z nichž každá je černá nebo bílá, vyjímáme-li jednu kouli, pak pravděpodobnost vytažení černé koule je rovna $\frac{2}{3}$ právě tehdy, jsou-li dvě koule černé a jedna bílá. Nyní přistoupíme k řešení. Do urny přidáme jednu černou kouli; pak jsou tedy v urně tři koule, z nichž jedna je zaručeně černá, každá z ostatních je buď černá, nebo bílá. Pravděpodobnost, že všechny koule jsou černé, je rovna $\frac{1}{4}$ (poněvadž jde vlastně o pravděpodobnost, že obě původní koule jsou černé), pravděpodobnost vytažení černé koule v tomto případě je rovna 1. Pravděpodobnost, že dvě koule jsou černé a jedna bílá, je rovna $\frac{1}{2}$ a pravděpodobnost vytažení černé koule v tomto případě je rovna $\frac{2}{3}$. Pravděpodobnost, že dvě koule jsou bílé a jedna černá, je rovna $\frac{1}{4}$ a pravděpodobnost vytažení černé koule v tomto případě je rovna $\frac{1}{3}$. Samozřejmě pravděpodobnost, že všechny tři koule jsou bílé, je rovna 0. Počítejme celkovou pravděpodobnost vytažení černé koule. Je to

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Podle naší přípravné úvahy je to možné právě tehdy, jsou-li dvě koule černé a jedna bílá. Protože jsme přidávali jednu černou kouli, musela být na začátku jedna koule černá a jedna bílá.

Jde o sofisma, tedy o tvrzení podávané tak přesvědčivě, že se zdá být pravdivé, ačkoliv pravdivé není. V „důkaze“ se zaměňuje takzvaná nepodmíněná a podmíněná pravděpodobnost. V přípravné úvaze jde o nepodmíněnou pravděpodobnost, v dalších úvahách pak o pravděpodobnost podmíněnou. Tento rozdíl pochopíte při hlubším studiu teorie pravděpodobnosti.

Úlohy

1. Čtyři muži si dali své klobouky do šatny. Šatnářka je však zapomněla označit, takže při odchodu jim je vydává zcela náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že všichni čtyři dostanou nazpět své klobouky? Jaká je pravděpodobnost, že své kloubouky dostanou právě tři, právě dva a právě jeden? Jaká je pravděpodobnost, že nikdo neobdrží svůj vlastní klobouk?

2. Tři osoby se posadí ke stolu, před nímž je řada šesti židlí. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi nebude prázdná židle, volí-li svá místa zcela náhodně?

3. Deset lidí se rozsadí kolem okrouhlého stolu. Jaká je pravděpodobnost, že určitá dvojice lidí bude sedět vedle sebe?

4. Jaká je pravděpodobnost, že ze tří náhodně vytažených mariášových karet bude alespoň jedno eso?

5. Dva přátelé se dohodli, že se na jistém místě sejdou mezi druhou a třetí hodinou odpoledne. Dohodli se, že ten, kdo přijde první, bude na druhého čekat, dokud nepřijde, nejvýše však dvacet minut. Jaká je pravděpodobnost, že se sejdou?

6. Máme 25 bílých koulí a 25 černých; rozdělíme je libovolným způsobem do dvou osudí. Někdo jiný pak volí náhodně jedno osudí a vytahuje z něho jednu kouli. Je pravděpodobnost vytažení bílé koule vždy $\frac{1}{2}$, nebo může být větší?

7. Dva hráči A a B házeli korunou; A vyhrával, padla-li panna, v opačném případě vyhrával B. Hráč B neměl ve hře štěstí. Hráč A mu navrhl změnu pravidel: každý bude házet dvěma mincemi a hráč B vyhraje vždy, když bude mít více lvů než A. Je to pro hráče B výhodnější než házení jednou mincí?

8. Určete pravděpodobnosti jednotlivých výher v sázkové soutěži Mates (sází se pět z 35 čísel).

Řešení úloh

1. Celkový počet možností je počet všech permutací ze čtyř prvků, to jest $4! = 24$. Jen při jediné možnosti dostanou všichni své klobouky; pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{24}$. Není

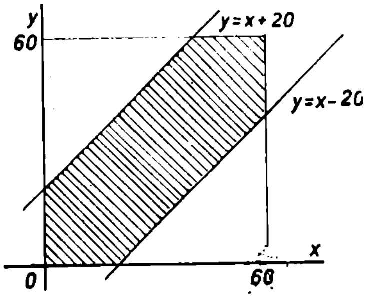
možné, aby tři muži dostali své klobouky a čtvrtý nikoliv; čtvrtý klobouk musí být přece jeho — pravděpodobnost musí být v tomto případě 0. Nyní si představme, že právě dva dostali své klobouky. Tím už je jednoznačně určeno, jaké klobouky dostali zbývající dva — měli klobouky navzájem vyměněné. Možností je tedy $\binom{4}{2} = 6$ a pravděpodobnost je $\frac{1}{4}$. Možnosti, kdy první muž dostane svůj klobouk a všichni ostatní dostanou klobouk cizí, jsou dvě — buď druhý dostane klobouk třetího, třetí čtvrtého a čtvrtý druhého, nebo druhý dostane klobouk čtvrtého, třetí druhého a čtvrtý třetího. Podobně je tomu ovšem i tehdy, kdy svůj klobouk dostane někdo jiný než první; je tedy celkem $4 . 2 = 8$ možností a pravděpodobnost je $\frac{1}{3}$. Pravděpodobnost posledního případu dostaneme tak, že od jedné odečteme součet všech těchto pravděpodobností; je to $1 - \left(\frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{8}$.

2. Všech možností je $\binom{6}{3} = 20$. Příznivé případy jsou čtyři, pravděpodobnost je $\frac{1}{5}$.

3. Celkový počet možností je 10!. Při počítání příznivých případů uvažujeme, že první ze zmíněných dvou osob může sedět na libovolné židli a druhá nalevo nebo napravo od ní; je tedy dvacet příznivých případů. Pravděpodobnost je $\frac{20}{10!} =$
$= \frac{1}{181440}$.

4. Karet je 32, esa jsou čtyři. Všech možných trojic karet je $\binom{32}{3}$, všech možných trojic karet bez es je $\binom{28}{3}$. Tedy trojic, v nichž je alespoň jedno eso, je $\binom{32}{3} - \binom{28}{3}$. Pravděpodobnost je $1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}}$.

5. Použijeme geometrické pravděpodobnosti. Nechť x je počet minut po druhé hodině v době, kdy přijde první z přátel; analogicky budiž definováno y pro druhého z přátel. Máme $0 \leqq x \leqq 60$, $0 \leqq y \leqq 60$. Body o souřadnicích x, y, které splňují tuto podmínku, vyplní čtverec o vrcholech [0, 0], [0, 60], [60, 60], [60, 0]. Aby se přátelé setkali, musí být $|x - y| \leqq 20$. Body o takovýchto souřadnicích vyplní přímý pás mezi rovnoběžnými přímkami o rovnicích $y = x - 20$ a $y = x + 20$.



Obr. VI.8

Na obr. VI.8 je vyšrafována část tohoto přímého pásu, která leží ve zmíněném čtverci. Skládá se z obdélníka a dvou trojúhelníků, snadno tedy vypočteme její obsah, což je 2000. Obsah čtverce je 3600, tedy pravděpodobnost je $\frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}$.

6. Může být větší. Nechť v prvním osudí je jedna bílá koule, v druhém osudí všechny ostatní koule. Pravděpodobnost zvolení libovolného osudí je $\frac{1}{2}$. Zvolí-li se první osudí, je pravděpodobnost vytažení bílé koule 1, v opačném případě $\frac{24}{49}$. Celková pravděpodobnost vytažení bílé koule je

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{49} = \frac{73}{98}.$$

7. Hráč A hráče B ošidil. Při nových pravidlech je pravděpo-

dobnost výhry hráče A pouze $\frac{5}{16}$, zatímco předtím byla $\frac{1}{2}$.

8. Jsou-li p_1, p_2, p_3 pravděpodobnosti výher v jednotlivých pořadích, pak

$$p_1 = \frac{1}{\binom{35}{5}},$$

$$p_2 = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{30}{1}}{\binom{35}{5}},$$

$$p_3 = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{35}{5}}.$$