

# Matematický svět mezi válkami

---

Jindřich Bečvář

Teorie matic mezi světovými válkami (v širším kontextu)

In: Martina Bečvářová (author); Jindřich Bečvář (author); Zdeněk Halas (author); Magdalena Hykšová (author); Antonín Slavík (author); Ivan Netuka (author); Jiří Veselý (author); Jaroslav Zhouf (author): *Matematický svět mezi válkami*. (Czech). Praha: České vysoké učení technické v Praze, Ústav aplikované matematiky Fakulty dopravní ČVUT, 2020. pp. 12–96.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404394>

## Terms of use:

- © Bečvářová, Martina
- © Bečvář, Jindřich
- © Halas, Zdeněk
- © Hykšová, Magdalena
- © Slavík, Antonín
- © Netuka, Ivan
- © Veselý, Jiří
- © Zhouf, Jaroslav

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK  
UND IHRER GRENZGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTFLEITUNG  
DES  
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK“  
ZWEITER BAND

---

THE THEORY  
OF MATRICES

BY

C. C. MAC DUFFEE

Corrected Reprint of First Edition

CHELSEA PUBLISHING COMPANY  
231 WEST 29th STREET, NEW YORK 1, N. Y.  
1946

# Teorie matic mezi světovými válkami

## (v širším kontextu)

JINDŘICH BEČVÁŘ

**Abstract.** The chapter first briefly recalls the birth and development of matrix theory from the beginning of our era to the end of the 19th century. Then, the attention is paid to the birth of matrix language and the successful establishment of matrix theory in the first three decades of the 20th century, especially in the period between the world wars. The whole chapter contains brief information about contemporary textbooks and monographs, which were partly or fully devoted to matrices. A very interesting topic is the penetration of matrices into quantum mechanics in the 1920s (so-called matrix quantum mechanics).<sup>1</sup>

**Key words.** Matrices, matrix theory, monographs and textbooks devoted to matrices, quantum mechanics, matrix mechanics.

### 1. Úvod – vznik teorie matic a její vývoj do konce 19. století

Vývoj teorie matic je pozoruhodný. Matice se objevily již před dvěma tisíciletími ve staré Číně jako obdélníková schémata čísel sestavená na počítací desce. Užívány byly (v dnešní řeči) k řešení nehomogenních soustav lineárních rovnic s regulární maticí nejvýše pátého řádu postupem, který se v moderní matematice nazývá Gaussův eliminační algoritmus. Poznamenejme, že „čínský Gaussův algoritmus“ nazývaný *Fang čcheng* (*Fang cheng*), byl vůči našemu „transponovaný“, Číňané tedy své matice upravovali „sloupcově“. Podrobněji se o čínské matematice a o metodě řešení úloh vedoucích na soustavy lineárních rovnic metodou Fang čcheng můžeme dočíst v [Ber1], [Ber2], [Ber3], [Hud], [ChG], [KCL], [Mik] a [Vo].

Čtvercová či obdélníková schémata čísel se začala častěji a výrazněji objevovat až v 18. století, zejména v souvislosti

- se soustavami lineárních rovnic a teorií determinantů,
- s transformacemi (resp. substitucemi), jejich reprezentacemi a jejich skládáním,
- s bilineárními a kvadratickými formami, jejich reprezentacemi a jejich kanonickými tvary (transformace rovnic kuželoseček a kvadrik k hlavním osám, klasifikace symetrických bilineárních, resp. kvadratických forem, řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic apod.),
- s teorií hyperkomplexních čísel.

---

<sup>1</sup> Tato kapitola využívá řady informací podaných stručně v monografii [Be3].

Připomeňme nejprve několik výraznějších okamžiků, v nichž se pracovalo se čtvercovými schémata, které dnes nazýváme maticemi.

Některé maticové výsledky se objevily při zkoumání determinantů již ve druhé polovině 18. století. Jednalo se zejména o větu o násobení determinantů, v níž se skrývá násobení matic, o větu o determinantu reciproké matice apod. Viz např. [Kn1] a [Kn2].

Leonhard Euler (1707–1783) vyšetřoval roku 1771 čtvercová schémata (matice třetího a čtvrtého řádu) v souvislosti s problematikou magických čtverců. Studoval i čtvercová „ortogonální schémata“ a násobil řádky uvažovaného schématu se sloupci schématu transponovaného.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) reprezentoval roku 1801 lineární transformace kvadratických forem čtvercovými schémata a při jejich skládání dospěl k násobení matic. Zajímavé je, že přitom neobjevil vyjádření kvadratické formy čtvercovým schématem, a tedy ani maticové vyjádření její transformace.

Obdobným způsobem postupoval v letech 1844 až 1847 Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852) při zkoumání binárních, resp. ternárních kvadratických a kubických forem. Pracoval s lineárními transformacemi, které reprezentoval čtvercovými schémata, skládal je a některé dokonce invertoval.

Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll, 1832–1898) rozvíjel některé maticové úvahy v knize *Elementary Treatise on Determinants* z roku 1867. Velkou pozornost věnoval lineárním rovnicím. Podal nutnou a postačující podmínku řešitelnosti soustavy lineárních rovnic, ale značně komplikovaným způsobem. Ještě neměl k dispozici pojem hodnosti.

Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886) pracoval v letech 1867 až 1876 s tzv. lineárními systémy, zavedl jejich sčítání a násobení, uvažoval symetrické i antisymetrické systémy. S jejich pomocí formuloval transformaci rovnice plochy třetího stupně.

Pojem i termín matice (*matrix*) se rodil ve čtyřicátých a padesátých letech v pracích Arthura Cayleyho (1821–1895) a Jamese Josepha Sylvestera (1814–1897), viz např. [Tv]. Zrod teorie matic je často spojován právě s prací *A Memoir on the Theory of Matrices*, kterou roku 1858 publikoval Cayley. Velkou roli sehrál patrně název této práce, obsahující atraktivní název *Theory of Matrices*. Cayley v ní zavedl pojem matice, definoval operace s maticemi (sčítání, násobení, násobení skalárem), vyjádřil inverzní matici pomocí algebraických doplňků, bez obecného důkazu uvedl tzv. Cayleovu-Hamiltonovu větu a podal reprezentaci algebry kvaternionů algebrou určitých komplexních matic druhého řádu. Připojil i několik odstavců o obdélníkových maticích. Maticím se věnoval i v osmdesátých letech. Viz např. [Ha1] a [Ha3].

Pojem hodnosti se rodil dlouho. Hodnost byla definována pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů, ovšem jako *hodnost determinantu*, resp. *hodnost schématu*, resp. *hodnost formy*. Pochopení role, kterou hraje lineární závislost a nezávislost sloupců, resp. řádků matice, nepřišlo ani okamžitě a ani

snadno. Pojem *hodnost determinantu*, resp. *hodnost systému* exaktně zavedl roku 1879 ve dvou článcích (pro čtvercové i obdélníkové schéma) Georg Ferdinand Frobenius (1849–1917). James Joseph Sylvester roku 1882 definoval alternativní pojem *nulita* (u čtvercové matice se jedná o doplněk hodnosti do jejího řádu), Leopold Kronecker (1823–1891) přišel roku 1884 s pojmem *hodnost obdélníkového systému* reálných čísel.

Matematiky přitahovala problematika Cayleovy-Hamiltonovy věty, která byla v Cayleově práci roku 1858 publikována bez obecného důkazu. Její řádný důkaz podali nezávisle Arthur Buchheim (1859–1888) a Andrew Russell Forsyth (1858–1942) roku 1883/1884 a čeští matematici Ludvík Kraus (1857–1885) a Eduard Weyr (1852–1903) roku 1884; další důkazy publikovali např. Moritz Pasch (1843–1930) roku 1891 a Georg Frobenius roku 1896.

Závažným a značně širokým tématem, které hraje v teorii matic zcela zásadní roli, je problematika kanonických tvarů, vlastních čísel a vlastních vektorů. Tyto otázky řešili již v 17. století v určité podobě například René Descartes (1596–1650) a Pierre de Fermat (1601–1665). Obdobnou problematikou se zabývali Leonhard Euler roku 1748 při transformaci rovnice kvadratické plochy k hlavním osám, Joseph Louis Lagrange (1736–1813) roku 1859 při studiu extrémů funkcí více proměnných, Carl Friedrich Gauss roku 1801 v souvislosti s teorií čísel, Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) v letech 1827 a 1834 při transformaci rovnice kvadratické plochy, později Julius Plücker (1801–1868), Ludwig Otto Hesse (1811–1874) a další matematici.

Tyto otázky byly velmi úzce spjaty s nebeskou mechanikou. Na základě prací Johanna Keplera (1571–1630) a Issaca Newtona (1643–1727) byla rozpracována teorie pohybů jednotlivých těles sluneční soustavy (planet i jejich satelitů) a její výsledky konfrontovány s pozorováními. Zjištěné odchylky od vypočtených hodnot motivovaly k dalšímu teoretickému bádání a k upřesňování výpočtů i pozorování.

Velkým tématem astronomů, fyziků a matematiků 18. století byla otázka, zda dlouhodobé změny pohybů planet jsou periodické, tj. problém stability sluneční soustavy. Studium pohybů planet vedlo k řešení soustav obyčejných lineárních diferenciálních rovnic, při němž hrála zásadní roli tzv. *sekulární rovnice* (později tzv. *charakteristická rovnice*)  $\det(A - \lambda E) = 0$ , v níž je matice  $A$  sestavena z parametrů dané situace. Pro tehdy známých šest planet se jednalo o rovnici 6. stupně. Problematikou charakteristické rovnice, vlastních čísel a příslušných vlastních vektorů se intenzivně zabývali již Leonhard Euler, Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783) a další astronomové, fyzici a matematici. Joseph Louis Lagrange a Pierre Simon Laplace (1749–1827) dospěli v sedmdesátých a osmdesátých letech k názoru, že sluneční soustava stabilní je. Při řešení těchto otázek naráželi (v dnešní řeči) na problém reálnosti vlastních čísel reálné symetrické matice – tento fakt zdůvodňovali fyzikálně filozofickými úvahami, jejich podstatným argumentem byla právě stabilita sluneční soustavy.

Situaci do jisté míry zkomplikoval roku 1781 objev planety Uran – nyní bylo třeba studovat charakteristickou rovnici 7. stupně; touto problematikou se zabývala řada astronomů, fyziků a matematiků, např. Jacobi. Výrazné odchylky v pohybu planety Uran oproti vypočteným polohám vedly k úvahám o nějaké další planetě, která pohyb Uranu ovlivňuje. Nezávisle na sobě se složitými výpočty pokusili situaci řešit Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811–1877) a John Couch Adams (1819–1892). Byli úspěšní, v letech 1843 až 1845 vypočetli dráhu hypotetické planety a určili polohu, kde by se měla na obloze nacházet. Velmi překvapivá byla shoda ve výsledcích jejich výpočtů. Nedaleko místa, které označili, byla roku 1846 skutečně nová planeta objevena a pojmenována Neptun. V důsledku tohoto přírůstku do sluneční soustavy bylo třeba ve druhé polovině 19. století studovat charakteristickou rovnici 8. stupně.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) se v letech 1829 a 1830 zabýval převodem kvadratické formy  $n$  proměnných na kanonický tvar pomocí ortogonální transformace. Při této příležitosti dokázal, že reálná symetrická matice má reálná vlastní čísla. Zcela exaktně tak podal matematický důkaz skutečnosti, kterou Laplace a Lagrange zdůvodňovali „fyzikálně-filozoficky“. Cauchyho výsledek zobecnil roku 1855 Charles Hermite (1822–1901), když dokázal (v dnešní řeči), že hermitovské matice mají reálná vlastní čísla. Podrobněji viz [Ha2].

Sylvester roku 1852 zformuloval tzv. zákon setrvačnosti kvadratických forem (důkaz neuvedl, považoval jej za zřejmý). I on dokázal, že vlastní čísla reálné symetrické matice jsou reálná.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) velmi úspěšně řešil roku 1858 problém současného převedení dvou kvadratických forem na kanonický tvar; o deset let později vypracoval tzv. *teorii elementárních dělitelů*, v níž podal nutné a postačující podmínky pro podobnost matic i pro diagonalizovatelnost matice. Řešil též klasický problém – transformaci rovnice kvadratické formy na jednoduchý tvar (součet čtverců). Veškeré své výsledky formuloval pro bilineární a kvadratické formy, nikoli pro matice. Na Weierstrassovy práce reagoval svými výsledky Leopold Kronecker v roce 1874. Podrobnější pohledy na tuto problematiku podává článek [Ha4].

Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) se podobností a kanonickými tvary zabýval roku 1870 ve své slavné monografii *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Ani on neužíval maticovou řeč. Georg Frobenius studoval roku 1878 obecný pojem ekvivalence matic, charakteristickou rovnici, teorii elementárních dělitelů a podobnost, to vše pro bilineární a kvadratické formy. Eduard Weyr načrtnul roku 1885 jiný, modernější přístup k problematice kanonického tvaru.

Alfredo Capelli (1855–1910) a Giovanni Garbieri (1849–1931), dva italsí matematici, dořešili zcela moderním způsobem ve svých pracích z konce 19. století otázku řešitelnosti a tvaru množiny všech řešení soustavy lineárních rovnic.

Souběžně s teorií nekonečných determinantů se koncem 19. století začala intenzivně rozvíjet problematika nekonečných matic, zejména v souvislosti se studiem prostorů nekonečné dimenze a s vyšetřováním soustav nekonečně mnoha lineárních rovnic s nekonečně mnoha neznámými. Výsledky týkající se vlastních čísel a vlastních vektorů byly přenášeny na nekonečně dimenzionální případ, začala se rozvíjet spektrální teorie lineárních operátorů. Této problematice se věnovala řada matematiků, fyziků a astronomů, mezi nimi zaujímalí nejdůležitější místo George William Hill (1838–1914), Ernst Theodor Kötteritzsch (1841–?), Jules-Henri Poincaré (1854–1912), Paul Émile Appell (1855–1930), David Hilbert (1862–1943), Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924), Otto Toeplitz (1881–1940), Ernst Hellinger (1883–1950). Podrobněji se o problematice nekonečných matic a o zajímavé historii této problematiky dočteme v rozsáhlém článku Michaela Bernkopfa *A History of Infinite Matrices* [B], řadu informací najdeme i v knihách (zejména Dieudonné [Die], Pietsch [Pie]).

Zakončeme úvodní část této kapitoly o vývoji teorie matic do konce 19. století dvěma výstižnými citáty. První je z knihy *History of Functional Analysis* [Die], kterou roku 1981 vydal francouzský matematik Jean Alexandre Eugene Dieudonné (1906–1992), druhý je z recenze Wedderburnovy knihy *Lectures on Matrices* [Wed], kterou publikoval roku 1935 Cyrus Colton MacDuffee.

*Between 1850 and 1880 are proved the main theorems of linear algebra, concerning what are called the “reductions” of square matrices. One of these is the problem of finding, for a given square matrix  $U$ , an invertible matrix  $P$  such that  $PUP^{-1}$  has a “reduced” unique canonical form, which here (for complex matrices  $U$ ) means a diagonal array of Jordan matrices; this is the way Jordan himself treats the problem, improving on a previous result of Grassmann, who had proved the existence of a “reduced” triangular matrix  $PUP^{-1}$  for any  $U$  (using already the intrinsic notion of endomorphism instead of the notion of square matrix).*

([Die], s. 72–73)

*An evident fact in the history of matrix theory is that the important theorems are not due to any small group of men. A few names stand out prominently, of course, but it has taken close to a thousand distinct contributions to bring the theory to its present state. Why this was so is not evident, but it must be true that the theorems which now seems so clear to us were not intuitive to mathematicians at the time of their discovery. It has been the common history of the important theorems that they were discovered first in special cases, then generalized and laboriously proved, and finally furnished with neat direct proofs. In the book under review most of the theorems have reached the last stage of development, and the reader is apt to be unaware of the amount of publication which it renders obsolete.<sup>2</sup>*

---

<sup>2</sup> Bulletin of the American Mathematical Society 41(1935), s. 471–472.

## 2. Matice v knihách – konec 19. století

### Heinrich Weber

Velmi významnou učebnicí algebry konce 19. století a začátku 20. století byla dvoudílná monografie Heinricha Webera<sup>3</sup> *Lehrbuch der Algebra* [Web], jejíž první vydání je z let 1895 až 1896, druhé z let 1898 až 1899 a dotisk z roku 1912.

V prvním vydání se pojem matice zcela okrajově objevuje na několika místech prvního dílu v partiích o determinantech a soustavách lineárních rovnic (s. 82, 83, 86, 87, 96), v souvislosti s lineárními transformacemi a invarianty se nevyskytuje. Ve druhém dílu se sice zápisy matic (v současné podobě) objevují, ale termín matice nepadne, hovoří se pouze o substitucích. V rejstříku obou dílů prvního vydání je u hesla matice pouze jediný odkaz týkající se následující pasáže:

*Ein solches Schema,<sup>4</sup> das für sich noch keine numerische Bedeutung hat, heisst eine Matrix, insofern es als Quelle einer grösseren Anzahl von Determinanten betrachtet wird.*  
([Web], díl I., s. 82)

Ve druhém vydání prvního dílu se matice objevují jen výjimečně (s. 97, 99, 101, 102, 103, 108, 114). Ve druhém vydání druhého dílu byl původní 6. oddíl *Gruppen linearen Substitutionen* (s. 151–183), který se o maticích vůbec nezmiňoval, výrazně upraven a rozdělen na oddíly dva (s. 163–243):

6. *Gruppen linearen Substitutionen,*
7. *Gruppeninvarianten.*

Některá místa prvního vydání byla pro druhé vydání nepatrně upravena tak, aby problematika substitucí byla dána do souvislosti s maticemi. Jedna z takto provedených úprav vypadá takto:

<sup>3</sup> Heinrich Martin Weber (1842–1913), německý matematik. Po vysokoškolských studiích v Heidelbergu a Lipsku vystřídal větší počet působišť: Královec (Königsberg, nyní Kaliningrad), Heidelberg (habilitace r. 1866, mimořádným, resp. řádným profesorem r. 1869, resp. r. 1870), Curych, Královec (rektorem 1880), Berlin-Charlottenburg, Marburg (rektorem 1890/1991), Göttingen, Štrasburk (rektorem 1900/1901). Byl univerzálním matematikem (algebra, teorie čísel, algebraická geometrie, analýza, aplikace ve fyzice), sepsal řadu prací a knih. Spolu se svým žákem Josephem Wellsteinem (1869–1919) vydal rozsáhlé a úspěšné dílo *Enzyklopädie der Elementarmathematik* (1903–1907). Od roku 1893 byl editorem časopisu *Mathematische Annalen*, v letech 1895 a 1904 prezidentem Německé matematické společnosti, roku 1904 prezidentem třetího Mezinárodního kongresu matematiků v Heidelbergu. Viz F. Rudio: *Nekrolog. Heinrich Weber (1842–1913, Mitglied der Gesellschaft seit 1870. Ehrenmitglied seit 1896)*, *Naturforschende Gesellschaft (Zürich)* 58(1913), s. 437–453, A. Voss: *Heinrich Weber*, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 23(1914), s. 431–444, G. Frei: *Heinrich Weber (1842–1913)*, s. 509–520, in D. Rauschnig et al. (eds.): *Die Albertus-Universität zu Königsberg und ihre Professoren. Aus Anlass der Gründung der Albertus-Universität vor 450 Jahren*, Duncker & Humblot, Berlin, 1995, 860 stran, N. Schapacher, K. Volkert: *Heinrich Weber; un mathématicien à Strasbourg, 1895–1913*, *L'Ouvert* 89(1997), s. 1–18, B. Schoeneberg: *Weber, Heinrich*, in [Gi]-XIV, s. 202–203.

<sup>4</sup> Jedná se o matici sestavenou z koeficientů soustavy lineárních rovnic.



*Man benutzt zuweilen auch zur Bezeichnung einer Substitution einen einfachen Buchstaben, etwa A, und setzt dann ...*

([Web], díI II., 1. vydání, s. 151–152)

*Man bezeichnet die Substitution also durch eine quadratische Matrix, für die man auch einen einzelnen Buchstaben, etwa A, braucht, und setzt dann ...*

([Web], díI II., 2. vydání, s. 163)

Na jiném místě byl do původního textu prvního vydání vložen tento odstavec:

*Statt von der Zusammensetzung der Substitutionen können wir auch von der Zusammensetzung der Matrices reden, für die dieselben Gesetze gelten.*

([Web], díI II., 2. vydání, s. 166)

Některé odstavce i celé paragrafy druhého vydání druhého dílu jsou však zcela nové a odrážejí postupně sílicí teorii matic. Např. paragrafy

42. *Normalform linearer Substitutionen,*

43. *Vertauschbare Matrices*

již s maticemi výrazně pracují (viz s. 171–180).

V partiích, které přepracovány nebyly, se autor o maticích vůbec nezmiňuje, vše zůstává prezentováno v řeči substitucí nebo transformací, i když se k jejich zápisu matice užívají:

*Wir müssen ... noch die binären Collineationen*

$$(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (x_1, x_2)$$

*betrachten ... wir beide Arten von Substitutionen übereinstimmend durch ein Symbol wie*

$$\Theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

*bezeichnen ...*

([Web], díI II., 2. vydání, s. 265–266)

## Eugen Netto

Eugen Netto<sup>5</sup> vydal v letech 1896 a 1900 dva svazky textu *Vorlesungen über Algebra* [Ne1]. V paragrafu *Die quadratischen Formen* prvního dílu je

<sup>5</sup> Eugen Otto Erwin Netto (1846–1919), německý matematik. Studoval na univerzitě v Berlíně, kde byli mezi jeho učitelé Kronecker, Kummer a Weierstrass, roku 1870 promoval. Nějakou dobu učil na gymnáziu, od roku 1879 byl mimořádným profesorem ve Štrasburku, od roku 1882 v Berlíně. V letech 1888 až 1913 byl řádným profesorem v Giessenu. Věnoval se algebře a teorii čísel, zejména teorii grup. Je autorem řady učebnic a tří delších přehledových článků, které jsou součástí uznávané Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften [EMW].

Viz A. Beutelspacher: *Netto, Eugen*, Neue Deutsche Biographie. Band 19, Duncker & Humblot, Berlin, 1999, s. 89–90, K.-R. Biermann: *Netto, Eugen*, in [Gi]-X, s. 24.

uvedeno maticové vyjádření transformace kvadratické formy (nehovoří se však o maticích):

*Wir führen nun in  $f$  statt der  $x$  neue Variable  $y$  durch die Substitutionsgleichungen*

$$(8) \quad x_\mu = \sum_{\lambda} a_{\lambda\mu} y_\lambda \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

*ein, machen aber dabei die Voraussetzung, dass die Determinante*

$$A = |a_{\lambda\mu}| \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

*von Null verschieden ist, damit man die Substitution umkehren, und, wenn  $\alpha_{\lambda\mu}$  den Coefficienten von  $a_{\lambda\mu}$  in  $A$  bedeutet,*

$$y_\mu = \sum_{\lambda} \frac{\alpha_{\mu\lambda}}{A} x_\lambda \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

*setzen könne. Durch diese Umänderung (8) erhalten wir die transformirte, quadratische Form*

$$g(y) = \sum_{\lambda, \mu} d_{\lambda\mu} y_\lambda y_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n),$$

$$d_{\kappa\lambda} = \sum_{\mu, \nu} a_{\kappa\mu} a_{\lambda\nu} c_{\mu\nu} \quad (\kappa, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n),$$

*wobei dann auch wieder  $d_{\kappa\lambda} = d_{\lambda\kappa}$  sein wird.*

*Man erkennt sofort die Richtigkeit der Gleichung*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

*oder kürzer*

$$A \cdot C \cdot A = D,$$

*aus der hervorgeht, dass  $C$  und  $D$  gleichzeitig Null oder gleichzeitig von Null verschieden sind.*

([Ne1], díl I., s. 183–184)

Terminologie v knize ještě kolisá, jak dokládá následující citát:

*Ist irgend eine Matrix vorgelegt, so sagen wir, dieselbe besitze den Rang  $r$ , wenn alle in ihr enthaltenen Determinanten der Ordnung  $(r+1)$  verschwinden, dagegen nicht alle der Ordnung  $r$ . Das giebt dann für unseren Fall, mit Hinblick auf das soeben Bewiesene: Die Determinanten  $C$  und  $D$  der ursprünglichen und der transformirten quadratischen Form haben denselben Rang.*

*Hat die Determinante einer quadratischen Form den Rang  $r$ , so sagen wir, die Form selbst sei vom Range  $r$ .*

([Ne1], díl I., s. 185)

Ve druhém díle této Nettovy učebnice, který vyšel roku 1900, se opět definuje pojem hodnosti, tentokrát však v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic.

*Es sei ein System constanter Grössen  $a_{ik}$  gegeben ( $i = 1, 2, \dots p$ ;  $k = 1, 2, \dots q$ ), welche in  $p$  Zeilen und  $q$  Spalten angeordnet sind;  $r$  sei die grösste Zahl, für welche nicht alle Determinanten verschwinden, deren Elemente durch die Schnitte von  $r$  Zeilen und  $r$  Spalten des Systems geliefert werden. Dann heisst  $r$  der Rang des Systems.* ([Ne1], díl II., s. 188)

## Ernesto Pascal

Ernesto Pascal<sup>6</sup> vydal roku 1897 knihu *I determinanti. Teoria ed applicazioni con tutte le più recenti ricerche* [P1], která vyšla o tři roky později v německém překladu. S maticemi v této knize pracoval, objevují se v celé knížce, problematika determinantů však výrazně převládá. Pojem čtvercové matice zavedl na samém počátku knihy, pojem obdélníkové matice o něco později:

*L'assieme degli  $n^2$  elementi disposti in quadrato forma ciò che si vuol chiamare la matrice quadrata.*

*Chiamiamo matrice rettangolare una tabella nella quale sieno scritti, disposti in rettangolo,  $m n$  elementi; cioè vi sieno  $m$  linee ognuna risultante di  $n$  elementi. Se  $m = n$  allora si ha la matrice quadrata ...* ([P1], s. 3, 35)

Pascal zavádí násobení matic stejného typu po řádcích (*per linee*), výsledek je chápán jako determinant:

*Per definizione chiameremo prodotto per linee delle due matrici rettangolari, il determinante ...* ([P1], s. 36)

Hodnost matice (*caratteristica della matrice*) je zavedena pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů (s. 249). V partii o soustavách lineárních rovnic je hodnost matice dána do souvislosti s lineární závislostí a nezávislostí jejích řádků.

V letech 1898 až 1900 vydal Pascal ve dvou svazcích velmi užitečnou knihu nazvanou *Repertorio di matematiche superiori (Definizioni – Formole – Teoremi – Cenni bibliografici)* [P2], která vyšla v letech 1900 a 1902 v německé verzi. Dodnes je velmi užitečnou pomůckou. O maticích najdeme jen malé zmínky na stranách 53 až 72 v kapitole *Teoria dei determinanti* (čtvercová matice, obdélníková matice, násobení matic zavedené po řádcích).

---

<sup>6</sup> Ernesto Pascal (1865–1940), italský matematik. Studoval na univerzitách v Neapoli, v Pise a v Göttingenu, působil v Pavii a Neapoli. Publikoval řadu prací a několik knih. Po tři desetiletí vedl přední italský časopis *Giornale di matematiche*. L. Berzolari: *Commemorazione di Ernesto Pascal*, *Rendiconti del reale istituto lombardo di scienze e lettere* 73(1939/1940), č. 2, s. 162–170.

## Alfred North Whitehead

Roku 1898 byla vydána učebnice *A Treatise on Universal Algebra* [Wh], kterou sepsal Alfred North Whitehead.<sup>7</sup> Objevily se v ní i partie o determinantech, maticích a tenzorech. Její pojetí bylo ovlivněno díly několika významných matematiků 19. století, jakými byli hlavně Hermann Günther Grassmann (1809–1877), William Rowan Hamilton (1805–1865), George Boole (1815–1864), Arthur Buchheim a James Joseph Sylvester.

Po létech Whitehead napsal ve své velmi zajímavé knížce *Mathematics and the Good*, kterou máme v české verzi:

*Moje první kniha, Pojednání o obecné algebře, vyšla v únoru 1898. Začal jsem na ní pracovat v lednu 1891. Její myšlenky se do značné míry opíraly o dvě knihy Hermanna Grassmanna, Ausdehnungslehre z r. 1844 a Ausdehnungslehre z 1862. První z nich je daleko závažnější. Bohužel, když vyšla, nikdo jí nerozuměl; předběhla svou dobu o století. Skoro stejný vliv na mé myšlení mělo také dílo siru Williama Rowana Hamiltona Quaternions z r. 1853, spolu s předběžnou publikací z 1844, a Boolova Symbolická logika z r. 1859. Celé moje pozdější dílo o matematické logice je vyvozeno z těchto pramenů. . . . Pojednání o obecné algebře způsobilo, že jsem byl r. 1903 zvolen do Královské akademie.<sup>8</sup>*

Whiteheadova monografie *A Treatise on Universal Algebra* [Wh] se dělí na sedm knih, které se dále člení na kapitoly; je velmi rozsáhlá, celkem má 586 stran. Výklad postupuje od obecných principů, přes algebru symbolické logiky, četné geometrické partie až k vektorům. Matice jsou předmětem šesté kapitoly čtvrté knihy (s. 248–269) a čtvrté kapitoly páté knihy (s. 316–346); pojem matice je zaveden v úzkém vztahu k pojmu operátor.

*The operator  $\phi$  – called by Grassmann a quotient – may be identified with Cayley's matrix. For assume*

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}e_\nu, \\ a_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{\nu 2}e_\nu, \\ &\dots\dots\dots \\ a_\nu &= \alpha_{1\nu}e_1 + \alpha_{2\nu}e_2 + \cdots + \alpha_{\nu\nu}e_\nu. \end{aligned}$$

<sup>7</sup> Alfred North Whitehead (1861–1947), anglický (později americký) matematik, fyzik a filozof. Absolvoval Trinity College v Cambridge, kde poté působil jako profesor matematiky, v letech 1911 až 1924 vyučoval aplikovanou matematiku a fyziku na univerzitě v Londýně, od roku 1924 žil v USA, kde byl profesorem filozofie na Harvardské univerzitě v Cambridge (Massachusetts). Věnoval se původně matematice, logice a fyzice, později hlavně filozofii. Spolu s Bertrandem Russellem (1872–1970) vydal v letech 1910 až 1913 třísvazkové dílo *Principia mathematica*.

Viz W. W. Hammerschmidt: *Obituary: Alfred North Whitehead*, Scripta Mathematica 14(1948), s. 17–23, G. C. Henry Jr.: *Whitehead's Philosophical Response to the New Mathematics*, The Southern Journal of Philosophy 7(1969/1970), s. 341–349.

<sup>8</sup> A. N. Whitehead: *Matematika a dobro a jiné eseje*, edice Váhy, Mladá fronta, Praha, 1970, 125 stran, citát viz s. 13–14.



matiků.<sup>10</sup> Vše prezentoval v řeči bilineárních a kvadratických forem. Kniha je členěna do 18 paragrafů, orientaci v ní umožňuje výstižně podaný obsah a kombinovaný rejstřík (věcný a jmenný). Zdůrazněme, že se v knize nevyskytuje ani termín *matice* ani jméno *Cayley*. Několikrát se však objevuje termín „systém“.

Druhý paragraf *Symbolisches Rechnen mit bilinearen Formen* začíná takto:

*Wir betrachten ein System*

$$\begin{array}{c} a_{11} \cdot \dots \cdot a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \cdot \dots \cdot a_{nn} \end{array}$$

*von  $n^2$  Elementen  $a_{ik}$  beliebiger, aber unter sich gleicher Art. Die  $a_{ik}$  brauchen also jetzt nicht mehr ganze Größen zu sein, es können irgendwelche Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers – z. B. irgendwelche rationale Zahlen – oder beliebige Funktionen einer oder mehrerer Variablen, u.s.w., sein. Dieses System von  $n^2$  Elementen fassen wir mit Frobenius im Bilde einer bilinearen Form*

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

*zusammen, deren Koeffizientensystem eben jenes System der  $a_{ik}$  vorstellt, deren Determinante also mit der Determinante*

$$|a_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

*identisch ist.*

([M2], s. 20)

Muthovu knihu ocenil v obširné recenzi anglický matematik Thomas John P'Anson Bromwich (1875–1929), který zařadil Muthovu knihu do širokého odborně historického kontextu (Cauchy, Jacobi, Sylvester, Cayley, Weierstrass, Lagrange, Laplace, Kronecker, Hermite, Hamilton, Grassmann, Gibbs, Whitehead, Frobenius, Taber, Buchheim atd.). Mimo jiné napsal:

*The work under review covers an important subdivision of general invariant theory, a branch which deserves to be more widely known than it is. No doubt the cause of this neglect has been the lack of a text book, and Dr. Muth's monograph will help to remedy the defect. ...*

*Dr. Muth's book is the first published account of the theories which we have sketched above; our thanks are due to the author for having collected so many useful results into one convenient volume.*

*... I may say that Dr. Muth's book is of great interest and very useful in extending one's knowledge of certain branches of the subject. I hope that it may induce other readers to take up this part of invariant theory, which is important on account of its applications as well as for its intrinsic interest.<sup>11</sup>*

<sup>10</sup> Jeden odkaz je na článek českého matematika Eduarda Weyra, který byl otištěn roku 1890 ve vídeňském časopise Monatshefte für Mathematik und Physik.

<sup>11</sup> T. J. P.A. Bromwich: *Muth's Elementartheiler*, Bulletin of the American Mathematical Society 7(1901), č. 7, s. 308–316, citáty viz s. 308, 313, 316.

### 3. Maticová řeč – přelom 19. a 20. století

Pozoruhodné je, jak dlouho trvalo přijetí maticové řeči. Britská a americká matematická komunita ji částečně akceptovala již během druhé poloviny 19. století, patrně pod vlivem Cayleyho a Sylvestera, kteří s maticemi pracovali již ve čtyřicátých a padesátých letech. Ovlivnění byli zejména Cayleovou prací *A Memoir on the Theory of Matrices* z roku 1858.

V poslední čtvrtině 19. století teorie matic ještě bojovala o existenci, maticovou řeč užívalo pouze několik matematiků.<sup>12</sup> Teprve v samém závěru 19. století začali o maticích psát další matematici.<sup>13</sup> Koncem století publikoval skotský matematik Thomas Muir ve stati *List of Writings on the Theory of Matrices (1857–1893)* [Mui] přehled padesáti prací třinácti autorů, které byly věnovány maticím.

#### Eduard Weyr

Matematici kontinentální Evropy maticovou řeč přijímali pozvolna až na přelomu 19. a 20. století. Výraznou výjimkou byl český matematik Eduard Weyr,<sup>14</sup> který s maticemi pracoval již v polovině osmdesátých let. Roku 1885 publikoval v časopisu *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* dvě krátké práce, v nichž velmi stručně prezentoval svoji teorii *charakteristických čísel a typických matic*, která se svým přístupem odlišuje od klasické teorie Jordanova kanonického tvaru. Soubor vlastních čísel matice a k nim příslušných Weyrových charakteristických čísel je úplným systémem invariantů podobnosti, dnes se nazývá *Weyrova charakteristika*.<sup>15</sup>

Výklad Weyrovy teorie následně podali William Henry Metzler roku 1892 v práci *On the Roots of Matrices* z roku 1892, Kurt Hensel (1861–1941) v práci *Theorie der Körper von Matrizen* z roku 1904 a Julius Wellstein (1888–1978)

---

<sup>12</sup> Kromě Cayleyho a Sylvestera to byli hlavně britští matematici William Kingdon Clifford (1845–1879), Arthur Buchheim, Andrew Russell Forsyth, Thomas John l'Anson Bromwich (1875–1929), americký matematik Henry Taber (1860–1936), skotský matematik Thomas Muir (1844–1933), japonský matematik A. Kumamoto a francouzský matematik Georges Edouard Auguste Brunel (1856–1900).

<sup>13</sup> Byli to zejména T. B. van Wettum, L. van Elfrinkhof, J. Brill, L. Ravut, J. B. Shaw, Theodor (Fjodor Eduardovič) Molien (1861–1941) a William Henry Metzler (1863–1943).

<sup>14</sup> Eduard Weyr (1852–1903), český matematik. Studoval na pražské technice, roku 1873 získal doktorát na univerzitě v Göttingenu, v roce 1873/1874 byl na studijním pobytu v Paříži. Roku 1876 se stal mimořádným a roku 1881 řádným profesorem pražské techniky. Od roku 1891 působil rovněž na České univerzitě v Praze. Věnoval se hlavně geometrii, bilineárním formám a maticím.

O životě a díle Eduarda Weyra viz [Be1].

<sup>15</sup> Weyrova teorie charakteristických čísel je moderním způsobem podrobně vyložena v 19. paragrafu učebnice *Lineární algebra* [Be2] z roku 2000 (s. 265–281). O Weyrových výsledcích týkajících se matic se lze dočíst v kapitolách *Eduard Weyr, lineární algebra a teorie hyperkomplexních čísel* a *Weyrova teorie charakteristických čísel* knihy *Eduard Weyr (1852–1903)* [Be1] (viz s. 91–119, 121–127). Viz též [Sh] a [Š].

v práci *Über symmetrische, alternierende und orthogonale Normalform von Matrizen* z roku 1930.

Roku 1887 publikoval Eduard Weyr článek *O binárných maticích* (40 stran), v němž pro české čtenáře teorii matic popularizoval. O dva roky později vydal spis *O teorii forem bilineárných*, v jehož úvodu zdůraznil svůj alternativní přístup ke kanonickým tvarům matic těmito slovy:

*Předním účelem tohoto spisu jest uvedení nové pomůcky do theorie bilineárných forem, t. theorie soustav, hlavně normalných soustav příslušných dané matici. ... nová metoda stačila m. j. na úplné řešení základního problému současné transformace dvou bilineárných forem pro případ Weierstrassem řešení.* (s. 5)

Roku 1890 publikoval německou verzi tohoto spisu pod názvem *Zur Theorie der bilinearen Formen* v časopisu *Monatshefte für Mathematik und Physik*.

### Georg Frobenius

Georg Frobenius publikoval řadu prací s maticovou problematikou v řeči bilineárních a kvadratických forem, maticovou řeč začal užívat až od roku 1896, a to v pracích *Über vertauschbare Matrizen* [Fr1] a *Über Gruppencharaktere* [Fr2]. Uvedme z nich dva krátké úryvky, které tento fakt dokumentují:

*Ich werde mich daher hier der symbolischen Bezeichnung für die Zusammensetzung der Matrizen (Formen) bedienen, die ich in meiner ... Arbeit Über lineare Substitutionen und bilineare Formen ... auseinandergesetzt habe.*

([Fr1], Abhandl. II., s. 705)

*Mit Hülfe der Sätze über die Matrizen (linearen Systeme), die ich in meiner Arbeit Über lineare Substitutionen und bilineare Formen ... entwickelt habe, ...*

([Fr2], Abhandl. III., s. 18)

Následovaly další Frobeniovy práce, které byly rovněž psány „maticově“. Jeho publikace věnované maticím s kladnými či nezápornými prvky – *Über Matrizen aus positiven Elementen* a *Über Matrizen aus positiven Elementen II* z let 1908 a 1909, resp. *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen* z roku 1912<sup>16</sup> – jsou velmi významné. Zmíněná Frobeniova práce z roku 1912 spolu se statí Oskara Perrona *Zur Theorie der Matrices* [Pe1] se stala základem tzv. Perronovy-Frobeniovy teorie (o vlastních číslech matic s nezápornými prvky), která je využívána v řadě aplikací.

Na Frobeniovy výsledky navazovala v následujících letech a desetiletích řada matematiků. Byl to právě Frobenius, který na přelomu 19. a 20. století podstatně přispěl nejen k rozvoji maticové problematiky, ale i k rozšíření a všeobecnému přijetí maticové řeči. O Frobeniovi a teorii matic viz [Ha5].

<sup>16</sup> G. Frobenius: *Gesammelte Abhandlungen III.*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1968, s. 404–409, 410–414, 546–567.



## Matematické encyklopedie

Zajímavý obraz o postavení matic v matematice na přelomu 19. a 20. století poskytují německá matematická encyklopedie a francouzská matematická encyklopedie. Byly s velkým úsilím vytvářeny od konce 19. století až do třicátých let 20. století. Snažily se poskytnout co nejúplnější obraz o jednotlivých matematických disciplínách.

Rozsáhlá německá *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* [EMW] vycházela v letech 1898 až 1935. S pojmem matice se v ní nesetkáváme příliš často, určité výjimky představují následující statě.

- Článek *Kombinatorik* (svazek I.1, 1898), který sepsal Eugen Netto, se o maticích zmínil v partii věnované determinantům jen na 14 řádcích (s. 45–46).
- Rozsáhlý článek *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen* (svazek I.1, 1898), jehož autorem je Eduard Study (1862–1930), sice dal čtvercové matice do vzájemně jednoznačného vztahu s lineárními transformacemi a bilineárními formami v partii nazvané *Specielle Systeme mit  $n^2$  Einheiten. Bilineare Formen* (s. 168–171), ale příliš s nimi nepracoval.
- Článek *Rationale Funktionen mehrerer Veränderlichen* (svazek I.1, 1899), který sepsal Eugen Netto, uvedl v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic tzv. hodnot systému, ale o maticích se nezmínil:  
*Liegen die  $pq$  Grössen  $a_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q$ ) vor, so heisst das System der  $a_{ik}$  vom Range  $r$ , wenn  $r$  die grösste Zahl ist, für welche nicht alle aus  $r$  Zeilen und  $r$  Spalten der  $a_{ik}$  gebildeten Determinanten verschwinden.* (s. 269)
- V článku *Invariantentheorie* (svazek I.1, 1899) od Friedricha Wilhelma Franze Meyera (1856–1934) se s pojmem matice téměř nesetkáme; zmíněn je však Cayleyův maticový přístup z roku 1855 (s. 329, 361).
- Ve stati *Arithmetische Theorie der Formen* (svazek I.2, 1900) definoval Karl Theodor Vahlen (1869–1945) hodnot systému koeficientů lineárních forem, ale termín matice se tu opět neobjevil (s. 582–583).
- V rozsáhlém článku *Systeme geometrischer Analyse* (svazek III.1.2, 1916–1923) Hermanna Rothe (1882–1923), Alfreda Lotze (1882–1964) a Christiana Betsche (1888–1934), který se týká barycentrického počtu, metody ekvipolencí, kvaternionů a jejich zobecnění a Grassmannovy teorie, se s maticemi okrajově setkáme.

Po německé encyklopedii následovala francouzská *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* [ESM]. Vycházela v letech 1904 až 1916, využila z větší či menší části některé statě z encyklopedie německé. S maticemi se v ní však nesetkáváme častěji než v encyklopedii německé.

- Článek *Analyse combinatoire et théorie des déterminants* (svazek I.1, 1904) je přepracovaným a rozšířeným překladem Nettovy stati z encyklopedie německé. Jeho autorem je Henri Gustave Vogt (1864–1927). O maticích se v něm okrajově hovoří v paragrafech *Relations entre les mineurs d'un déterminant ou d'une matrice. Généralisations* (s. 103–106), *Rang d'un déterminant ou d'une matrice. Déterminants bordés* (s. 107–108).
- Článek *Les fonctions rationnelles* (svazek I.2, 1907) je přepracovaným a rozšířeným překladem druhé Nettovy stati z německé encyklopedie. Jeho autor Raymond Le Vavasasseur (1862–1930) se o hodnoti matice nesměle zmiňuje v paragrafu *Équations linéaires homogènes* (s. 36–38), jinak s maticemi prakticky nepracuje.
- Stať *Theorie des formes et des invariants* (svazek I.2, 1907–1912) je přepracovaným článkem F. W. F. Meyera z německé matematické encyklopedie. Jeho autorem je Jules Joseph Drach (1871–1949). Prezentuje sice řadu témat z teorie forem, ale nikoli v maticové řeči.
- Článek *Théorie arithmétique des formes* (svazek I.3, 1906), který napsali Theodor Vahlen a Eugène Cahen (1865–1941), informoval o maticích pouze v souvislosti se soustavami lineárních rovnic – zmíněna je hodnota matice a řešitelnost nehomogenní soustavy lineárních rovnic (s. 80–82).

K německé a francouzské matematické encyklopedii lze přiřadit rozsahem podstatně menší, dvousvazkovou knihu Ernesta Pascala nazvanou *Repertorio di matematiche superiori (Definizioni – Formole – Teoremi – Cenni bibliografici)* [P2] z let 1898 a 1900. Jak už bylo dříve uvedeno, o maticích se v ní příliš nedozvíme.

Německá verze Pascalova kompendia, výrazně rozšířená, vyšla pod názvem *Repertorium der höheren Mathematik* [P3] v letech 1900 a 1902. Její druhé, přepracované a opět rozšířené vydání z let 1910 až 1929 má již pět svazků. V prvním svazku tohoto kompendia s podtitulkem *Algebra, Differential- und Integralrechnung* je o maticích pojednáno v druhé kapitole *Kombinatorik, Determinanten und Matrices* (s. 43–167), kterou zpracoval Alfred Loewy (1873–1935). S pojmy čtvercová, resp. obdélníková matice a hodnota matice se čtenář setká již v druhém paragrafu této kapitoly nazvaném *Historisches und Allgemeines über Determinanten*. Další poznatky o maticích jsou v šestém paragrafu nazvaném *Das Rechnen mit Matrices. Zusammenhang zwischen Matrices, linearen Substitutionen und bilinearen Formen*. Mimo jiné je zde rozvíjen vztah mezi hodnotami matice a lineární závislostí řádků, resp. sloupců. Matice jsou zde již provázány s teorií bilineárních a kvadratických forem a jejich transformacemi, s otázkami kanonických tvarů, s teorií elementárních dělitelů, s ortogonálními substitucemi atd. Celý text je na mnoha místech doplněn řadou bibliografických informací. Navíc se matice okrajově objevují i na stranách 403–405 v páté kapitole nazvané *Invariantentheorie* (s. 358–420), kterou sepsal Heinrich Emil Timerding (1873–1945).

## Přijetí matic a maticové řeči a symboliky

V prvních desetiletích 20. století se matice postupně dostaly do povědomí matematiků a fyziků, maticová řeč se úspěšně šířila a byla stále více využívána a uznávána. Důležité výsledky teorie bilineárních a kvadratických forem byly počátkem 20. století postupně překládány do maticové řeči (problematika kanonických tvarů, výsledky týkající se vlastních čísel a vlastních vektorů, spektrální teorie matic). Současně byly v maticové řeči stále častěji vyjadřovány substitute a transformace. Matice pronikaly jako důležitý aparát do dalších matematických disciplin, a tím i do univerzitních kurzů základů matematiky a do učebnic. Ve třicátých letech se staly předmětem samostatných monografií.

Cenné informace o vývoji teorie matic v první třetině 20. století získáme z druhého bibliografického přehledu *The Literature of Cayleyan Matrices* [Mu2] Thomase Muira a zejména z monografií, které počátkem třicátých let vydali Cyrus Colton MacDuffee a Joseph Henry Maclagan Wedderburn – *Theory of Matrices* [MD1], *Lectures on Matrices* [Wed].

Velmi zajímavé je, jak dlouho trvalo, než se ustálila definice násobení matic (násobení řádků první matice se sloupci druhé matice). Je pravděpodobné, že k tomuto „zdržení“ přispělo dlouhotrvající sepětí již etablované teorie determinantů s rodičí se teorií matic, zejména věta o násobení determinantů, kdy nezáleží na tom, zda násobíme řádky s řádky či sloupci apod., neboť determinanty navzájem transponovaných matic se rovnají. Teprve hlubší pochopení maticové reprezentace bilineárních a kvadratických forem a maticový popis lineárních transformací těchto forem a jejich skládání, přispělo k ukončení nejasností souvisejících se zavedením maticového násobení.

Ve 20. století se teorie matic začala bouřlivě vyvíjet, jedním z velkých témat byla problematika různých speciálních typů matic. Významné jsou v tomto směru např. Frobeniovy práce o maticích s kladnými či nezápornými prvky (viz například Perronova-Frobeniova věta). Obrovskou roli hrají matice v teorii algeber, v teorii reprezentací apod.

Zakončeme tento paragraf slovy Thomase W. Hawkinse Jr. (nar. 1938) z jeho dlouhé a zasvěcené stati *Weierstrass and the Theory of Matrices* [Ha4] z roku 1977:

*Although the origins of the theory of matrices can be traced back to the 18<sup>th</sup> century and although it was not until the 20<sup>th</sup> century that it was absorbed into the mainstream of mathematics, it was a creation of the 19<sup>th</sup> century. During that fertile epoch in the history of mathematics, basic theorems on matrix similarity, congruence and equivalence were established and canonical matrix forms introduced. The properties of the characteristic roots of various types of matrices (symmetric, Hermitean, orthogonal, unitary, etc.) were also discovered.*

([Ha4], s. 155)

#### 4. Učebnice a monografie – první tři desetiletí 20. století

První učebnice a monografie, v nichž hrají matice nezanedbatelnou roli, byly sepisovány až v prvních třech desetiletích 20. století. V té době již matice zvolna pronikaly do základních matematických kurzů na vysokých školách.

V následujících odstavcích se pokusíme ukázat, jaké místo v té době matice zaujímaly v matematické knižní literatuře, tj. v učebních textech a monografiích.

##### Leopold Kronecker

Roku 1903 byl vydán – jako součást většího celku univerzitních přednášek Leopolda Kroneckera<sup>17</sup> – text *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten* [Kr]. Sepsán byl na základě jeho učitelského působení v letech 1883 až 1891, k tisku jej připravil Kurt Hensel.<sup>18</sup>

Předposlední, 20. přednáška je věnována základům teorie matic, závěrečná přednáška problematice maticových ekvivalencí (celkem 42 stran). Matice se však okrajově vyskytují již v předchozích přednáškách. Zařazení tohoto tématu zdůvodnil Kronecker takto:<sup>19</sup>

*... wollen wir jetzt Vorschriften für das Rechnen mit Systemen oder Matrizen aufstellen ... die Betrachtung der Matrizen nichts anderes ist als eine Erweiterung der elementaren Arithmetik.*

([Kr], s. 348)

---

<sup>17</sup> Leopold Kronecker (1823–1891), německý matematik. Kroneckerův zájem o matematiku probudil jeho gymnaziální profesor Ernst Eduard Kummer (1810–1893). Po studiu na berlínské univerzitě (1841–1845), kde byli mezi jeho učiteli Johan Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) a Jakob Steiner (1796–1863), studoval Kronecker krátce v Bonnu a Vratislavi (Breslau, Wrocław), poté se zhruba deset let věnoval obchodním aktivitám. V padesátých letech napsal řadu uznávaných prací, roku 1861 se stal členem berlínské akademie a získal právo přednášet na berlínské univerzitě, na níž od roku 1855 působil Kummer. Po jeho penzionování roku 1883 byl Kronecker jmenován na uvolněné profesorské místo. Věnoval se algebře a teorii čísel, ale i analýze a teorii funkcí. Reprezentoval tzv. finitismus, z něhož vyrostl intuicionismus. Byl velkým odpůrcem Georga Cantora (1845–1918) a jeho teorie množin.

Viz H. Weber: *Leopold Kronecker*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 2(1893), s. 5–31, H. Rohrbach: *Kronecker, Leopold*, Neue Deutsche Biographie, Band 13, Duncker & Humblot, Berlin, 1982, s. 82–83, K.-R. Biermann: *Kronecker, Leopold*, in [Gi]-VII, s. 505–509.

<sup>18</sup> Kurt Wilhelm Sebastian Hensel (1861–1941), německý matematik. Pocházel z Královce, studoval v Berlíně a v Bonnu, k jeho učitelům patřili Kronecker a Weierstrass. V letech 1901 až 1930 pracoval na univerzitě v Marburgu. Věnoval se teorii čísel, zejména algebraickým číslům, zavedl  $p$ -adická čísla. Sepsal monografie o teorii čísel, editoval pět svazků Kroneckerových prací a některé cykly jeho přednášek, editoval též přednášky svého učitele Gustava Roberta Kirchhoffa (1824–1887).

H. Hasse: *Kurt Hensel zum Gedächtnis*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 187(1949), s. 1–13.

<sup>19</sup> Poznamenejme, že Kronecker častěji hovořil o „systémech“.

Kronecker prezentoval základní fakta o operacích s maticemi a jejich vlastnostech, o invertování (resp. „dělení“ matic), o hodnotě matice, záměnných maticích atd. Pozornost rovněž věnoval maticím, jejichž prvky jsou racionální funkce. Uvedme dva příklady Kroneckerova pojetí a jeho terminologie:

*Sind also  $B$  und  $A$  vertauschbare Systeme, und ist  $|A| \neq 0$ , so gibt es ein und nur ein System  $\frac{B}{A}$ , für welches die beiden Gleichungen*

$$A \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{A} \cdot A = B$$

*erfüllt sind. ...*

*Ist ein System von nicht verschwindender Determinante aus mehreren Faktoren zusammengesetzt, so ist das reziproke System aus den reziproken Systemen der Faktoren, aber in der umgekehrten Reihenfolge zusammengesetzt.*

([Kr], s. 355, 360)

### Gustav Bauer

V rozsáhlé učebnici Gustava Bauera<sup>20</sup> z roku 1903, která se jmenuje *Vorlesungen über Algebra* [Ba], se matice vyskytují jen zcela okrajově; objevují se až v kapitole o determinantech v souvislosti s problematikou soustav lineárních rovnic. Nejprve je uvedeno obdélníkové schéma  $n(n+1)$  prvků, za nímž následuje tento text:

*Eine solche Anordnung von Elementen in Horizontal- und Vertikalreihen nennt man eine Matrix. Hier besteht dieselbe aus  $n$  Horizontal- und  $n+1$  Vertikalreihen. Aus dieser Matrix lassen sich durch Weglassung je einer Vertikalreihe  $n$  Determinanten  $n^{\text{ter}}$  Ordnung bilden ...*

([Ba], s. 280)

Pojem hodnoty není zaveden pro matice, ale pro determinanty a pro kvadratické formy (s. 338–339). Matice se vyskytují pouze jako schémata, z nichž jsou tvořeny determinanty (např. s. 283, 285, 314–318), při násobení determinantů se násobí navzájem řádky odpovídajících matic (s. 294).

---

<sup>20</sup> Gustav Conrad Bauer (1820–1906), německý matematik. Studoval na polytechnice v Augsburgu, na univerzitách v Erlangenu a v Berlíně, roku 1842 promoval v Erlangenu. V následujícím roce byl v Paříži, kde ho ovlivnil Joseph Liouville (1809–1882). V letech 1845 až 1853 byl soukromým učitelem-vychovatel, roku 1847 strávil tři měsíce v Erlangenu. Od roku 1857 působil na univerzitě v Mnichově, nejprve jako soukromý docent, od roku 1865, resp. 1869 jako mimořádný, resp. řádný profesor matematiky. Věnoval se zejména algebře, geometrii, sférickým harmonickým funkcím, gama funkci a problematice řetězových zlomků. Viz A. Voss: *Zur Erinnerung an Gustav Bauer*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 16(1907), s. 54–75, C. von Voit: *Gustav Bauer*, Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München 37(1907), s. 249–257, G. Faber: *Bauer, Gustav*, Neue Deutsche Biographie, Band 1, Duncker & Humblot, Berlin, 1953, s. 638–639.

V učebnici [Ba] z roku 1903 je pěkná Bauerova fotografie.

## Eugen Netto

V učebním textu *Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semestr* [Ne2] z roku 1904, jehož autorem je Eugen Netto, se s pojmem matice setkáváme již v 11. paragrafu (matice  $2 \times m$ , z níž se tvoří determinanty druhého řádu). V kapitole o determinantech nacházíme matice typu  $m \times n$ , pomocí subdeterminantů je zaveden pojem hodnost matice. Matice jsou užívány v partii o soustavách lineárních rovnic.

V Nettově knížce *Gruppen- und Substitutionentheorie* [Ne3] z roku 1908 se matice nevyskytují. V jeho knize *Die Determinanten* [Ne4] z roku 1910 je matice věnována krátká kapitola *Matrizen, Rang einer Matrix, Rang einer Determinante, Matrizen mit gleichem Range, Komposition von Matrizen* (s. 58–63).

V jeho učebnici *Algebra* [Ne5] z roku 1915 je exaktní definice obdélníkové matice již na 18. straně (s odkazem na Cayleyovu práci *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* z roku 1855, v níž matice zavedl):

*Unter einer Matrix von  $m \cdot n$  Elementen  $x_{ik}$  verstehen wir ein in Form eines Rechtecks angeordnetes Elementensystem von  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten*

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} = (x_{ik}) \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

([Ne5], s. 18)

Následuje definice hodnosti matice (pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů) s odkazem na Frobeniovu práci *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* z roku 1879.<sup>21</sup> Stále však převládá terminologie teorie determinantů. Ještě před definicí matice je ukázána nekomutativita maticového násobení a komentována z dnešního hlediska nepochopitelným způsobem, neboť jsou směřovány pojmy matice a determinant i jejich symbolika.

*Man überzeuge sich leicht davon, daß im allgemeinen*

$$|x_{ik}| \cdot |\xi_{ik}| \neq |\xi_{ik}| \cdot |x_{ik}|$$

*hinsichtlich der Form der Produktdeterminante ist, während natürlich der numerische Wert beider Seiten der gleiche ist. Für die Produktbildung von Determinanten ist also das Kommutationsgesetz nicht gültig.*

([Ne5], s. 18)

S maticemi se v této knize setkáváme ještě v souvislosti s řešitelností soustavy lineárních rovnic (s. 79–99).

<sup>21</sup> Journal für die reine und angewandte Mathematik 86(1879), s. 146–208, též in *Gesammelte Abhandlungen I.*, s. 482–544.

## Salvatore Pincherle

Ve dvojdílném učebním textu *Lezioni di algebra complementare* [Pi] z let 1906 a 1909 zavedl Salvatore Pincherle<sup>22</sup> v partii o determinantech nejprve pojem matice, a teprve potom definoval determinant. Zajímavé je, že ještě roku 1926 jsou ve třetím vydání jeho učebního textu zavedeny čtyři druhy násobení matic – *moltiplicazione per linee, per colonne* atd. Hodnota matice (*caratteristica, rango*) je zavedena pomocí subdeterminantů.

*Lo specchio così formato da questi mn numeri, in cui è pertanto essenziale l'ordine dei numeri stessi, si dice matrice. ...*

*... il quale viene chiamato determinante corrispondente alla matrice.*

*... dati due determinanti di uguale ordine, il loro prodotto si può fare indifferente per linee o per colonne, e poichè è lecito ... mutare le linee in collone, al determinante prodotto si possono dare quattro forme diverse. ...*

*Con caratteristica s'intende l'ordine del determinante non nullo di ordine massimo che si possa estrarre dalla matrice.*

([Pi], díl II., s. 48–49, 76, 92)

## Maxime Bôcher

Velkou pozornost maticím věnuje učebnice *Introduction to Higher Algebra* [Bô] z roku 1907, kterou sepsal Maxime Bôcher.<sup>23</sup> Byla velmi úspěšná, její další vydání či reprinty vycházejí dodnes. Roku 1910 (a též r. 1925, 1932)

---

<sup>22</sup> Salvatore Pincherle (1853–1936), italský matematik. V letech 1869 až 1874 studoval na univerzitě v Pise, kde byli jeho učiteli Enrico Betti (1823–1892) a Ulisse Dini (1845–1918), ve školním roce 1877/1878 poslouchal v Berlíně přednášky Kummera, Kroneckera a Weierstrasse. Po krátkém působení na univerzitě v Palermu přednášel v letech 1880 až 1928 na univerzitě v Bologni. Je jedním z tvůrců funkcionální analýzy, autorem řady prací a několika knih. Roku 1922 založil italskou matematickou společnost (Unione matematica italiana) a její časopis *Bollettino dell'Unione matematica italiana*. V letech 1924 až 1936 byl prezidentem Mezinárodní matematické unie, roku 1928 předsedal osmému mezinárodnímu kongresu matematiků v Bologni.

Viz L. Berzolari: *Salvatore Pincherle*, *Bollettino dell'Unione matematica italiana* 15(1936), s. 149–152, E. Bortolotti: *Salvatore Pincherle*, *ibid.*, 16(1937), s. 37–60, L. Tonelli: *Salvatore Pincherle*, *Annali della Scuola normale superiore di Pisa, Classe di scienze, Série 2*, 6(1937), č. 1, s. 1–10, U. Amaldi: *Salvatore Pincherle*, *Annali di matematica pura ed applicata* 17(1938), s. 1–21, A. Natucci: *Nel primo centenario della nascita di Salvatore Pincherle*, *Giornale di matematiche* 82(1954), s. 335–342, F. G. Tricomi: *Pincherle, Salvatore*, in [Gi]-X, s. 610.

<sup>23</sup> Maxime Bôcher (1867–1918), americký matematik. V letech 1883 až 1888 studoval na Harvardu (University of Cambridge), kde byl žákem Benjamina Peirceho (1809–1880), v letech 1888 až 1891 byl v Göttingenu, kde navštěvoval přednášky Felixe Kleina (1849–1925) a Hermanna Amanduse Schwarze (1843–1921). Pak se vrátil na Harvard, kde působil nejprve jako instruktor, od roku 1904 jako profesor. Věnoval se matematické analýze, teorii potenciálu, teorii funkcí, diferenciálním a integrálním rovnicím, harmonickým funkcím, trigonometrickým řadám, diferenciálním operátorům a matematické fyzice, ale rovněž algebře a geometrii. Je autorem řady prací a několika oblíbených učebních textů, elementárních i pokročilých. Byl členem American Mathematical Society (viceprezidentem

vyšla německy v překladu Hanse Becka pod názvem *Einführung in die höhere Algebra*, roku 1933 vyšla rusky jako *Vvedenie v vysšuju algebru*.

Podstatnou část Bôcherovy učebnice tvoří – z dnešního pohledu – lineární algebra, velká pozornost je věnována maticím, které prostupují celým textem. Druhá kapitola *A Few Properties of Determinants*, začíná vysvětlením pojmu matice a jeho exaktní definicí. Z této pasáže je vidět, že pojem determinantu byl tehdy zcela běžný, zatímco pojem matice bylo třeba podrobně objasnit.

*We assume that the reader is familiar with the determinant notation, and will merely recall to him that by a determinant of the  $n$ th order*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*we understand a certain homogeneous polynomial of the  $n$ th degree in the  $n^2$  elements  $a_{ij}$ . By the side of these determinants it is often desirable to consider the system of the  $n^2$  elements arranged in the order in which they stand in the determinant, but not combined into a polynomial. Such a square array of  $n^2$  elements we speak of as a matrix. In fact, we will lay down the following somewhat more general definition of this term:*

DEFINITION 1. *A system of  $mn$  quantities arranged in a rectangular array of  $m$  rows and  $n$  columns is called a matrix. If  $m = n$ , we say that we have a square matrix of order  $n$ .* ([Bô], s. 20–21)

Bôcher zdůraznil rozdíl mezi maticí a determinantem a objasnil, jak se na matice dívat. Čtenáře odkázal na 21. paragraf své knihy, kde jsou již matice chápány jako nové objekty, které jsou hodny samostatné existence.

*Even when a matrix is square, it must be carefully noticed that it is not a determinant. In fact, a matrix is not a quantity at all, but a system of quantities. ...*

---

1902, prezidentem 1909/1910) a několika odborných společností (American Philosophical Society, American Academy of Arts and Sciences, National Academy of Sciences). Výrazně přispěl k rozvoji americké matematiky. Dlouhou dobu byl editorem prestižního časopisu *Annals of Mathematics*, podílel se na založení časopisu *Transactions of the American Mathematical Society* (1910). Od roku 1923 uděluje na jeho počest Americká matematická společnost Bôcherovu cenu (Bôcher Memorial Prize).

Viz W. F. Osgood: *The Life and Services of Maxime Bôcher*, Bulletin of the American Mathematical Society 25(1919), s. 337–350, G. D. Birkhoff: *The Scientific Work of Maxime Bôcher*, *ibid.*, 25(1919), s. 197–215 [reprint in P. L. Duren, R. A. Askey, U. C. Merzbach (eds.): *A Century of Mathematics in America*, Part II., AMS, Providence, RI, 1989, x+585 stran, s. 59–78], W. F. Osgood: *Maxime Bôcher*, *ibid.*, 35(1929), s. 205–217, C. Eisele: *Bôcher, Maxime*, in [Gi]-II, s. 217–218.



*A matrix of  $m$  rows and  $n$  columns being merely a set of  $mn$  quantities ... arranged in a definite order, is, ... a complex quantity with  $mn$  components; and it is only a special application of the theory of complex quantities ...*

([Bô], s. 21, 61)

Bôcherova kniha se věnuje lineární závislosti, soustavám lineárních rovnic, lineárním transformacím a jejich maticovému vyjádření, invariantům, lineárním, bilineárním a kvadratickým formám, teorii ekvivalencí forem, kanonickým tvarům atd. Nacházíme zde klasickou definici hodnoty matice i nutnou a postačující podmínku řešitelnosti soustavy lineárních rovnic:

**DEFINITION 3.** *A matrix is said to be of rank  $r$  if it contains at least one  $r$ -rowed determinant which is not zero, while all determinants of order higher than  $r$  which the matrix may contain are zero.*

*A matrix is said to be of rank 0 if all its elements are zero.*

**THEOREM 1.** *A necessary and sufficient condition for a system of linear equations to be consistent is that the matrix of the system have the same rank as the augmented matrix.*

([Bô], s. 22, 46)

Bôcherova kniha, v níž se s maticemi v řadě kapitol soustavně pracuje, sehrála při šíření teorie matic velmi důležitou roli a podstatnou měrou přispěla k jejímu všestrannému uznání.

### Cuthbert Edmund Cullis

Rozsáhlá třídílná monografie *Matrices and Determinoids* [Cu] Cuthberta Edmunda Cullise<sup>24</sup> je patrně první knihou, která má slovo *matice* ve svém názvu. Jednotlivé díly vycházely postupně v letech 1913 (xii+430 stran), 1918 (xxiv+555 stran) a 1925 (xviii+681 stran), druhá část třetího dílu zůstala v rukopise. Cullis toto rozsáhlé dílo sepsal na základě svých přednášek, které měl na univerzitě v Kalkatě. Podrobně shrnul celou teorii matic a determinantů, a to od výsledků Cayleyových a Sylvesterových až po práce Frobeniovy. Navíc rozšířil teorii determinantů na obdélníkové matice.

Cullisovu monografii v letech 1920 a 1927 podrobně recenzoval James Byrnie Shaw (1866–1948). Ve své první recenzi diskutoval mimo jiné chápání pojmu matice:<sup>25</sup>

*Further it should be noticed that a matrix of  $m$  long rows and  $n$  short rows is as much an assemblage of  $m$  vectors in an  $n$ -dimensional space, or of  $n$  vectors*

<sup>24</sup> Cuthbert Edmund Cullis (?–1954), britský matematik. Studoval v Anglii (Caius College, Cambridge), v Jeně a v Berlíně, kde byl v kontaktu s Frobeniem. Od roku 1910 působil na univerzitě v Kalkatě. K jeho odborným zájmům patřily zejména matice. H. W. Turnbull: *Cuthbert Edmund Cullis*, *Journal of the London Mathematical Society* 30(1955), s. 252–255.

<sup>25</sup> Viz *Bulletin of the American Mathematical Society* 26(1920), s. 224–233, 33(1927), s. 618–621. Následující citáty jsou ze stran 225–226 a 233.

*in an  $m$ -dimensional space, as it is of  $mn$ -elements. A matrix may be looked upon as a linear homogeneous substitution, which converts certain variables into others, or it may be considered as a linear vector operator which converts all vectors from the origin into others from the origin, or it may be considered as a dyadic, the sum of several dyads, – all useful definitions and yielding very important results. As a linear vector operator the particular elements entering the matrix are not of so much importance as other features of the matrix. ...*

*The treatment is quite detailed, with numerous numerical examples, rather loose in its development, and lacking in synthesis, so that the reader becomes bewildered with the multitudinous formulas and other details. A synopsis of it would be useful.*

Cullisovo rozsáhlé dílo o maticích velký ohlas nemělo. Anglický matematik Herbert Westren Turnbull však vzpomínal, že do vydání Cullisovy monografie neměl o maticích hlubší znalosti, že v té době ještě nebyl význam maticového počtu dostatečně rozpoznán.<sup>26</sup> Poznamenal rovněž, že Cullis užíval terminologii, která nebyla jednoduchá a ztěžovala proto přístupnost tématu.

### Leonard Eugene Dickson

Roku 1923 vydal Leonard Eugene Dickson<sup>27</sup> monografii *Algebras and their Arithmetics* [D1], která vyšla roku 1927 v německém přepracování Johanna Jakoba Burckhardta (1903–2006) a Emila Schubartha (1902–1978) pod názvem *Algebren und ihre Zahlentheorie*.<sup>28</sup> S maticemi se v ní setkáváme již ve 3. paragrafu *Matrices* (s. 5–9), jejich zavedení je motivováno prací s lineárními transformacemi (charakteristická matice, charakteristický a minimální polynom, vlastní čísla apod.). Matice a maticové algebry hrají v této knize významnou roli.

<sup>26</sup> Viz výše uvedený Turnbullův článek *Cuthbert Edmund Cullis*.

<sup>27</sup> Leonard Eugene Dickson (1874–1954), americký matematik. Studoval na univerzitách v Texasu, doktorát získal v Chicagu roku 1896, poté rozšiřoval své znalosti na studijních pobytech v Lipsku a Paříži. Od roku 1900 působil v Chicagu, kde se po deseti letech stal řádným profesorem. V roce 1917/1918 byl prezidentem Americké matematické společnosti. Byl velkým specialistou na teorii čísel a algebru, zabýval se však i algebraickou geometrií a teorií invariantů. Je autorem velké řady prací a knih z teorie čísel, algebry a lineární algebry. Slavná a stále široce využívaná je jeho třídílná monografie *History of the Theory of Numbers* z let 1919, 1920, 1923. Abraham Adrian Albert vydal roku 1975 Dicksonovy *The Collected Mathematical Papers* (Chelsea, Bronx, New York, 1975, xvii+680+766+580+636+644 stran). Viz A. A. Albert: *Leonard Eugene Dickson. 1874–1954*, Bulletin of the American Mathematical Society 61(1955), s. 331–345, D. D. Fenster: *Leonard Eugene Dickson and His Work in the Arithmetics of Algebras*, Archive for History of Exact Sciences 52(1998), s. 119–159, D. D. Fenster: *Leonard Eugene Dickson (1874–1954): An American Legacy in Mathematics*, The Mathematical Intelligencer 21(1999), č. 4, s. 54–59, D. Dumbaugh, A. Shell-Gellasch: *The „Wide“ Influence of Leonard Eugene Dickson*, Notices of the American Mathematical Society 64(2017), s. 772–776, D. D. Fenster: *Research in Algebra at the University of Chicago: Leonard Eugene Dickson and A. Adrian Albert*, in [GP], s. 179–197, R. S. Calinger: *Dickson, Leonard Eugene*, in [Gi]-IV, pp. 82–83.

<sup>28</sup> Doplněna byla závěrečnou kapitolou *Idealtheorie in rationalen Algebren*, kterou sepsal Andreas Speiser (1885–1970).

I v německé verzi této monografie je maticový aparát hojně využíván, s pojmem matice se čtenář setká v souvislosti s lineárními transformacemi již v první kapitole nazvané *Körper, Polynome, Matrizen*, a to v 8. paragrafu *Matrizen* (s. 14–17). Ve druhé kapitole nazvané *Einführung in die Algebren* je v 18. paragrafu *Vollständige Matrixalgebren* zavedena tzv. úplná maticová algebra (s. 29–31).

Roku 1926 vydal Dickson knihu *Modern Algebraic Theories* [D2] sestávající ze 14 kapitol, které jsou děleny na 147 článků. Sepsal ji na základě svých přednášek z předchozích let. O tři roky později vyšla německy v překladu Ewalda Bodewiga (1902–?) pod názvem *Höhere Algebra*. Roku 1959 byl vydán reprint původní knihy se zkráceným názvem *Algebraic Theories*.

V úvodu své učebnice Dickson napsal:

*This book ... presupposes calculus and elementary theory of algebraic equations. Its aim is to provide a simple introduction to the essentials of each of the branches of modern algebra, with the exception of the advanced part treated in the author's Algebras and Their Arithmetics. The book develops the theories which center around matrices, invariants, and groups, which are among the most important concepts in mathematics.*

*The book provides adequate introductory courses in (i) higher algebra, (ii) the Galois theory of algebraic equations, (iii) finite linear groups, including Klein's "icosahedron" and theory of equations of the fifth degree, and (iv) algebraic invariants.*

[D2], p. iii

Řadu témat Dicksonovy knihy bychom dnes řadili do lineární algebry (matice, determinanty, lineární transformace, bilineární, kvadratické, hermitovské formy, kanonické tvary, elementární dělitelé, lineární závislost a nezávislost, lineární rovnice, dvojice bilineárních, kvadratických a hermitovských forem, ...). Další témata však patří do obecné algebry (grupy, tělesa, řešitelnost algebraických rovnic v radikálech, konstrukce pravítkem a kružítkem, rovnice vyšších stupňů, reprezentace konečných grup lineárními grupami, ...).

Matice se v této knize objevují ve třetí kapitole nazvané *Matrices, Bilinear Forms, Linear Equations* (s. 39–63), která začíná těmito slovy:

*Chapters III–VI, which are independent of I–II, give a new exposition of the subject usually called higher algebra. We first develop Cayley's calculus of matrices, and the essentially equivalent subject of bilinear forms. The main theorems on the solution of systems of linear equations are not presupposed, but are deduced as corollaries.*

[D2], s. 39

Dickson matice zavedl v souvislosti s popisem souboru  $m$  lineárních forem o  $n$  proměnných, resp. s popisem lineárních transformací. Definoval maticové operace, charakteristickou rovnici matice, hodnotu matice zavedl pomocí subdeterminantů. Matice využil k popisu bilineárních forem a k formulaci základních výsledků z teorie soustav lineárních rovnic. Předpokládal znalost elementár-

ních poznatků o determinantech; determinanty se totiž objevily v jeho knize bez jakéhokoli vysvětlení již v prvním paragrafu. V dalších kapitolách využíval maticový aparát v partiích o kvadratických a bilineárních formách, o lineárních transformacích, kanonických tvarech, podobnosti atd.

## Richard Courant a David Hilbert

Roku 1924 byl vydán první díl mimořádně zajímavé a užitečné monografie *Methoden der mathematischen Physik* [CH], která přináší široký matematický aparát určený zejména fyzikům. Sepsali ji dva němečtí matematici působící v Göttingenu – Richard Courant<sup>29</sup> a David Hilbert.<sup>30</sup> V jejím úvodu je napsáno:

*Diesem Ziele soll für das Gebiet der mathematischen Physik das vorliegende Buch dienen. Es entwickelt mathematische Methoden, die im Anschluß an klassische physikalische Fragestellungen des 18. und 19. Jahrhunderts ausgebildet worden sind und sucht die gewonnenen Ergebnisse zu einheitlichen mathematischen Theorien auszugestalten.*

([CH], s. v)

Kniha je členěna tematicky na sedm kapitol. První kapitola *Die Algebra der linearen Transformationen und quadratischen Formen* začíná tímto odstavcem:

*Zahlreiche Fragen der mathematischen Analysis, die uns in diesem Bande beschäftigen werden, sind durch Analogie und innere Verwandtschaft aufs engste mit der Theorie der linearen Transformationen und quadratischen Formen verknüpft; wird wolen daher dieses Gebiet einleitend in aller Kürze unter den hier für uns wichtigen Gesichtspunkten durchmustern, indem wir beim Leser eine gewisse Vertrautheit mit den berührten Fragen voraussetzen.*

([CH], s. 1)

---

<sup>29</sup> Richard Courant (1888–1972), německý matematik. Ukončil studium na univerzitě v Göttingenu, kde byl asistentem Davida Hilberta. Byl nasazen v první světové válce, poté působil dva roky v Münsteru, od roku 1922 byl profesorem v Göttingenu, později zde vedl matematický institut. Roku 1933 opustil Německo, jeden rok působil v Cambridge, poté odešel z Velké Británie do New Yorku, kde získal roku 1936 profesorské místo. Věnoval se hlavně numerické matematice, aplikované matematice a matematické fyzice.

Viz C. Reid: *Richard Courant. 1888–1972 – der Mathematiker als Zeitgenosse*, Springer, 1979, 382 stran, C. Reid: *Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1976, 314 stran.

<sup>30</sup> David Hilbert (1862–1943), německý matematik, jeden z nejvýznamnějších reprezentantů moderní matematiky. Absolvoval univerzitu v Královci, kde se roku 1886 stal docentem a roku 1892, resp. 1893 mimořádným, resp. řádným profesorem. V letech 1895 až 1930 působil na univerzitě v Göttingenu. Svými výsledky inspiroval matematiky pracující v mnoha matematických směrech. Na mezinárodním kongresu matematiků v Paříži roku 1900 předložil 23 problémů, které měly být řešeny ve 20. století. Snahy o jejich řešení výrazně ovlivnily vývoj matematiky.

Viz H. Weyl: *David Hilbert and his Mathematical Work*, Bulletin of the American Mathematical Society 50(1944), s. 612–654, K. Reidemeister (ed.): *Hilbert – Gedenkband*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1971, viii+86 stran, reprint: 2012, C. Reid: *Hilbert*, Copernicus Books, Springer Science+Business Media, New York, 1996, 272 stran, L. Corry: *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898–1918): From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik*, Springer, New York, 2004, xvii+513 stran.

První kapitola sestává z pěti paragrafů:

1. *Lineare Gleichungen und lineare Transformationen* (s. 1–14).
2. *Lineare Transformationen mit linearem Parameter* (s. 14–19).
3. *Die Hauptachsentransformation der quadratischen und Hermiteschen Formen* (s. 19–26).
4. *Die Minimum-Maximum-Eigenschaft der Eigenwerte* (s. 26–29).
5. *Ergänzungen und Aufgaben zum ersten Kapitel* (s. 29–38).

V první kapitole autoři doporučili ke studiu (kromě několika časopiseckých prací) německý překlad Bôcherovy učebnice [Bô] z roku 1910, Kowalewského knihu [Kow] o determinantech z roku 1909 a Hilbertovu knihu *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* z roku 1912. Ve druhém vydání připojili ještě Wintnerovu knihu [Wi] z roku 1929 (viz dále).

Uvedme ještě zajímavý citát z 1. paragrafu:

*Viele Tatsachen der „linearen Algebra“ lassen sich besonders prägnant ausdrücken, wenn man sie als Aussagen über Matrizen formuliert und sich dabei einiger als Matrizenkalkül bezeichneter einfacher Definitionen und Regeln bedient. Wir gelangen zunächst zum Begriff der Matrizenmultiplikation, ...*

([CH], s. 6)

## Hans Beck

Hans Beck,<sup>31</sup> který přeložil do němčiny výše uvedenou Bôcherovu učebnici *Introduction to Higher Algebra* [Bô], je autorem zajímavé a moderně pojaté učebnice *Einführung in die Axiomatik der Algebra* [Bec] z roku 1926. Touto knihou výrazně prostupují matice, z dvanácti kapitol je jim plně věnována čtvrtá kapitola *Matrizes* (s. 31–40) a devátá kapitola *Proportionalität der Matrizes* (s. 111–126).

Zdůrazněme, že v Beckově knize [Bec] matice předcházejí determinantům, kterým je věnována až desátá kapitola. Násobení matic je definováno již tak, jak je dnes známe, tj. řádky první matice se skalárně násobí se sloupci druhé matice (viz s. 33). Hodnost matice již není definována pomocí subdeterminantů, autor zavedl ekvivalentní soustavy lineárních rovnic, kterým odpovídají ekvivalentní matice:

*Eine n-reihige Matrix heißt nicht singulär oder vom Range n, sobald sie der Einheitsmatrix äquivalent ist ...*

---

<sup>31</sup> Hans Heinrich Rudolf Beck (1876–1942), německý matematik. Střední školu a univerzitu vystudoval v Greifswaldu, nějakou dobu pracoval na technice v Hannoveru, později působil jako profesor matematiky na univerzitě v Bonnu. Je autorem učebnic o souřadnicové a elementární geometrii.

Viz E. Salkowski: *Hans Beck zum Gedächtnis*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 53(1943), s. 91–103.

*Die Zahl  $r$  der in der Normalform einer Matrix auftretenden Einsen heißt der Rang der Matrix.*

([Bec], s. 55, 64)

Hodnost matice je dále dána do souvislosti s lineární závislostí a nezávislostí vektorů, věta vyjadřující hodnost matice pomocí subdeterminantů se v knize objeví daleko později:

*Die  $k$  Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn ihre Matrix den Rang  $k$  hat.*

*Der Rang einer Matrix ist die Dimensionszahl des aus ihren Vektoren aufgebauten linearen Vektorgebildes, oder also die Anzahl ihrer linear unabhängigen Vektoren.*

*Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Matrix den Rang  $r$  hat, ist, daß alle ihre  $(r + 1)$ -reihigen, nicht aber alle  $r$ -reihigen Determinanten verschwinden.*

([Bec], s. 74, 81, 142)

## Oskar Perron

Roku 1927 vyšla dvoudílná učebnice *Algebra* [Pe2] Oskara Perrona.<sup>32</sup> Její první díl *Die Grundlagen* je věnován úvodním partiím této disciplíny (výchozí pojmy, polynomy, determinanty, symetrické funkce, dělitelnost, algebraické rovnice a jejich soustavy).

Základní informace o maticích jsou obsaženy ve třetí kapitole nazvané *Determinanten*, a to v souvislosti s problematikou soustav lineárních rovnic, větou o násobení determinantů a maticovými reprezentacemi bilineárních, kvadratických a hermitovských forem. Těmto otázkám jsou věnovány tři paragrafy:

---

<sup>32</sup> Oskar Perron (1880–1975), německý matematik. Studoval v Mnichově, kde roku 1902 promoval u Ferdinanda Lindemanna (1852–1939). Ve studiích pak pokračoval v Tübingenu a Göttingenu, roku 1906 se habilitoval na univerzitě v Mnichově. V následujících letech působil v Tübingenu, od roku 1914 pak jako řádný profesor v Heidelbergu. Za první světové války byl nasazen na frontu, v letech 1922 až 1950 pracoval na univerzitě v Mnichově. V době fašismu se neohroženě stavěl proti jeho reprezentantům, matematikům Ludwigu Bieberbachovi a Karlu Theodoru Vahlenovi. Perron se věnoval hlavně matematické analýze (obyčejné a parciální diferenciální rovnice, harmonické funkce, řady), teorii integrace (Perronův integrál, resp. Perronův-Henstockův-Kurzweilův integrál), teorii potenciálu, analytické teorii čísel, algebře, základům geometrie a matematické fyzice. Je autorem skvělých monografií *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (1913) a *Irrationalzahlen* (1921), které vyšly v mnoha vydáních, a učebnice *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene* (1962).

J. Heinhold: *Oskar Perron*, Jahrbuch Überblicke Mathematik 1980, s. 121–139; E. Frank: *Oskar Perron (1880–1975)*, Journal of Number Theory 14(1982), s. 281–291; J. Heinhold: *Oskar Perron*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 90(1988), s. 184–199; F. Litten: *Oskar Perron. Ein Beispiel für Zivilcourage im Dritten Reich*, Mitteilungen der Deutsche Mathematiker-Vereinigung 2(1994), č. 3, s. 11–12.

23. *Lineare Gleichungen. Der allgemeine Fall* (s. 101–111).
24. *Produkt zweier Determinanten und Matrizes* (s. 111–117).
25. *Bilineare, quadratische und Hermitesche Formen* (s. 117–127).

Poznamenejme, že v případě soustavy lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí vystačil Oskar Perron s determinanty, pojmy matice a hodnost matice zavedl až v 23. paragrafu (s. 101–102) v souvislosti se soustavou  $k$  lineárních rovnic s  $l$  neznámými. Hodnost matice definoval tehdy stále ještě obvyklým způsobem pomocí nulovosti a nenulovosti jejich subdeterminantů. Násobil matice stejného typu, a to „po řádcích“ (s. 115).

Ve druhém vydání prvního dílu z roku 1932 je tato problematika zpracována podrobněji:

24. *Lineare Gleichungen. Der allgemeine Fall* (s. 99–108).
25. *Lineare Transformation* (s. 108–110).
26. *Produkt zweier Determinanten und Matrizes* (s. 110–115).
27. *Bilineare, quadratische und Hermitesche Formen* (s. 116–124).

Ve druhém díle prvního vydání Perronovy učebnice [Pe2] z roku 1927 nazvaném *Theorie der algebraischen Gleichungen* (algebraické i numerické řešení algebraických rovnic, permutace, grupy, Galoisova teorie) se s maticemi setkáme v první kapitole nazvané *Numerische Auflösung von Gleichungen*, a to v paragrafu:

3. *Die Säkulargleichung* (s. 13–15).

Podána je stručná informace o rovnicích  $\det(A - Ex) = 0$  a  $\det(A - Bx) = 0$ , kde  $A, B$  jsou reálné, resp. komplexní čtvercové matice a  $E$  matice jednotková; stručně je na tomto místě poznamenáno, že pro hermitovskou matici  $A$  má rovnice  $\det(A - Ex) = 0$  reálné kořeny.

Ve druhém vydání z roku 1933 je tato partie podstatně rozšířena:

4. *Die Säkulargleichung* (s. 19–21).
5. *Das Hauptachsenproblem* (s. 21–30).
7. *Die charakteristische Gleichung einer Matrix* (s. 35–41).

V těchto paragrafech je prezentována stěžejní problematika teorie matic (charakteristická rovnice, vlastní čísla, ortogonální matice, unitární matice atd.), objevily se zde i výsledky týkající se vlastních čísel matic s kladnými prvky, resp. unitárních matic:

Satz 27. *Sind alle Elemente einer Matrix positiv, so hat die charakteristische Gleichung eine einfache positive Wurzel, die größer ist als der absolute Betrag einer jeden andern Wurzel.* [Perronova věta]

Satz 28. *Die charakteristischen Wurzeln einer unitären Matrix, also speziell auch die einer reellen orthogonalen Matrix, haben sämtlich den absoluten Betrag 1.*

([Pe2], díl II., s. 40–41)

## Ludwig Bieberbach

Ludwig Bieberbach<sup>33</sup> vydal roku 1928 učebnici *Vorlesungen über Algebra* [BB], která vznikla podstatným přepracováním třetího vydání (z roku 1921) výše zmíněné stejnojmenné Bauerovy knihy [Ba]. Matice se v ní objevují v souvislosti s determinanty v druhé části nazvané *Theorie und Anwendung der Determinanten* (s. 41–98). Setkáváme se však s nimi až od strany 58 (obdélníková matice, subdeterminanty, hodnota zavedená pomocí subdeterminantů, problematika soustav lineárních rovnic atd.). Násobení obdélníkových systémů stejného typu je zavedeno až na straně 69 (po odstavci o násobení determinantů) – tyto systémy se zde násobí „po řádcích“, výsledkem je tedy čtvercový systém. Definována je reciproká matice (*adjungierte Matrix*) a uvedena věta o jejím determinantu:

*Die aus der Matrix der A gebildete Determinante ist folglich die (n – 1)-te Potenz der ursprünglichen Determinante R.*

([BB], s. 71)

Maticové násobení – již v dnešní podobě – je zavedeno až v kapitole *Quadratische und bilineare Formen* v odstavci *Matrizenkalkül* (s. 78):

$$p_{ik} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} a_{i\sigma} b_{\sigma k} .$$

Ukázána je asociativita a nekomutativita násobení matic, matice jsou využívány v teorii bilineárních a kvadratických forem, definována je inverzní matice (*reziproke Matrix*), hodnota matice (pomocí subdeterminantů), kvadratické formy jsou transformovány na kanonický tvar (na součet čtverců), prezentován je Sylvesterův zákon o setrvačnosti, rozlišovány jsou pozitivně definitní a negativně definitní formy, zkoumány ortogonální transformace (též tzv. *Hauptachsentransformation*), zavedena jsou vlastní čísla matice, vyšetřovány hermitovské formy, unitární transformace atd.

---

<sup>33</sup> Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach (1886–1982), německý matematik. Studoval v Heidelbergu a v Göttingenu, v letech 1913 až 1915 byl profesorem na univerzitě v Basileji, v letech 1915 až 1921 ve Frankfurtu nad Mohanem a v letech 1921 až 1945 v Berlíně. Významně podporoval fašistický režim; v letech 1936 až 1942 byl redaktorem neblaze proslulého „árijského“ časopisu *Deutsche Mathematik*. Po válce žil v ústraní. Věnoval se hlavně matematické analýze a geometrii, je autorem řady úspěšných a vícekrát vydávaných učebnic.

Viz H. Grunsky: *Ludwig Bieberbach zum Gedächtnis*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 88(1986), s. 190–205, H. Mehrtens: *Ludwig Bieberbach and Deutsche Mathematik*, s. 195–241, in E. R. Phillips (ed.): *Studies in the History of Mathematics*, Washington, D.C., 1987, 308 stran.



## Herbert Westren Turnbull

Velmi oblíbenou učebnici *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants* [T] vydal roku 1928 Herbert Turnbull.<sup>34</sup> Jejím základem byly autorovy přednášky na univerzitě St. Andrews. Je to patrně druhá kniha, která má v názvu slovo *matice*. V úvodu autor uvedl:

*... It was the aim of those lectures to present in outline the salient features of the Invariant Theory, from its origins in the early forties of last century to the present day. ...*

*... I have followed the method of Salmon in opening with an account of determinants. This also made it desirable to introduce the rudiments of another great department of algebra – the theory of matrices. These will chiefly be found in the first seven chapters, which have been written mainly with a view to their applications in what follows. ...*

([T], s. v)

Kniha má 21 kapitol (celkem 334 stran), kromě matic a determinantů jsou vyšetřovány lineární, bilinéární a multilineární formy, lineární transformace, lineární rovnice a invarianty. Již první kapitola *Matrices and Determinants* (12 stran) dokládá, že pojem matice je výchozím a základním pojmem této knihy. Sedm krátkých paragrafů této kapitoly charakterizuje její obsah:

1. *Notation* (s. 1–2).
2. *Definition of Matrix* (s. 2–5).
3. *The Transposed Matrix* (s. 5–6).
4. *System of Linear Equations* (s. 6–8).
5. *Linear Combinations of Rows or Columns. Number Field. Rank* (s. 8–10).
6. *Linear Equations which are not Homogeneous* (s. 10–11).
7. *Condition of Solubility* (s. 11–12).

Americký matematik Oliver Edmunds Glenn (1878–?) ocenil autorův přístup i výsledek jeho snažení v dvoustránkové recenzi:

*We think that the author of this admirable book was not concerned primarily to produce a text-book. He probably was more interested in a scientific question; that of creating a logically developed exposition of the portion of invariantive algebra which has its foundations largely in linearity and the linear properties of determinants and matrices.*<sup>35</sup>

<sup>34</sup> Herbert Westren Turnbull (1885–1961), anglický matematik. Studoval na Trinity College v Cambridge, po absolutoriu prošel řadu míst (Cambridge, Liverpool, Hong Kong, Repton, Oxford), v letech 1921 až 1950 pracoval na St. Andrews University. Jeho hlavním zájmem byla algebra, ale i historie matematiky, zejména Newtonovo matematické dílo; připravil k vydání dva svazky jeho korespondence. Byl skvělý klavírista a vášnivý alpinista. Viz A. C. Aitken: *Herbert Westren Turnbull, 1885–1961*, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society 8(1962), s. 149–158.

<sup>35</sup> Bulletin of the Mathematical Society 36(1930), s. 2930.

## 5. Matice a kvantová mechanika – dvacátá léta

Velmi zajímavou partií historie matematiky (a rovněž fyziky) je proniknutí teorie matic do kvantové mechaniky, k němuž došlo ve dvacátých letech 20. století. V kapitole *Matrix theory* [GL], kterou sepsali Ivor Grattan-Guinness a Walter Ledermann<sup>36</sup> pro *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, nalezneme tuto výstižnou poznámku:

... *diffusion and education of matrix theory was slow; for example, when, in the mid-1920s, the creators of quantum mechanics were looking for techniques, matrix theory was still not widely known* ... ([GL], s. 784)

Matice do fyziky pronikly poměrně pozdě. Nejprve byly chápány pouze jako tabulky prvků. Maticové operace (zejména násobení matic) se na počátku 20. století ve fyzikálních pracích ještě neobjevily. Uveďme dva příklady.

Všestranný fyzik Gustav Mie<sup>37</sup> v letech 1912 a 1913 pouze okrajově užil matice v pracích z nelineární elektrodynamiky publikovaných v časopise *Annalen der Physik*, které nazval *Grundlagen einer Theorie der Materie* [Mi1], [Mi2] a [Mi3].

Teoretický fyzik Max Born<sup>38</sup> pracoval s maticí koeficientů algebraické formy

<sup>36</sup> Ivor Owen Grattan-Guinness (1941–2014), anglický historik matematiky a logiky. Založil a v letech 1979 až 1992 editoval časopis *History and Philosophy of Logic*, v letech 1974 až 1981 editoval časopis *Annals of Science*, pracoval i pro časopis *Historia mathematica*. Pod jeho vedením byla roku 1993 vydána dvoudílná *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* (2. vydání: 2003) a roku 2005 objemná publikace *Landmark Writings in Western Mathematics*.

Walter Ledermann (1911–2009), britský matematik německého (a židovského) původu. Věnoval se hlavně algebře, teorii čísel a statistice, sepsal řadu prací a učebnic. Editoval několik svazků rozsáhlého díla *Handbook of Applicable Mathematics*.

<sup>37</sup> Gustav Adolf Feodor Wilhelm Ludwig Mie (1868–1957), německý teoretický, ale i experimentální fyzik. Působil na univerzitách v Greifswaldu, Halle a Freiburgu. Jeho nejvýznamnější výsledek se týká rozptylu elektromagnetického záření (Mieova teorie rozptylu).

Viz H. Rechenberg: *Mie, Gustav*, Neue Deutsche Biographie, Band 17, Duncker & Humblot, Berlin, 1994, s. 465–466, J. Mehra: *Mie, Gustav*, in [Gi]-IX, s. 376–377.

<sup>38</sup> Max Born (1882–1970), německý fyzik a matematik židovského původu. Studoval ve Vratislavi, Heidelbergu, Curychu a Göttingenu, roku 1909 se v Göttingenu habilitoval. Od roku 1919 byl řádným profesorem ve Frankfurtu a o dva roky později v Göttingenu. Po roce 1933 opustil Německo, krátce pracoval ve Velké Británii na univerzitě v Cambridgi a v letech 1936 až 1953 na univerzitě v Edinburghu. Odmítl se podílet na vývoji atomové bomby. Do Německa se vrátil až roku 1953. Max Born a Walther Wilhelm Bothe (1891–1957) získali roku 1954 Nobelovu cenu za zásadní přínos pro kvantovou mechaniku, hlavně za statistickou interpretaci vlnové funkce.

Viz N. T. Greenspan: *Max Born – Baumeister der Quantenwelt. Eine Biographie*, Spektrum Akademischer Verlag, München, 2006, 416 stran, 2008, xvii+380 stran, 2011, 380 stran [anglicky: *The End of the Certain World: The Life and Science of Max Born*, Basic Books, Wiley, Chichester, 2005, 400 stran], J. Bernstein: *Max Born and the Quantum Theory*, American Journal of Physics 73(2005), č. 11, s. 999–1008, N. Kemmer, R. Schlapp: *Max Born 1882–1970*, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society 17 (1971), s. 17–52, A. Hermann: *Born, Max*, in [Gi]-15, s. 39–44.

ve stati *Über elektrostatische Gitterpotentiale* [Bo1] z teorie krystalových mřížek, která byla roku 1921 otištěna v časopise *Zeitschrift für Physik*.<sup>39</sup>

Počátkem 20. století se v pracích několika vynikajících fyziků postupně rodila kvantová mechanika. Byli to hlavně Max Planck,<sup>40</sup> Arnold Sommerfeld,<sup>41</sup> Ernest Rutherford,<sup>42</sup> Albert Einstein<sup>43</sup> a Niels Bohr.<sup>44</sup>

<sup>39</sup> Viz např. [Bo1], s. 129.

<sup>40</sup> Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947), německý fyzik a filozof, jeden ze zakladatelů kvantové teorie, nositel Nobelovy ceny za fyziku za rok 1918. Významné jsou jeho práce z termodynamiky, zejména o problematice spektra absolutně černého tělesa (1900), kdy předpokládal, že energie záření je vysílána v celočíselných násobcích tzv. kvanta a že toto kvantum je nepřímo úměrné vlnové délce světla.

Viz W. Gerlach: *Die Quantentheorie: Max Planck, sein Werk und seine Wirkung*, Universitätsverlag, Bonn, 1948, 36 stran, D. Hoffmann (ed.): *Max Planck und die moderne Physik*, Springer, Berlin, 2010, 248 stran, I. Jex: *Max Planck – hledač absolutna*. Velké postavy vědeckého nebe, svazek 8, Prometheus, Praha, 2000, 56 stran, H. Kangro: *Planck, Max Karl Ernst Ludwig*, in [Gi]-11, s. 7–17, D. Hoffmann, C. Gearbart: *Planck, Max*, in [Ko]-6, s. 111–115.

<sup>41</sup> Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868–1951), německý matematik a teoretický fyzik, průkopník rozvoje atomové a kvantové fyziky. Vychoval velké množství studentů pro další éru teoretické fyziky (Heisenberg, Pauli, ...). V kvantové mechanice je důležitý jeho objev konstanty jemné struktury. Byl mnohokrát nominován na Nobelovu cenu, ale nikdy ji nezískal.

Viz M. Eckert: *Arnold Sommerfeld, Atomphysiker und Kulturbote, 1868–1951. Eine Biografie*, Wallstein, Göttingen, 2013, 604 stran (anglicky: *Arnold Sommerfeld. Science, Life and Turbulent Times 1868–1951*, Springer, New York, 2013, xiv+471 stran), M. Eckert: *Sommerfeld, Arnold Wilhelm Johannes*, Neue Deutsche Biographie, Band 24, Duncker & Humblot, Berlin, 2010, s. 568–569, M. Eckert: *Sommerfeld, Arnold Johannes Wilhelm*, in [Ko]-6, s. 489–492.

<sup>42</sup> Ernest Rutherford (1871–1937), britský fyzik novozélandského původu, zakladatel jaderné fyziky (radioaktivní rozpad prvků, poločas rozpadu, záření  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , jaderná reakce, transmutace prvků), nositel Nobelovy ceny za chemii z roku 1908.

D. Wilson: *Rutherford: Simple Genius*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1984, 639 stran, L. Badash: *Rutherford, Ernest*, in [Gi]-12, s. 25–36.

<sup>43</sup> Albert Einstein (1879–1955), německý fyzik židovského původu. Od roku 1909 byl mimořádným profesorem v Curychu, půldruhého roku (1911–1912) řádným profesorem na Německé univerzitě v Praze, poté krátce řádným profesorem v Curychu, a od roku 1914 v Berlíně. Roku 1933 emigroval do USA. Pracoval v Princetonu (Institute for Advanced Studies). Je považován za jednoho z nejvýznamnějších fyziků všech dob (speciální teorie relativity, obecná teorie relativity). Přišel s myšlenkou, že světlo je složeno z částic, které jsou nehmotné, ale mají energii a hybnost, které jsou nepřímo úměrné vlnové délce světla (kvantová hypotéza světla). Roku 1921 získal Nobelovu cenu za objasnění fotoelektrického jevu a zásluhy o teoretickou fyziku.

Viz K. Kleinknecht: *Einstein und Heisenberg: Begründer der modernen Physik*, Kohlhammer Verlag, Stuttgart, 2017, 221 stran, B. G. Kuzněcov: *Einstein – Život – Smrt – Nesmrtnost*, SPN, Praha, 1984, 423 stran, J. Neffe: *Einstein. Životopis*, Argo, Praha, 2006, 359 stran, J. Horský: *Albert Einstein – genius lidstva*. Velké postavy vědeckého nebe, svazek 4, Prometheus, Praha, 1998, 48 stran, K.-R. Biermann: *Einstein, Albert*, in [Gi]-IV, s. 312–343, J. Stachel: *Einstein, Albert*, in [Ko]-II, s. 363–373.

<sup>44</sup> Niels Henrik David Bohr (1885–1962), dánský fyzik. K Rutherfordovu planetárnímu modelu atomu připojil ideu stacionárních orbitů a přechodu elektronů mezi nimi (Bohrův model atomu). Vysvětlil tak spektrum atomu vodíku. Roku 1922 získal Nobelovu cenu za fyziku (výzkum struktury atomů a jejich záření).

Viz E. P. Fischer: *Niels Bohr. Physiker und Philosoph des Atomzeitalters*, Siedler Verlag,

Zdůrazněme, že do roku 1925 byly všechny problémy kvantové mechaniky vyjadřovány a řešeny jazykem klasické fyziky, tj. kinematiky a dynamiky.

## Werner Heisenberg

Roku 1925 publikoval čtyřiadvacetiletý Werner Heisenberg<sup>45</sup> v časopise *Zeitschrift für Physik* práci *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen* [He1]. Oprostil se v ní od dosavadního popisu pohybu jazykem klasické fyziky, který byl reprezentován pojetím Nielse Bohra, a zaměnil jej popisem pomocí pozorovatelných veličin. Zvolil zcela nový přístup, který vedl ke vzniku maticové mechaniky (první formulace pozdější kvantové mechaniky). Jeho práci doporučili k otištění Wolfgang Pauli<sup>46</sup> a Max Born, přijata byla 29. července 1925.

Heisenbergův článek [He1] byl roku 1926 referován bez většího porozumění v časopise *Science Abstracts* (pouze 9 řádků)<sup>47</sup> a o rok později v časopise

---

München, 2012, 272 stran, U. Röseberg: *Niels Bohr. 1885–1962. Leben und Werk eines Atomphysikers*, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1985, 344 stran, 3. vydání: Spektrum Akademischer Verlag, Berlin, 1992, A. Pais: *Niels Bohr's Times. In Physics, Philosophy, and Polity*, Clarendon Press, Oxford, 1991, 604 stran, L. Rosenfeld: *Bohr, Niels Henrik David*, in [Gi]-II, s. 239–254, S. Tanona: *Bohr, Niels Henrik David*, in [Ko]-I, s. 326–328.

<sup>45</sup> Werner Karl Heisenberg (1901–1976), německý teoretický fyzik, matematik a filozof. Studoval na univerzitě v Mnichově (Sommerfeld) a v Göttingenu (Born), roku 1923 získal v Mnichově doktorát. Roku 1924 se habilitoval v Göttingenu. V letech 1924 až 1927 pracoval na univerzitě v Kodani (Bohr) a v Göttingenu, od roku 1927 byl profesorem na univerzitě v Lipsku, od roku 1941 v Berlíně. Za války řídil německý atomový výzkum (*Uranprojekt des Heereswaffenamtes*), byl loajální k fašistickému režimu, věřil v Hitlerovo vítězství. Po válce pracoval v Göttingenu a Mnichově. Jeho nejvýznamnějším výsledkem je tzv. *princip neurčitosti* (1927), který dnes nese jeho jméno. Roku 1932 Heisenberg obdržel Nobelovu cenu za fyziku (rozvoj kvantové mechaniky).

Viz D. C. Cassidy: *Uncertainty: The Life and Science of Werner Heisenberg*, W. H. Freeman, 1993, 688 stran, A. Hermann: *Die Jahrhundertwissenschaft – Werner Heisenberg und die Physik seiner Zeit*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1977, 275 stran, K. Kleinknecht: *Einstein und Heisenberg: Begründer der modernen Physik*, Kohlhammer Verlag, Stuttgart, 2017, 221 stran, D. C. Cassidy: *Heisenberg, Werner Karl*, in [Gi]-17, s. 394–403. Viz též M. Bednář: *Odešel Werner Heisenberg – jeden ze zakladatelů moderní fyziky*, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 22(1977), s. 1–9, F. Grygar: *Role Wernera Heisenberga v předválečném nacistickém Německu*, *Vesmír* 91(2012), s. 604–607, F. Grygar: *Ke zrodu a pádu legendy o německých atomových vědcích, kteří z morálních důvodů nechtěli sestrojít atomovou bombu pro nacistické Německo*, *DVT* 45(2012), s. 251–271.

<sup>46</sup> Wolfgang Ernst Pauli (1900–1958), švýcarský teoretický fyzik (rakouského a židovského původu). K nejvýznamnějším výsledkům dospěl v teorii relativity a kvantové mechanice. Nobelovu cenu za fyziku získal roku 1945 za formulaci tzv. Pauliho vylučovacího principu (1925).

Viz C. P. Enz, K. von Meyenn (eds.): *Wolfgang Pauli – Das Gewissen der Physik*, Vieweg Verlag, 1988, xii+548 stran (mit Nachdruck einiger Arbeiten Paulis und Bibliographie), K. von Meyenn, A. Hermann: *Wolfgang Paulis Beitrag zur Göttinger Quantenmechanik*, *Physikalische Blätter* 32(1976), s. 145–150, K. von Meyenn: *Pauli, Wolfgang*, *Neue Deutsche Biographie*, Band 20, Duncker & Humblot, Berlin, 2001, s. 118–121, M. Fierz: *Pauli, Wolfgang*, in [Gi]-X, s. 422–425, C. Carson: *Pauli, Wolfgang*, in [Ko]-6, s. 34–36.

<sup>47</sup> *Science Abstracts – A. Physics* 29(1926), s. 14.

Physikalische Berichte dokonce jen jedinou větou:

*Verf. versucht, Grundlagen für eine quantentheoretische Mechanik zu gewinnen, die ausschließlich auf Beziehungen zwischen prinzipiell beobachtbaren Größen basiert ist.*<sup>48</sup>

Heisenbergův neobvyklý přístup přinášející nové výsledky a nový matematický aparát nebyl v referativních časopisech vůbec zdůrazněn. Niels Bohr však tuto Heisenbergovu práci ocenil již na šestém Skandinávském matematickém kongresu v Kodani v srpnu roku 1925. Ještě více však zaujala Maxe Borna. Heisenberg totiž překvapivým způsobem reprezentoval fyzikální veličiny pomocí souborů komplexních čísel závisících na čase a zavedl velmi účelné pravidlo násobení těchto souborů.

Heisenbergova práce *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen* [He1] byla první ze slavné trojice prací, které přinesly formulaci kvantové mechaniky pomocí matic (tzv. *maticová mechanika*). Autory druhé práce byli Max Born a Pascual Jordan, spolu s Heisenbergem pak sepsali práci třetí. Jsou považováni za zakladatele maticové kvantové mechaniky – popisu atomu v relativistickém pojetí fyziky (též Heisenbergova-Bornova-Jordanova mechanika).

## Max Born a Pascual Jordan

Jak již bylo řečeno, Heisenbergův článek [He1] velice zaujal Maxe Borna, který po letech vzpomínal, jak ho Heisenbergovo podivné pravidlo pro násobení souborů komplexních čísel fascinovalo. Po delších úvahách si uvědomil, že se jedná o násobení matic. Rozpomněl se totiž na svá studia, zejména na přednášky, které absolvoval roku 1903 ve Vratislavi. V knize *Mein Leben* [Bo9] z roku 1975 napsal:

*Meine Lehrer waren Rosanes und London, ... Rosanes ... war Schüler von Kronecker und ein Freund des berühmten Frobenius. Seine Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene und des Raumes waren brillant, ebenso die über Algebra. Er führte uns sehr früh in die Ideen der Gruppentheorie und der Matrizenrechnung ein, und ich verdanke ihm mein Wissen über diese vielseitig verwendbare Methode, die ich später erfolgreich auf physikalische Probleme anwendete, zuerst in der Theorie der Kristallgitter und dann in der Quantenmechanik. ...*

*Nachdem ich Heisenbergs Arbeit zur Veröffentlichung an die »Zeitschrift für Physik« gesandt hatte, begann ich, über seine symbolische Multiplikation nachzугrübeln, und bald war ich so davon gefesselt, daß ich den ganzen Tag darüber nachdachte und nachts kaum noch schlafen konnte. Denn ich hatte das*

---

<sup>48</sup> Viz *Physikalische Berichte* 8(1927), s. 1205. Posuzovatel podepsaný jako *Güntherschulze* pouze viceméně opsal Heisenbergův abstrakt ([He1], s. 879): *In der Arbeit soll versucht werden, Grundlagen zu gewinnen für eine quantentheoretische Mechanik, die ausschließlich auf Beziehungen zwischen prinzipiell beobachtbaren Größen basiert ist.*

*Gefühl, daß etwas Grundsätzliches dahintersteckte und daß es das Ziel unserer Bemühungen vieler Jahre war. Eines Morgens, etwa am 10. Juli 1925, sah ich plötzlich Licht: Heisenbergs symbolische Multiplikation war nichts anderes als das Matrizenkalkül, das mir seit meinen Studententagen aus Rosanes Vorlesungen in Breslau bekannt war.* ([Bo9], s. 86, 299)

Max Born intenzivně uvažoval o budování matematických základů kvantové mechaniky a hledal vhodného spolupracovníka, který by dobře znal příslušný matematický aparát. Wolfgang Pauli Bornovu nabídku odmítl. Born na to později vzpomínal:

*Doch statt des erwarteten Interesses erhielt ich eine kühle und sarkastische Absage: »Ja, ich weiß, Sie sind ein Anhänger solch langwieriger und komplizierter Formalismen. Sie werden Heisenbergs physikalische Ideen mit Ihrer unnützen Mathematik zerstören«, usw.* ([Bo9], s. 300)

Bornovým spolupracovníkem se stal Pascual Jordan,<sup>49</sup> který byl velmi dobře seznámen s moderní matematikou. Teorii matic studoval zejména z Bôcherovy učebnice *Introduction to Higher Algebra* [Bô], maticový aparát tedy dobře ovládal. Pomáhal rovněž se závěrečnými úpravami prvního dílu knihy *Methoden der mathematischen Physik* [CH], který připravoval k vydání Richard Courant na základě přednášek a prací Davida Hilberta. V tomto svazku, který vyšel roku 1924, byly mimo jiné obsaženy právě ty partie algebry a matematické analýzy, které rodící se kvantová mechanika potřebovala.<sup>50</sup>

Plodná spolupráce Maxe Borna a Pascuala Jordana vedla velmi rychle k sepsání společné práce nazvané stručně *Zur Quantenmechanik* [BJ1], která byla přijata k otištění v časopise *Zeitschrift für Physik* 27. září 1925, tj. již dva měsíce po práci Heisenbergově. Má čtyři části, v první z nich, která se nazývá *Matrizenrechnung* (7 stran), je vyložen potřebný matematický aparát týkající se teorie nekonečných matic. V poznámce pod čarou jsou odkazy na Beckův

---

<sup>49</sup> Ernst Pascual Jordan (1902–1980), německý teoretický fyzik. Studoval na technice v Hannoveru a na univerzitě v Göttingenu, roku 1924 získal doktorát pod vedením Maxe Borna. Roku 1926 se habilitoval, o rok později se stal mimořádným a roku 1935 řádným profesorem na univerzitě v Rostocku. Byl aktivním fašistou, od roku 1933 byl členem NSDAP a SA, za války se věnoval aplikacím vědy ve vojenství, pracoval pro Luftwaffe v Peenemünde. V letech 1957 až 1961 byl poslancem Spolkového sněmu za CDU, podporoval myšlenku vyzbrojení Bundeswehru jadernými zbraněmi. Někdy se uvádí, že nebyl Jordanova členství v NSDAP, získal by s Maxem Bornem v roce 1954 Nobelovu cenu.

Viz B. Schroer: *Pascual Jordan, his Contributions to Quantum Mechanics and his Legacy in Contemporary Local Quantum Physics*, Cornell University, 2003, 37 stran, J. Bernstein: *Max Born and the Quantum Theory*, *American Journal of Physics* 73(2005), č. 11, s. 999–1008. K. von Meyenn: *Jordan, Ernst Pascual*, in [Gi]-17, s. 448–454, R. H. Beyler: *Jordan, Ernst Pascual*, in [Ko]-4, s. 55–58.

<sup>50</sup> Jedná se zejména o první kapitolu nazvanou *Die Algebra der linearen Transformationen und quadratischen Formen* (31 stran); v literatuře k této kapitole jsou uvedeny dvě učebnice – Bôcherova učebnice algebry [Bô] a Kowalewského monografie o determinantech [Kow]. Poznamenejme ještě, že teorie nekonečných determinantů byla výborně zpracována právě v této Kowalewského knize z roku 1909.

německý překlad Bôcherovy učebnice [Bô] z roku 1910 nazvaný *Einführung in die höhere Algebra* a na první díl Courantovy a Hilbertovy monografie *Methoden der mathematischen Physik* [CH] z roku 1924. V úvodu autoři píší:

*Die mathematische Grundlage der Heisenbergschen Betrachtung ist das Multiplikationsgesetz der quantentheoretischen Größen, das er durch eine geistreiche Korrespondenzbetrachtung erschlossen hat. Die Ausgestaltung seines Formalismus, die wir hier geben, beruht auf der Bemerkung, daß diese Regel nichts ist, als das den Mathematikern wohlbekannte Gesetz der Multiplikation von Matrizen. Das nach zwei Seiten unendliche, quadratische Schema (mit diskreten oder kontinuierlich laufenden Indizes), die sogenannte Matrix, ist der Repräsentant einer physikalischen Größe, die in der klassischen Theorie als Funktion der Zeit angegeben wird. Die mathematische Methode der neuen Quantenmechanik ist daher gekennzeichnet durch Benutzung einer Matrizenanalysis an Stelle der gewöhnlichen Zahlenanalysis.* ([BJ1], s. 859)

Tato společná Bornova a Jordanova práce podala první exaktní formulaci maticové mechaniky. Původní Heisenbergův maticový přístup byl podstatně rozšířen.

### Max Born, Pascual Jordan a Werner Heisenberg

V polovině listopadu roku 1925 vznikla další významná práce – *Zur Quantenmechanik II* [BHJ1], kterou sepsali Born, Heisenberg a Jordan. Max Born ji nazýval „Drei-Männer-Arbeit“. Otištěna byla roku 1926 opět v časopise *Zeitschrift für Physik*. Přinesla obecnou metodu řešení úloh kvantové mechaniky a ukázala souvislosti mezi matematickým aparátem maticové mechaniky a výsledky moderní algebry a analýzy. Představovala první podrobný výklad základů tehdejší kvantové mechaniky v její maticové formulaci. Fyzikální problémy byly převedeny na úlohy algebry a analýzy, které měly řešení a které studovala současná matematika.

První kapitola práce *Zur Quantenmechanik II* začíná objasněním maticové reprezentace kvantové veličiny:

*Eine quantentheoretische Größe  $\mathbf{a}$  – sei es Koordinate oder Impuls oder irgend eine Funktion beider – wird repräsentiert durch die Gesamtheit der Größen*

$$a(nm)e^{2\pi i\nu(nm)t}$$

*oder auch unter Weglassung des für alle zum System gehörigen Größen gleichen (nur von den Indizes  $n$  und  $m$  abhängigen) Faktors  $e^{2\pi i\nu(nm)t}$  durch die Gesamtheit der Zahlen*

$$a(nm) .$$

*Wir können also von einer (übrigens unendlichen) „Matrix“  $\mathbf{a}$  sprechen.*

([BHJ1], s. 561)

Pascual Jordan v knize *Die Physik des 20. Jahrhunderts* [Jo2] z roku 1936 uvedl:

*Das mathematische Darstellungsmittel, dessen sich diese Theorie bedient, ist die sogenannte Matrizentheorie, ein Kapitel der Mathematik, das von den Mathematikern schon seit langem um seiner selbst willen gepflegt worden war, ohne daß man die Bedeutung ahnte, welche dieses Kapitel der Mathematik einmal für die Atomphysik gewinnen sollte.*

([Jo2], 3. vydání, s. 98)

## Erwin Schrödinger

Z jiné strany přistoupil k problémům částicové fyziky Erwin Schrödinger.<sup>51</sup>

V roce 1926 publikoval v časopise *Annalen der Physik* rozsáhlou práci *Quantisierung als Eigenwertproblem* [Sch1]–[Sch4], kterou rozdělil do čtyř částí. Zveřejnil v ní své nové představy o kvantové teorii. Jeho výsledky byly ovlivněny článkem *A Tentative Theory of Light Quanta* [Br1], který zveřejnil roku 1924 v časopisu *Philosophical Magazine* Louis de Broglie,<sup>52</sup> autor několika pojednání věnovaných problematice kvant.<sup>53</sup> De Broglie přišel s myšlenkou, že s pohybem elektronu je spjata jakási *hmotová vlna* (teorie hmotných vln), jejíž vlnovou délku je možno vypočítat z její hybnosti pomocí Planckovy konstanty. Schrödinger uvažoval, že s částicí je spojeno *vlnové klubko*, zavedl

<sup>51</sup> Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961), rakouský teoretický fyzik. Studoval na univerzitě ve Vídni, kde roku 1910 získal doktorát a o čtyři roky později se habilitoval. Po první světové válce, v níž byl nasazen, působil na několika evropských univerzitách, počátkem roku 1927 měl přednáškové turné v USA, krátce poté se stal profesorem na univerzitě v Berlíně. Po nástupu fašismu v roce 1933 působil tři roky v Oxfordu, od roku 1936 ve Štýrském Hradci (Graz) a od roku 1939 v Dublinu. Do Rakouska se vrátil až roku 1956. Roku 1933 obdržel Nobelovu cenu. Je autorem proslulého myšlenkového experimentu (Schrödingerova kočka, 1935), který asi nejlépe vystihuje jeho (a nejen jeho) skeptický postoj k obecně přijímané pravděpodobnostní interpretaci kvantové mechaniky. Viz W. J. Moore: *Schrödinger. Life and Thought*, Cambridge University, 1989, 528 stran (německy: *Erwin Schrödinger: Eine Biographie*, Primus Verlag, 2012, 423 stran, 2. vydání: 2015), J. Gribbin: *Erwin Schrödinger and the Quantum Revolution*, Wiley, 2013, 336 stran, D. Hoffmann: *Erwin Schrödinger*, Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner 66, Teubner, Leipzig, 1984, 94 stran, K. von Meyenn: *Schrödinger, Erwin Rudolf Josef Alexander*, Neue Deutsche Biographie, Band 23, Duncker & Humblot, Berlin, 2007, s. 578–580, A. Hermann: *Schrödinger, Erwin*, in [Gi]-12, s. 217–223.

<sup>52</sup> Louis Victor Pierre Raymond vévoda de Broglie (1892–1987), francouzský teoretický fyzik. Pocházel ze staré italské šlechtické rodiny. Studoval v Paříži na Sorbonně a na Faculté des sciences. Roku 1928 se stal profesorem teoretické fyziky na Institutu Henriho Poincaré, v letech 1932 až 1962 působil na Sorbonně (Faculté des sciences). Od počátku dvacátých let prosazoval princip duality částic a vlnění. Je autorem řady prací a knih. Roku 1929 dostal Nobelovu cenu za fyziku za objev vlnové povahy elektronu.

Viz A. Abragam: *Louis Victor Pierre Raymond de Broglie. 15 August 1892 – 19 March 1987*, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society 34(1988), s. 22–26, A. Abragam: *Louis de Broglie: la grandeur et la solitude*, La Recherche 245(1992), s. 918–923, J. Mehra: *Louis de Broglie and the Phase Waves Associated with Matter*, in [Meh], s. 546–570.

<sup>53</sup> Viz např. drobné články v časopise *Comptes Rendus* – 175(1922), s. 811–813, 177(1923), s. 507–510, 548–550, 630–632 – a rozsáhlá práce *Recherches sur la théorie des quanta* [Br2].



pojmem vlnová funkce  $\psi$ , našel pro ni lineární parciální diferenciální rovnici (*Schrödingerova rovnice*) a za zvolených vhodných okrajových podmínek získal jejím řešením diskrétní množinu energetických stavů; pro atom vodíku vypočetl stejné energetické hladiny, jaké dávala Bohrova teorie atomu. Myšlenku vln tak propojil s částicovými představami, zavedl novou teorii – vlnovou mechaniku.

Uvedme citát z Jordanovy knihy *Die Physik des 20. Jahrhunderts*, který se týká právě Schrödingera:

*Schrödinger konnte nun zeigen, daß mit der Lösung des von ihm in seiner Weise formulierten mathematischen Problems gleichzeitig auch die mathematische Lösung für das scheinbar ganz andere mathematische Problem gewonnen war, welches durch die Quantenmechanik in Gestalt der Matrizen-theorie formuliert war. Man kann also, wenn man nach den Anweisungen der Schrödingerschen „Wellenmechanik“ ein Problem gelöst hat, durch eine mathematische Umrechnung daraus auch die Resultate der „Quantenmechanik“ betreffs dieses Problems gewinnen. Dieser mathematische Zusammenhang beider Theorien, der zunächst ungeheuer überraschend erscheinen mußte angesichts der völligen Verschiedenheit der beiden Wege, die hier zum gleichen Ziele führten, gab nun auch die sichere Unterlage für die physikalisch-begriffliche Deutung der Schrödingerschen Wellen. ...*

*... die Schrödingerschen Wellen sind nämlich in diesen Fällen gar nicht mehr Wellen im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume, sondern sind lediglich eine mathematische Konstruktion, die sich der Mathematiker als Wellen in Räumen von mehr als drei Dimensionen „veranschaulichen“ kann.*

([Jo2], 3. vydání, s. 98–99)

## Další vývoj

Myšlenky Heisenbergovy práce *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen* [He1] byly upraveny a zpracovány do srozumitelné podoby díky přínosu Maxe Borna a Pascuala Jordana (viz [BJ1], [BHJ1]). Na Heisenbergovu práci [He1] (a rovněž na jeho dřívější výsledky) reagoval Paul Dirac v pracích *The Fundamental Equations of Quantum Mechanics* [Di1] (přijata do tisku již 7. 11. 1925) a *Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom* [Di2] (přijata 22. 1. 1926).<sup>54</sup>

<sup>54</sup> Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), britský teoretický fyzik a matematik. Středoškolské a vysokoškolské vzdělání získal v Bristolu, doktorát na St. John's College v Cambridgi. Absolvoval studijní pobyty v Kodani (Bohr), Göttingenu (Born) a Leidenu (Ehrenfest). Od roku 1927 působil v Cambridgi, kde roku 1932 získal profesuru. Roku 1933 obdržel za výsledky v kvantové mechanice (spolu se Schrödingerem) Nobelovu cenu. Roku 1969 z Cambridge odešel na Floridu, kde ještě několik let působil na tamních univerzitách. Po celý život se zabýval kvantovou mechanikou, teorií relativity a kosmologií. Jeho ženou byla sestra Eugena Wignera (viz dále).

Viz N. Mukunda: *The life and work of P. A. M. Dirac*, s. 260–282, in *Recent Developments in Theoretical Physics*, World Scientific, 1987, 352 stran, H. Kragh: *Dirac: A Scientific Biography*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, O. Darrigol: *Dirac, Paul Adrien Maurice*, in [Gi]-17, s. 224–233.

Jeho výsledky přispěly k dotvoření tzv. maticové mechaniky. Dirac přispěl ke sjednocení kvantové mechaniky a speciální teorie relativity a odvodil relativistickou rovnici elektronu.

Wolfgang Pauli ukázal v práci *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik* [Pa] (přijata 17. 1. 1926) zveřejněné roku 1926 v časopisu *Zeitschrift für Physik*, že abstraktní formalismus maticové mechaniky dává správná přiblížení k atomové teorii řešící problém struktury atomu vodíku, tj. ústřední problém atomové teorie.

Erwin Schrödinger, v době, kdy publikoval své práce [Sch1] až [Sch4], reagoval na Bornovu, Heisenbergovu a Jordanovu práci [BJJ1] článkem *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen* [Sch5]. Ukázal, že jeho vlnová mechanika je ekvivalentní s Heisenbergovou maticovou mechanikou, že jsou matematicky rovnocenné, že se jedná pouze o různé přístupy. Schrödinger tedy vytvořil druhé vyjádření kvantové mechaniky. Ekvivalenci maticové a vlnové mechaniky ukázali rovněž Wolfgang Pauli, Paul Dirac, Pascual Jordan i John von Neumann.

Rovněž Fritz London<sup>55</sup> přenesl maticovou mechaniku roku 1926 transformací na Schrödingerovu vlnovou mechaniku. Své výsledky prezentoval v práci *Über die Jacobischen Transformationen der Quantenmechanik* [Lo] otištěné v časopise *Zeitschrift für Physik* (přijata 22. 5. 1926).

Ve druhé polovině dvacátých let a ve třicátých letech se kvantové mechanice, kromě výše uvedených osobností, věnovala řada dalších fyziků. Bouřlivě se rozvíjel výzkum struktury hmoty.

## O kvantové mechanice a její historii

Základní poučení o kvantové mechanice a jejích matematických základech lze najít např. v následujících učebnicích:

- R. H. Dicke, J. P. Wittke: *Introduction to Quantum Mechanics* [DW], 1960.
- A. Messiah: *Quantum Mechanics I., II.* [Me], 1961, 1962.
- J. Klíma, B. Velický: *Kvantová mechanika I., II.* [KV], 2015, 2018.
- D. J. Griffiths: *Introduction to Quantum Mechanics* [Gri], 2004–2018.

---

<sup>55</sup> Fritz Wolfgang London (1900–1954), německo-americký teoretický fyzik židovského původu. Střední školu absolvoval v Bonnu, kde začal studovat na univerzitě. Ve studích pokračoval ve Frankfurtu nad Mohanem, v Göttingenu a Mnichově. Jako asistent působil na technice ve Stuttgartu. Roku 1928 se na berlínské univerzitě habilitoval a jako soukromý docent tam přednášel kvantovou mechaniku. Spolupracoval se Schrödingerem. Roku 1933 emigroval do Velké Británie, v letech 1936 až 1939 působil v Paříži, poté emigroval do USA. Tam pracoval na Dukeově univerzitě (Severní Karolína), byl profesorem teoretické chemie a od roku 1953 profesorem fyzikální chemie.

Viz H. Rechenberg: *London, Fritz*, Neue Deutsche Biographie, Band 15, Duncker & Humblot, Berlin, 1987, s. 145–146, C. W. F. Everitt, W. M. Fairbank: *London, Fritz*, in [Gi]-VIII, s. 473–479.

- S. Weinberg: *Lectures on Quantum Mechanics* [W], 2013, 2015.<sup>56</sup>
- H. S. Green: *Matrix Mechanics in Quantum Mechanics* [G], 1965.

O historii a filozofických aspektech kvantové mechaniky se lze dočíst například v následujících knihách:

- H. Reichenbach: *Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik* [Rei], 1949.
- R. Dugas: *A History of Mechanics* [Du], 1957.
- B. L. Cline: *The Questioners: Physicists and the Quantum Theory* [Cl], 1965, nové vydání: 1987.
- M. Jammer: *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* [Ja1], 1966.
- F. Hund: *Geschichte der Quantentheorie* [Hu], 1967.
- B. L. van der Waerden: *Source of Quantum Mechanics* [Wa4], 1967.
- M. Jammer: *The Philosophy of Quantum Mechanics. The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective* [Ja2], 1974.
- J. Bub: *The Interpretation of Quantum Mechanics* [Bu], 1974.
- C. A. Hooker (ed.): *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*, Volume I. *The Historical Evolution* [Ho], 1975.
- J. Mehra, H. Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory* [MR], 1982–2001.
- J. Mehra: *The Golden Age of Theoretical Physics I., II.* [Meh], 2001.
- B. S. Dewitt, N. Graham: *The Many Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* [DG], 2015.
- R. D. Purrington: *The Heroic Age. The Creation of Quantum Mechanics, 1925–1940* [Pu], 2018.
- G. Ludyk: *Quantum Mechanics in Matrix Form* [Lu], 2018.

Upozorněme rovněž na časopisecké práce, které se věnují vývoji kvantové mechaniky a uvádějí řadu knižních i časopiseckých bibliografických zdrojů:

- E. MacKinnon: *Heisenberg, Models, and the Rise of Matrix Mechanics* [MK], 1977.
- M. Beller: *Matrix Theory Before Schrödinger. Philosophy, Problems, Consequences* [Be], 1983.
- S. Perovic: *Schrödingers Interpretation of Quantum Mechanics and the Relevance of Bohrs Experimental Critique* [Per1], 2006.
- S. Perovic: *Why were Matrix Mechanics and Wave Mechanics Considered Equivalent?* [Per2], 2008.

---

<sup>56</sup> Steven Weinberg (nar. 1933), nositel Nobelovy ceny za rok 1979, je autorem velmi zajímavé knížky *Dreams of a Final Theory*, kterou máme v českém překladu – *Snění o finální teorii*, edice Krov, svazek 2, Hynek, Praha, 1996, 293 stran.

## 6. Matematická podpora fyziky – přelom dvacátých a třicátých let

Bouřlivý rozvoj fyziky počátkem 20. století vyvolal mimořádný zájem o otázky *makrosvěta* – motivovala jej zejména speciální a obecná teorie relativity – a rovněž o problematiku *mikrosvěta* – přineslo jej studium struktury hmoty, velkou roli sehrála právě kvantová mechanika. Fyzika v prvních desetiletích 20. století poutala pozornost veřejnosti, přírodovědců i filozofů. Mimořádně silně inspirovala některé matematiky.

Moderní matematika se rodila v bezprostřední vazbě na fyziku a astronomii. Stačí připomenout vznik a následný vývoj infinitesimálního počtu v 17. století a jeho úspěšné využití v nebeské mechanice. Matematika se stala mocným aparátem, který přinášel cenné výsledky v řadě disciplin.

Poznamenejme, že diferenciální a integrální počet byl jazykem klasické dynamiky a tenzorový počet jazykem teorie relativity. Pro kvantovou teorii se velmi brzy jako vhodný aparát ukázala teorie matic (charakteristická rovnice, vlastní čísla, vlastní vektory, transformace k hlavním osám, hermitovské matice atd.), zejména aparát pracující s nekonečnými maticemi a nekonečnými soustavami lineárních rovnic (též transformace k hlavním osám při nekonečném počtu proměnných apod.), skalární součin, unitární prostory, unitární transformace, funkcionální analýza, operátory na Hilbertově prostoru, kvaterniony, Jordanovy algebry atd.

Připomeňme, že prostory, které se dnes nazývají Hilbertovy, byly intenzivně studovány počátkem 20. století (D. Hilbert, E. Schmidt, F. Riesz, E. Hellinger, O. Toeplitz a další). Termín *Hilbertův prostor* se objevil již u Hermanna Weyla, nedlouho poté jej John von Neumann používal v dnešním slova smyslu. Hilbertovy prostory jsou jedním z hlavních témat funkcionální analýzy, užívány jsou v teorii parciálních diferenciálních rovnic a v nejrůznějších aplikacích. Významnou roli hrají právě v kvantové mechanice, kdy jsou stavy kvantové soustavy popsány vektorem Hilbertova prostoru.

V následujících odstavcích se zmíníme o několika monografiích, které prezentovaly matematické teorie a metody určené hlavně pro teoretickou fyziku, zejména ty, které rozvíjely matematické základy kvantové mechaniky. Zcela zásadní roli v nich hraje teorie grup, teorie reprezentací, maticový počet, nekonečně dimenzionální prostory atd. Jedná se o knihy Hermanna Weyla (1928), Aurela Wintnera (1929), Eugena Paula Wignera (1931), Bartela Leenderta van der Waerdena (1932) a Johna von Neumanna (1932).

Během pěti let tedy vyšlo pět knih o matematických základech kvantové mechaniky. Svým zaměřením a cílem volně navázaly na první díl výše zmíněné knihy *Methoden der mathematischen Physik* [CH], který roku 1924 vydali Richard Courant a David Hilbert. Vydání těchto knih dokládá jednak mimořádnou sílu inspirace kvantovou mechanikou, jednak užitečnost těsného sepětí fyziky a matematiky. Fascinující je prudký vývoj, který v této problematice nastal během několika málo let.

## Hermann Weyl

Otázkami prostoru, času a hmoty se intenzivně zabýval Hermann Weyl,<sup>57</sup> fyzikální problematiku chápal úzce spjatou s matematikou. Vnímал ji navíc v širokém filozofickém smyslu. Proslulou se stala jeho kniha *Raum, Zeit, Materie – Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* [We1] z roku 1918; roku 1923 vyšlo již její páté vydání. Velmi zajímavý, zejména z hlediska základů matematiky, je jeho drobnější spis *Das Kontinuum – kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis* [We2] z roku 1918 i jeho knihy *Was ist Materie? – Zwei Aufsätze zur Naturphilosophie* [We3] z roku 1924 a *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* [We4] z roku 1927.

Hermann Weyl se ve druhé polovině dvacátých let začal intenzivně zabývat kvantovou mechanikou a jejím matematickým podložením. V časopisu *Zeitschrift für Physik* publikoval delší článek *Quantenmechanik und Gruppentheorie* [We5]. Roku 1928 podal matematické základy kvantové mechaniky v monografii *Gruppentheorie und Quantenmechanik* [We6], roku 1931 vyšlo její druhé vydání a anglický překlad *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Ukázal zcela zásadní roli, kterou hrají grupy ve fyzice. Weylova kniha je první knihou, která ukazuje úzkou souvislost mezi matematickým aparátem teorie grup a reprezentací unitárních a ortogonálních grup na jedné straně a fyzikou na straně druhé. Je to rovněž jedna z prvních knih o matematických základech kvantové mechaniky vůbec. Od té doby se teorie grup a reprezentací používá ve fyzikálním výzkumu (krystalická struktura pevných látek, kvantová teorii pole atd.).

V úvodu Herman Weyl uvedl motivy, které ho vedly k sepsání knihy:

*The importance of the standpoint afforded by the theory of groups for the discovery of the general laws of quantum theory has of late become more and more apparent. Since I have for some years been deeply concerned with the theory of the representation of continuous groups, it has seemed to me appropriate and important to give an account of the knowledge won by mathematicians working in this field in a form suitable to the requirements of quantum physics.*

([We6], s. vii)

---

<sup>57</sup> Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955), německý matematik, teoretický fyzik a filozof. Studoval na univerzitě v Göttingenu a Mnichově, v Göttingenu navštěvoval přednášky Davida Hilberta a Edmunda Husserla (1859–1938). V letech 1909 až 1913 působil v Göttingenu, v letech 1913 až 1930 na technice v Curychu, kde se seznámil s Albertem Einsteinem a Erwinem Schrödingerem, v období 1930 až 1933 byl opět v Göttingenu a v letech 1933 až 1952 v Princetonu (Institute for Advanced Study). Věnoval se mnoha matematickým tématům, teoretické fyzice a filozofii. Zabýval se problémy základů matematické analýzy, otázkami kontinua. Původně měl blízko k intuicionismu, odmítal axiom výběru, později od těchto názorů ustoupil.

E. Scholz (ed.): *Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a General Introduction to his Scientific Work*, DMV Seminar, Band 30, Birkhäuser, Basel, 2001, vii+402 stran, P. Pesic (ed.): *Hermann Weyl. Mind and Nature: Selected Writings on Philosophy, Mathematics, and Physics*, Princeton University Press, Princeton, 2009, 272 stran, J. Dieudonné: *Weyl, Hermann*, in [Gi]-14, s. 281–285, E. Scholz: *Weyl, Hermann Claus Hugo*, in [Ko]-7, s. 276–279.

Strukturu Weylovy knihy *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* [We6] zachytíme jejím stručným obsahem.

- I. *Unitary Geometry* (s. 1–40).
  - II. *Quantum Theory* (s. 41–109).
  - III. *Groups and their Representations* (s. 110–184).
  - IV. *Application of the Theory of Groups to Quantum Mechanics* (s. 185–280).
  - V. *The Symmetric Permutation Group and the Algebra of Symmetric Transformations* (s. 281–391).
- Appendix. Bibliography. List of Operational Symbols. List of Letters Having a Fixed Significance. Index* (s. 393–422).

V první kapitole autor připravil základní matematický aparát:  $n$ -dimenzionální vektorový prostor, lineární transformace, maticový počet, duální vektorový prostor, skalární součin, unitární transformace, hermitovské formy, vlastní čísla a vlastní vektory, transformace k hlavním osám, infinitesimální transformace, prostory nekonečné dimenze (zde se nesměle objevil termín *Hilbertův prostor*).

Druhá kapitola začíná stručnými úvodními informacemi o kvantové mechanice a o stěžejních myšlenkách jejích tvůrců. Závěrečné odstavce prvního paragrafu prezentují mimo jiné stanovisko autora:

*In 1925 Heisenberg discovered a way in which such an alteration can be naturally accomplished; in order to do this, however, it was necessary to give up the picture of an atom with its electronic orbits. The quantities with which the Heisenberg theory deals are only the frequencies and intensities of radiation associated with transitions between the various states of the atom. ...*

*Another approach to quantum mechanics was discovered by L. de Broglie and E. Schrödinger. This approach seems to me less cogent, but it leads more quickly to the fundamental principles of quantum mechanics and to the most important consequences for experimental science. We shall therefore follow it ...*

([We6], s. 48)

## Aurel Friedrich Wintner

Monografie *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen* [Wi] Aurela Wintnera<sup>58</sup> z roku 1929 má značně speciální charakter. Naznačuje jej jak název

---

<sup>58</sup> Aurel Friedrich Wintner (1903–1958), americký matematik maďarského původu. Vystudoval matematiku a astronomii v Budapešti a Lipsku, kde získal doktorát pod vedením Leona Lichtensteina (1878–1933). Po ročním pobytu v Římě a Kodani pracoval od roku 1930 na Johns Hopkins University v Baltimore, později v Princetonu a v Cambridge. Zabýval se astronomií, nebeskou mechanikou, spektrální teorií lineárních operátorů v souvislostech s kvantovou mechanikou (Hilbertovy prostory), diferenciálními rovnicemi, diferenciální geometrií a počtem pravděpodobnosti. Je autorem více než čtyř stovek prací a několika

knihy, tak její podtitul *Einführung in den analytischen Apparat der Quantenmechanik*. Byla sepsána na základě autorových přednášek v zinném semestru 1927/1928, které konal na univerzitě v Lipsku na malém semináři určeném pro kolegy – fyziky a matematiky – kteří svými přáními témata přednášek ovlivňovali. Fyzikům poskytovala důležitý matematický aparát.

Autorem dvoustránkového úvodu Wintnerovy monografie je Leon Lichtenstein, Wintnerův učitel z Lipska, který zde mimo jiné napsal:

*Durch die neueste an Werner Heisenberg anknüpfende Entwicklung der Quantentheorie hat die von Hilbert begründete, von Hellinger und Toeplitz erfolgreich fortgeführte Theorie der unendlichen Matrizen eine erneute Aktualität gewonnen. Während für die Anwendungen bis dahin in erster Linie die Theorie vollstetiger Formen von Bedeutung war, tritt jetzt gerade die tiefliegende Hilbert-Hellingersche Spektraltheorie beschränkter Formen in den Vordergrund. Die Hermiteschen Formen der Matrizenmechanik sind übrigens nicht einmal beschränkt. Eine lückenlose, mathematisch befriedigende Theorie der quantentheoretischen Matrizen ist zurzeit noch ein Desideratum. An der Weiterentwicklung der Theorie sind, wie wir sehen, Analysis und theoretische Physik in gleichem Maße interessiert. ...*

*Mit den halbbeschränkten Matrizen ist eine mathematisch befriedigende Theorie der quantenmechanischen Matrizen von wasserstoffähnlichem Spektrum gewonnen, während die fastperiodischen Matrizen die klassische Mechanik in die Sprache der unendlichen Matrizen übersetzen.* ([Wi], s. vii–viii)

Wintnerova monografie má šest kapitol, které se dále člení na 120 paragrafů, a dodatek. Základní fakta o maticích, bilineárních formách, kanonických tvarech, hermitovských maticích, unitárních maticích, spektru atd., to vše v konečně mnoha dimenzích, je předmětem první kapitoly. Problematika nekonečných matic začíná ve třetí kapitole uvozující větou:

*Unter einer unendlichen Matrix wollen wir ein quadratisches Schema verstehen, in welchem beide Zeiger von 1 bis  $+\infty$  laufen.* ([Wi], s. 121)

Obsah Wintnerovy monografie je podrobný, umožňuje dobrou orientaci v knize, která bohužel nemá rejstřík. Uvedeme zde jen názvy kapitol:

- I. *Algebraische und formale Grundlagen* (s. 1–73).
- II. *Analytische Hilfsmittel* (s. 74–120).
- III. *Die beschränkten unendlichen Matrizen* (s. 121–153).
- IV. *Theorie der Spektralmatrix* (s. 154–168).
- V. *Spektraltheorie der beschränkten Matrizen* (s. 169–218).

---

knih, připomeňme jeho monografii *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, která vyšla roku 1941 (též roku 1947 a znovu roku 2014).

Viz P. Hartman: *Aurel Wintner*, Journal of the London Mathematical Society 37(1962), s. 483–503, S. Sternberg: *Wintner, Aurel*, in [Gi]-14, s. 453–454.

VI. *Hermitesche nicht beschränkte Matrizen* (s. 218–250).

*Anhang. Skizze einer Spektraltheorie der fastperiodischen Funktionen* (s. 251–272).

Kniha je zakončena zhuštěným osmistránkovým komentovaným přehledem pramenů a další literatury, který je rozdělen na čtyři odstavce: *Endliche Matrizen, Stieltjessche Integrationstheorie u. dgl., Unendliche Matrizen, Radonsche Integrale und normale Spektraltheorie*.

## Eugene Paul Wigner

Další významnou monografií poskytující matematický aparát pro kvantovou mechaniku je kniha *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* [Wig1], jejímž autorem je Eugene Wigner.<sup>59</sup> Vyšla roku 1931, má 24 kapitol, z nichž první tři obsahují základní partie maticového počtu:

- I. *Vektoren und Matrizen* (s. 1–13).
- II. *Verallgemeinerungen* (s. 13–22).
- III. *Hauptachsentransformation* (s. 22–33).

V zasvěceném článku *Eugene Paul Wigner – A Tribute* z roku 1995 ocenil indický teoretický fyzik Narasimhaiengar Mukunda (nar. 1939) Wignerovy výsledky a zmínil se i o jeho knize [Wig1]:

*To quote John A. Wheeler: ‘In the work of Eugene Wigner one sees the basic harmony between the conceptual framework of physics and the structure of the mathematics associated with that physics.’ ...*

*In his book on group theory, Wigner formulated and proved a fundamental theorem concerning the representation of symmetry operations in quantum mechanics. This is a very deep and subtle result ...*

(s. 376, 377)

---

<sup>59</sup> Eugene Paul Wigner (Wigner Jenő Pál, 1902–1995), americký fyzik a matematik maďarského a židovského původu. Studoval na technikách v Budapešti a v Berlíně, poté pracoval jako chemik v Berlíně (Kaiser-Wilhelm-Institut), roku 1927 se stal na doporučení Arnolda Sommerfelda asistentem Davida Hilberta v Göttingenu. Roku 1928 se na technice v Berlíně habilitoval a o dva roky později se stal mimořádným profesorem. Od roku 1930 byl v Princetonu, vzhledem k nástupu fašismu se do Německa již nevrátil. Roku 1937/1938 působil ve Wisconsinu, v letech 1938 až 1971 byl řádným profesorem matematické fyziky na univerzitě v Princetonu. Je autorem či spoluautorem monografií *Nuclear Structure* (s Leonardem Eisenbuntem, 1958), *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors* (s Alvinem M. Weinbergem, 1958), *Symmetries and Reflections – Scientific Essays* (1967). Nobelovu cenu za výsledky týkající se atomového jádra, elementárních částic a studium principů symetrie v kvantové mechanice získal roku 1963.

Viz N. Mukunda: *Eugene Paul Wigner – A Tribute*, Current Science 69(1995), s. 375–385, A. Szanton: *The Recollections of Eugene P. Wigner as Told To Andrew Szanton*, Springer Science+Business Media, LLC, 2013, xxiv+335 stran.



Wigner se intenzivně zabýval matematickým vyjádřením principů kvantové mechaniky, zejména jejími algebraickými aspekty. Spolupracoval s Johnem von Neumannem a Pascuaelem Jordanem, připomeňme jejich společnou práci *On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism* [JNW], která vyšla roku 1934 v *Annals of Mathematics*.

V článku *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* [Wig2] z roku 1960 Wigner zdůraznil, že matematická struktura fyzikální teorie často ukazuje nejen cestu k dalšímu jejímu pokroku, ale dokonce vede k empirickým předpovědím.

### Bartel Leendert van der Waerden

Matematickými základy kvantové mechaniky se zabýval i Bartel Leendert van der Waerden.<sup>60</sup> V letech 1930 a 1931 vydal ve známé edici *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* dva díly své monografie *Moderne Algebra* [Wa1], která významným způsobem ovlivnila vývoj algebry ve 20. století. Je mimořádně zajímavé, že již v následujícím roce, tehdy devětadvacetiletý, vydal ve stejné edici monografii *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* [Wa2]. V předchozích letech se totiž věnoval nejen matematice (hlavně algebře), ale i teoretické fyzice. Intenzivně sledoval problémy bouřlivě se rozvíjející kvantové mechaniky, která ho uchvátíla.

V předmluvě své monografie doporučil pro hlubší seznámení s teorií reprezentací symetrické grupy druhé vydání Weylovy knihy *Gruppentheorie und Quantenmechanik* [We6] z roku 1931.<sup>61</sup> Zmínil se i o nedávném vydání Wignerovy knihy *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* [Wig1].

Strukturu van der Waerdenovy knihy vystihují názvy jejích šesti kapitol:

1. *Quantenmechanische Einleitung* (s. 1–23).
2. *Gruppen und ihre Darstellungen* (s. 23–57).
3. *Drehungsgruppe und Lorentzgruppe* (s. 57–87).
4. *Das Spinning Elektron* (s. 87–108).

---

<sup>60</sup> Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996), holandský matematik a historik matematiky. V letech 1919 až 1927 studoval na univerzitách v Amsterdamu, v Göttingenu a v Hamburku, kde se roku 1928 habilitoval. Od roku 1928 byl profesorem v Groningenu, v letech 1931 až 1945 v Lipsku. Nacistické Německo neopustil, i když měl možnost odejít do Princetonu, resp. Utrechtu. Od roku 1950 působil na univerzitě v Amsterdamu, od roku 1951 na univerzitě v Curychu. Věnoval se hlavně moderní algebře, algebraické geometrii, pravděpodobnosti a statistice a kvantové mechanice.

A. Soifer: *The Scholar and the State. In Search of Van der Waerden*, Birkhäuser, Basel, 2015, xxix+471 stran, A. Soifer: *The Mathematical Coloring Book*, Springer-Verlag, New York, 2009, xxx+607 stran. O životě a díle van der Waerdena, zejména pak o jeho přednáškách o teorii ideálů na matematickém institutu v Göttingenu, viz [BeB].

<sup>61</sup> Van der Waerden napsal na tuto Weylovu knihu krátkou recenzi – viz *Zentralblatt der Mathematik und ihre Grenzgebiete* 1(1931), č. 2, s. 175 (Zbl 0001.17501).

5. *Die Permutationsgruppe und das Pauliverbot* (s. 109–135).

6. *Molekülspektren* (s. 135–157).

Van der Waerden ve své knize pracuje kromě jiného s unitárním prostorem, lineárními operátory, kterým přiřazuje matice, s hermitovskými formami a jejich diagonálním tvarem (transformace k hlavním osám), s unitárními maticemi, s charakteristickou rovnicí atd. V poznámkách pod čarou je uvedena řada bibliografických odkazů na výsledky prací Borna, Diraca, Heisenberga, Heitlera, Hunda, Jordana, Kramerse, de Kroniga, Londona, von Neumanna, Pauliho, Slatera, Schrödingera, Weyla, Wignera a dalších fyziků.

Poznamenejme, že van der Waerden vydal roku 1967 knihu *Sources of Quantum Mechanics* [Wa4], v níž soustředil (v anglické verzi) důležité práce týkající se vzniku kvantové mechaniky. První část nazvaná *Towards Quantum Mechanics* obsahuje jedenáct prací (Einstein, Ehrenfest, Bohr, Ladenburg, Bohr-Kramers-Slater, Kramers, Born, Kramers, Van Vleck, Kramers-Heisenberg, Kuhn), druhá část *The Birth of Quantum Mechanics* je kolekcí šesti prací ([He1], [BJ1], [Di1], [BHI1], [Pa], [Di2]). V úvodní stati (s. 1–59) van der Waerden podal podrobný a zasvěcený komentář k přetištěným sedmnácti pracím, který rovněž reflektuje komunikaci mezi jednotlivými autory (osobní i korespondenční). Zajímavé je, že v druhé části *The Birth of Quantum Mechanics* shromáždil a komentoval pouze maticovou mechaniku; práce de Broglieovy a Schrödingerovy, na nichž byla postavena vlnová mechanika, zde nejsou.

O odborných zájmech van der Waerdena vyšla nedávno zajímavá kniha *Zwischen zwei Disziplinen: B. L. van der Waerden und die Entwicklung der Quantenmechanik* [Schn], kterou sepsala Martina Schneider.

## John von Neumann

Matematická podpora kvantové teorie byla vyjádřena i v knize Johna von Neumanna<sup>62</sup> *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [vN]. Vyšla

---

<sup>62</sup> John (János) von Neumann (1903–1957), americký matematik maďarského původu. Od roku 1921 studoval chemii v Berlíně, poté v Curychu, kde absolvoval roku 1926, současně získal v Budapešti doktorát z matematiky. Na studijním pobytu v Göttingenu poznal tehdejší elitu matematiky a fyziky. V letech 1927 až 1933 působil jako soukromý docent v Berlíně a Hamburku. Roku 1930 hostoval v Princetonu, o tři roky později ho zde přijali na profesorské místo na nově založený Institute for Advanced Study. Od roku 1943 byl konzultantem projektu atomové bomby. V období 1951/1952 byl prezidentem Americké matematické společnosti. Výrazně zasáhl do několika matematických disciplin. Věnoval se otázkám základů matematiky, kvantové mechanice, teorii her, neuronovým sítím, funkcionální analýze, matematickým metodám ekonomie, automatům, počítačům atd.

Viz S. Ulam: *John von Neumann, 1903–1957*, Bulletin of the American Mathematical Society 64(1958), s. 1–49, L. van Hove: *Von Neumann's Contributions to Quantum Theory*, ibid., 64(1958), s. 95–99, F. Smithies: *John von Neumann*, Journal of the London Mathematical Society 34(1959), s. 373–384, P. R. Halmos: *The Legend of John von Neumann*, The American Mathematical Monthly 80(1973), s. 382–394, T. Legendi, T. Szentivanyi (eds.): *Leben und Werk von John von Neumann. Ein zusammenfassender Überblick*, Bibliographisches Institut,

roku 1932 jako 38. svazek edice Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, v níž byla vydána jako 36. svazek, a to ve stejném roce, kniha *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* [Wa2] van der Waerdena. Tato skutečnost ukazuje tehdejší mimořádný zájem o matematické základy teoretické fyziky, zejména kvantové mechaniky. Von Neumannova kniha byla později vydána v anglickém a ruském překladu.

V úvodu John von Neuman napsal:

*Der Gegenstand dieses Buches ist die einheitliche, und, soweit als möglich und angebracht, mathematisch einwandfreie Darstellung der neuen Quantenmechanik, die im Laufe der letzten Jahre eine in ihren wesentlichen Teilen voraussichtlich definitive Form gewonnen hat: die sog. „Transformations-theorie“.* . . .

*Anderseits wird eine Darstellung der für die Zwecke dieser Theorie notwendigen mathematischen Hilfsmittel gegeben, d.h. eine Theorie des Hilbertschen Raumes und der sog. Hermiteschen Operatoren desselben. Dabei ist ein genaues Eingehen auch auf unbeschränkte Operatoren notwendig, d.h. eine Erweiterung der Theorie über ihren klassischen . . . Umfang hinaus. Zur Methodik dieser Behandlungsweise sei Folgendes gesagt: es soll in der Regel mit den Operatoren selbst (die physikalische Größen repräsentieren) gerechnet werden, und nicht mit den Matrizen, welche erst nach Einführung eines (speziellen und willkürlichen) Koordinatensystems im Hilbertschen Raume aus ihnen entstehen. Diese „koordinatenfreie“, d.h. invariante, und stark geometrisch orientierte Behandlungsweise ist mit beträchtlichen formalen Vorteilen verbunden.*

([vN], s. 1–2)

Kniha má šest kapitol, které se člení na paragrafy.

- I. *Einleitende Betrachtungen* (s. 4–18).
  - II. *Allgemeines über den abstrakten Hilbertschen Raum* (s. 18–101).
  - II. *Die quantenmechanische Statistik* (s. 101–157).
  - IV. *Deduktiver Aufbau der Theorie* (s. 157–184).
  - V. *Allgemeine Betrachtungen* (s. 184–222).
  - VI. *Der Meßprozeß* (s. 222–237).
- Anmerkungen. Index* (s. 238–366).

Zdůrazněme, že John von Neumann postavil matematické základy kvantové mechaniky na pojmech Hilbertův prostor a hermitovský operátor, jak uvedl již v úvodu své knihy (viz výše).

---

Mannheim, Wien, Zürich, 1983, 150 stran, N. MacRae: *John Von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More*, Pantheon Books, 1992, 405 stran, 2. vydání: American Mathematical Society, 1999, 406 stran, D. Szász: *John von Neumann, the Mathematician*, The Mathematical Intelligencer 33(2011), č. 2, s. 42–51, J. Dieudonné: *Von Neumann, Johann (or John)*, in [Gi]-14 1981, s. 88–92.

## 7. Tvůrci kvantové mechaniky o kvantech a moderní fyzice

Nedlouho po zveřejnění prací obsahujících významné výsledky kvantové mechaniky (Heisenberg, Born, Jordan, Dirac, de Broglie, Schrödinger a další – viz předchozí text) byly vydány monografie shrnující a rozšiřující dosažené poznatky, uváděné navíc v širším kontextu. Byly někdy více, někdy méně postaveny na potřebných matematických základech, podstatnou roli v nich hraje moderní matematika: maticový počet, teorie grup, teorie reprezentací, operátory v Hilbertově prostoru atd. Tvůrci maticové i vlnové kvantové mechaniky prezentovali intenzivně a velmi pohotově nové myšlenky v monografiích, učebnicích i knihách popularizačních. Široká fyzikální obec i odborná veřejnost dychtila po nových výsledcích a nových, mimořádně překvapivých a vzrušujících pohledech na svět, který nás obklopuje.

### Werner Heisenberg

Roku 1930 byla vydána kniha Wernera Heisenberga nazvaná *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* [He2], která vycházela z jeho nedávných přednášek. V úvodu autor uvedl motivy, které ho k jejímu sepsání vedly:

*Die Vorlesungen, die ich im Frühjahr 1929 an der Universität in Chicago zu halten hatte, gaben mir die Gelegenheit, noch einmal die Prinzipien der Quantentheorie zusammenfassend zu behandeln. ... manche neue Experimente haben wichtige Konsequenzen der Theorie bestätigt ... Trotzdem findet man noch heute bei vielen Physikern mehr eine Art Glauben an die Richtigkeit der neuen Prinzipien, denn ein klares Verständnis, und deswegen schien es mir gerechtfertigt, die in Chicago gehaltenen Vorlesungen in Form eines kleinen Buches herauszugeben.*

([He2], s. v)

Na počátku čtvrté kapitoly *Die statistische Deutung der Quantentheorie* je srovnán matematický aparát kvantové fyziky a teorie relativity:

*Es ist lehrreich, den mathematischen Apparat der Quantentheorie mit dem der Relativitätstheorie zu vergleichen. In beiden Fällen handelt es sich um die Anwendung der linearen Algebra; man kann also die Matrizen der Quantentheorie vergleichen mit den symmetrischen Tensoren der speziellen Relativitätstheorie; als die wesentlichsten Unterschiede muß man hervorheben, daß der Raum, der zu den quantentheoretischen Tensoren gehört, unendlich viele Dimensionen hat; ferner, daß dieser Raum nicht reell ist, an Stelle der orthogonalen Transformationen treten die sog. unitären Transformationen.*

([He2], s. 42)

Heisenberg pracuje s maticemi, a to v celé závěrečné části nazvané *Der mathematische Apparat der Quantentheorie* (s. 78–113). Vrcholí předposledním paragrafem *Beweis der mathematischen Äquivalenz der Quantentheorie des Partikelbildes und der Quantentheorie des Wellenbildes*, který končí takto:

*Obwohl die klassischen Theorien von Partikelbild und Wellenbild absolut verschieden sind, sowohl in ihrem mathematischen wie in ihrem physikalischen Gehalt, sind die Quantentheorien der beiden Vorstellungen mathematisch und physikalisch identisch.*

([He2], s. 112)

Připomeňme ještě některé pozdější Heisenbergovy inspirativní knížky:

- *Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft* [He3] z roku 1935,
- *Vorträge über kosmische Strahlung* [He4] z roku 1943,
- *Die Physik der Atomkerne: acht Vorträge* [He5] z roku 1943, jejímž základem byly přednášky konané na popud Sdružení německých elektrotechniků,
- *Physics and Philosophy. The Revolution in Modern Science* [He6] z roku 1958, která vyšla v následujícím roce německy a roku 1966 (a též roku 2000) v českém překladu,
- *Die kopenhagener Deutung der Quantentheorie* [He7] z roku 1963,
- *Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles* [He8] z roku 1966,
- *Der Teil und das Ganze: Gespräche im Umkreis der Atomphysik* [He9] z roku 1969, kterou máme rovněž od roku 1997 v českém překladu,
- *Schritte über Grenzen. Gesammelte Reden und Aufsätze* [He10] z roku 1971.

## Max Born

Max Born vydal roku 1926 knihu *Probleme der Atomdynamik*, 1. *Die struktur des Atoms*, 2. *Die Gittertheorie des festen Zustandes* [Bo2], v níž zpracoval třicet přednášek ze zimního semestru akademického roku 1925/1926, které pronesl na Massachusetts Institute of Technology.<sup>63</sup>

Roku 1930 publikoval spolu s Pascuaelem Jordanem knihu *Elementare Quantenmechanik* [BJ2]. Byla druhým dílem k učebnímu textu *Vorlesungen über Atommechanik* [BH], který Born vydal roku 1925 s Friedrichem Hundem.<sup>64</sup>

<sup>63</sup> Poznamenejme, že již roku 1920 publikoval Born knihu *Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen gemeinverständlich dargestellt*.

<sup>64</sup> Friedrich Hermann Hund (1896–1997), německý fyzik. Studoval v Marburgu a Göttingenu, působil na univerzitách v Rostocku, Lipsku, Jeně, Frankfurtu nad Mohanem a v Göttingenu. Spolupracoval s řadou významných fyziků (Schrödinger, Dirac, Heisenberg, Born, Bothe atd.). Věnoval se zejména kvantové teorii. Je autorem pětisvazkové učebnice *Einführung in die theoretische Physik*, 1. *Mechanik*, 2. *Theorie der Elektrizität und des Magnetismus*, 3. *Optik*, 4. *Theorie der Wärme*, 5. *Atom- und Quantentheorie*, Meyers Kleine Handbücher, Bibliographisches Institut, Leipzig, 1945 až 1951, a úspěšné, vícekrát vydávané třisvazkové monografie *Theoretische Physik*, 1. *Mechanik*, 2. *Theorie der Elektrizität und des Lichts, Relativitätstheorie*, 3. *Wärmelehre und Quantentheorie*, Teubner, Stuttgart, 1956, 1957.

Viz H. Rechenberg: *Obituary: Friedrich Hund*, *Physics Today* 50(1997), č. 10, s. 126–127.

Roku 1933 Born publikoval učebnici *Moderne Physik* [Bo3], kterou sepsal na základě svých přednášek na technice v Berlíně-Charlottenburgu. Anglicky vyšla pod názvem *Atomic Physics* roku 1935; byla mimořádně úspěšná, jak dokládá řada dalších vydání a dotisků. Maticové a vlnové mechanice je věnován 3. a 4. paragraf páté kapitoly *Atomic Structure and Special Lines*. Základní myšlenka maticové mechaniky je prezentována takto:

*On this account we do not consider matrix mechanics in any detail, but content ourselves with some brief indications. If we start from the frequencies*

$$\nu_{nm} = \frac{E_n}{h} - \frac{E_m}{h},$$

*as observable quantities, it is a natural suggestion that we arrange them in square array as follows:*

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \nu_{11} = 0 & \nu_{12} & \nu_{13} & \dots \\ \nu_{21} & \nu_{22} = 0 & \nu_{23} & \dots \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} = 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}.$$

*If now we adhere to the arrangement in this scheme once for all, so that, say, the place in the fourth row and the second column is always associated with the transition from the fourth to the second quantum state, then we can also set out in similar square array the amplitudes  $a_{nm}$  of the “virtual resonators” associated with the various frequencies emitted, where  $a_{nm}^2$  then denotes the intensity of the frequency emitted:*

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}.$$

*Similarly we can insert in an array of this kind other quantities connected with the transition  $n \rightarrow m$ .*

*The question now is: how do we calculate with these arrays? Here the following remark of Heisenberg’s is useful: if we multiply two vibrational factors  $a_{nk} = e^{2\pi i\nu_{nk}t}$  and  $b_{km} = e^{2\pi i\nu_{km}t}$ , then by Ritz’s combination principle we get*

$$e^{2\pi i\nu_{nk}t} e^{2\pi i\nu_{km}t} = e^{2\pi i(\nu_{nk} + \nu_{km})t} = e^{2\pi i\nu_{nm}t},$$

*which is a vibrational factor belonging to the same array, so that by the method specified for forming a product, we merely pass to another place in the square array, in conformity with the rule assigning places. We can proceed to define the product of two such arrays, in such a way that product is again a square array of the same type. The multiplication rule, which Heisenberg deduced solely from experimental facts, runs:*

$$(a_{nm})(b_{nm}) = \left( \sum_k a_{nk} b_{km} \right).$$

*It was remarked by Born and Jordan that this rule for multiplication is identical with one which has long been known in mathematics as the rule for forming the product of two “matrices”, such as occur in the theory of linear transformations and the theory of determinants. We may therefore regard Heisenberg’s square arrays as infinite matrices, and calculate with them by the known rules of the theory of matrices.*

([Bo3], 6. vydání, s. 128–130)

Roku 1956 vydal Born knížku *Physics in my Generation: a Selection of Papers* [Bo4], v níž shromáždil některé své dřívější eseje: *Introduction to ‘Einstein’s Theory of Relativity’, Physical Aspects of Quantum Mechanics, On the Meaning of Physical Theories, Cause, Purpose and Economy in Natural Laws a Einstein’s Statistical Theories*. O rok později publikoval knížku *Physik im Wandel meiner Zeit* [Bo5], v níž kvantové mechanice věnoval několik kapitol:

- *Quantenmechanik und Statistik* (s. 6–14).
- *Über die Bedeutung der Stoßvorgänge für das Verständnis der Quantenmechanik* (s. 15–17).
- *Die Interpretation der Quantenmechanik* (s. 132–144).
- *Die statistische Deutung der Quantenmechanik* (s. 173–184).

Roku 1962 Max Born publikoval knihu *Zur statistische Deutung der Quantentheorie* [Bo6], roku 1975 knihy *Zur Begründung der Matrizenmechanik* [Bo7] a *Mein Leben. Die Erinnerungen des Nobelpreisträgers* [Bo9]. Ve dvou svazcích byly roku 1963 vydány některé jeho práce pod názvem *Ausgewählte Abhandlungen* [Bo8].

## Pascual Jordan

Rovněž Pascual Jordan je autorem několika knih o moderní fyzice. Již jsme připomněli titul *Elementare Quantenmechanik* [BJ2] z roku 1930, který sepsal s Maxem Bornem. Roku 1962 vydal s Bornem a Heisenbergem knihu *Zur Begründung der Matrizenmechanik* [BHJ2]. Samostatně publikoval několik zajímavých knížek v edici *Die Wissenschaft* v nakladatelství Vieweg v Braunschweigu (svazky 87, 88, 95, 99, 107, 110, 124):

- *Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage* [Jo1], 1933.
- *Die Physik des 20. Jahrhunderts. Einführung in den Gedankeninhalt der modernen Physik* [Jo2], 1936.
- *Die Physik und das Geheimnis des organischen Lebens* [Jo3], 1941.
- *Physik im Vordringen* [Jo4], 1949.
- *Schwerkraft und Weltall. Grundlagen der theoretischen Kosmologie* [Jo5], 1952.
- *Atom und Weltall. Einführung in den Gedankeninhalt der modernen Physik* [Jo6], 1956 [jedná se o rozšířený svazek *Die Physik des 20. Jahrhunderts*].

– *Die Expansion der Erde: Folgerungen aus der Diracschen Gravitationshypothese* [Jo7], 1966.

Roku 1971 vydal Jordan knihu *Begegnungen* [Jo8] věnovanou významným fyzikům, které poznal (Albert Einstein, Karl Heim, Hermann Oberth, Wolfgang Pauli, Walter Heitler, Max Born, Werner Heisenberg, Max von Laue a Niels Bohr).

## Paul Dirac

Úplný výklad obecného formalismu kvantové mechaniky v axiomatickém pojetí, který byl založen na prvotních pojmech *pozorovatelná veličina a stav*, podal roku 1930 Paul Dirac v monografii *Die Prinzipien der Quantenmechanik* [Di3], která byla současně vydána anglicky. Měla velký úspěch, vyšla v několika vydáních a překladech. I tato kniha pracuje s maticemi. V předmluvě autor uvedl:

*Hinsichtlich des mathematischen Gewandes, in dem die Theorie dargeboten werden kann, muß sich der Verfasser eines Buches über die Quantenmechanik von vornherein zwischen zwei Möglichkeiten entscheiden. Es gibt einerseits eine symbolische Darstellung der Theorie, die unmittelbar mit den Grundgrößen (den Transformationsinvarianten usw.) arbeitet, die sie durch abstrakte Symbole bezeichnet, und es gibt die Darstellung mit Hilfe von Koordinaten, in der Zahlensysteme gebraucht werden, die den Grundgrößen zugeordnet werden. Dieses zweite Verfahren ist für gewöhnlich benutzt worden, um die Quantenmechanik zu entwickeln (es ist sogar, von Weyls Buch „Gruppentheorie und Quantenmechanik“ abgesehen, fast ausschließlich benutzt worden). Dies Verfahren wird entweder als Wellenmechanik oder als Matrizenmechanik bezeichnet, je nachdem auf welche physikalischen Dinge die betreffende Abhandlung mehr Nachdruck legt, auf die Zustände der physikalischen Gebilde oder ihre dynamischen Variablen. Diese Art der Darstellung hat den Vorzug, daß die dabei benutzte Mathematik dem Durchschnittsstudenten vertrauter ist, und außerdem ist sie die Form, in der sich die Theorie historisch entwickelt hat.*

([Di3], s. vi)

Dirac v této monografii elegantně shrnul jak Heisenbergovu maticovou mechaniku, tak Schrödingerovu vlnovou mechaniku a dal jim jednotící matematický popis, v němž jsou měřitelné fyzikální veličiny reprezentovány operátory působícími na Hilbertově prostoru vlnových funkcí – v kvantové teorii popisují stav fyzikálního systému. Nejdůležitější informace o základních myšlenkách maticové i vlnové mechaniky jsou s nezbytným matematickým aparátem v následujících paragrafech:

20. *Allgemeine Eigenschaften* (s. 57–62).
21. *Orthogonale Darstellungen* (s. 62–65).
34. *Die Schrödingersche Form der Quantenbedingungen* (s. 103–109).
38. *Die Heisenbergschen Matrizen* (s. 119–122).



Na Diracovu monografii velmi dobře navázala a vhodně ji doplnila von Neumannova kniha *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [vN], která vyšla o dva roky později.

Roku 1964 publikoval Paul Dirac drobnější knížku *Lectures on Quantum Mechanics* [Di4]. O deset let později vydal útlou knížku *Spinors in Hilbert Space* [Di5], která je věnována matematickému tématu nezbytnému pro kvantovou teorii. Přednášky, které měl v létě roku 1975 v Austrálii a na Novém Zélandu, vyšly roku 1978 pod názvem *Directions in Physics* [Di6].

Paul Dirac se celý život zabýval moderní fyzikou, kromě kvantové mechaniky hlavně teorií relativity a kvantovou teorií pole. I tyto dvě disciplíny zpracoval v knižní podobě – jedná se o tituly *Lectures on Quantum Field Theory* (1966) a *General Theory of Relativity* (1975).

Doplňme ještě přehled knižních publikací tvůrců kvantové mechaniky o titul *Die moderne Atomtheorie* [MoAt] z roku 1934. Jedná se o přednášky, které pronesli Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger a Paul Dirac ve Stockholmu roku 1933 u příležitosti převzetí Nobelovy ceny.<sup>65</sup>

- W. Heisenberg: *Die Entwicklung der Quantenmechanik*.
- E. Schrödinger: *Der Grundgedanke der Wellenmechanik*.
- P. Dirac: *Theorie der Elektronen und Positronen*.

## Louis de Broglie

Louis de Broglie byl velmi aktivní a úspěšný fyzik, který vnímal širší filozofický kontext své vědy. Napsal asi 150 vědeckých prací, vydal několik desítek svých přednášek, statí obecnějšího charakteru, nejrůznějších drobnějších článků a navíc řadu knih. Některé, přestože byly věnovány moderní fyzice, měly výrazný přesah do filozofie vědy. Zajímavé je, že právě ty byly překládány častěji než jeho knihy věnované výhradně fyzice. Uvedme alespoň některé tituly, které Louis de Broglie vydal během svého dlouhého a plodného života.

V první řadě připomeňme jeho inspirativní doktorskou práci *Recherches sur la théorie des quanta* [Br2] z listopadu roku 1924, která byla publikována v následujícím roce a roku 1927 vydána německy v Lipsku pod názvem *Untersuchungen zur Quantentheorie*.

V druhé polovině dvacátých let de Broglie sepsal a vydal knihy *Ondes et mouvements* [Br3], *La mécanique ondulatoire* [Br4] a *Recueil d'exposés sur les ondes et corpuscules* [Br6], roku 1930 učebnici *Introduction à l'étude de la mécanique ondulatoire* [Br5], jejíž německá verze vyšla v Lipsku roku 1929 pod názvem *Einführung in die Wellenmechanik*, a anglická *An Introduction to the Study of Wave Mechanics* již roku 1928. Mimořádně plodný byl i v dalších letech. Uvedme pouze několik titulů, zejména ty, které byly přeloženy do angličtiny či jiných jazyků:

<sup>65</sup> Hirzel, Leipzig, 1934, i+45 stran.

- *De la mécanique ondulatoire. A la théorie du noyau I., II., III.* [Br10], 1943 až 1946.
- *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire: la théorie de la double solution* [Br13], 1956.
- *Introduction a la nouvelle théorie des particules de M Jean-Pierre Vigièr et de ses collaborateurs* [Br16], 1961.
- *Étude critique des bases de l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire* [Br17], 1963.

De Broglie rovněž sepsal řadu knih na rozhraní fyziky, filozofie a popularizace fyziky i vědy. Vycházely opakovaně, byly překládány do dalších jazyků:

- *Matiere et lumiere* [Br7], 1937.
- *La physique nouvelle et les quanta* [Br8], 1937.
- *Continu et discontinu en physique moderne* [Br9], 1941.
- *Physique et microphysique* [Br11], 1947.
- *Savants et decouvertes* [Br12], 1951.
- *Perspectives nouvelles en microphysique* [Br14], 1956.
- *Sur les sentiers de la science* [Br15], 1960.
- *Certitudes et incertitudes de la science* [Br19], 1966.
- *Recherches d'un demi-siècle* [Br19], 1976.

Jak již bylo uvedeno, roku 1937 vydal Louis de Broglie knihu *La physique nouvelle et les quanta* [Br8], která vyšla roku 1953 (mírně aktualizovaná a doplněná) v anglické verzi pod názvem *The Revolution in Physics. A Non-Mathematical Survey of Quanta*. Vyšla též italsky a rusky. Nejdůležitější fakta o vývoji kvantové mechaniky shrnul Louis de Broglie v její osmé a deváté kapitole – *Wave Mechanics* a *Heisenberg's Quantum Mechanics*. Ocitujme zajímavé odstavce z anglické verze této knížky:

*To Erwin Schrödinger came the distinction of being the first, in his magnificent papers that appeared in 1926, to write out explicitly the wave equation of wave mechanics and to have deduced from it a rigorous method of studying the problems of quantization.*

*We must introduce into our calculations only those elements related to these observable realities. This was the program which Heisenberg wanted to accomplish. In his matrices, the elements are arranged in rows and columns, each one of them being specified by two indices which give the number of the row and the number of the column. The diagonal elements, i.e., those whose indices are equal, correspond to a stationary state; the non-diagonal elements, whose two indices are different, correspond to the transition between the stationary states defined by these indices. ...*

*Heisenberg, then, started out with the idea of substituting tables of numbers, matrices, for the physical quantities that are usually dealt with in atomic theory. Guided by the method of correspondence, he first sought to establish rules for the addition and multiplication of these various matrices, each of which is considered as a single mathematical entity. He found that these rules for addition and multiplication are exactly the same as those for the matrices that mathematicians had been used to using in the theory of algebraic equations or in that of linear substitutions. . . .*

*The idea which directed Schrödinger in his work was that it must be possible to construct, by means of the wave functions of wave mechanics, quantities having the properties of the matrices of quantum mechanics. Quantum mechanics will then seem to be a method permitting us to calculate these quantities and to operate on them without passing explicitly through the intermediary of the wave function. . . .*

*Thus, the two forms of the new mechanics turn out to be reducible to each other, and it is not longer surprising that they lead to the same results in problems of quantization. The method of quantum mechanics, which works directly with matrices without passing through the intermediary of the wave functions, is more compact and often leads more quickly to the desired results. But the method of wave mechanics, better fitted to the intuition of physicists and more in agreement with their habits of thought, seems more natural at first, and easier to handle. Actually, more physicists make use of the wave method and make their calculations by using explicitly the wave functions.*

([Br8], s. 168, 189, 190, 192–193, 195)

U příležitosti devadesátých narozenin Louise de Broglie byla vydána – jako třetí svazek edice *Fundamental Theories of Physics* – velká publikace *The Wave-Particle Dualism. A Tribute to Louis de Broglie on his 90th Birthday* [DFLS].

## Erwin Schrödinger

Erwin Schrödinger, stejně jako ostatní tvůrci kvantové mechaniky, je autorem řady knižních publikací. Jeho prvním větším dílem je kniha *Abhandlungen zu Wellenmechanik* [Sch6] z roku 1927, která se o rok později dočkala druhého, rozšířeného vydání. O rok později vyšla jeho útlá brožura *Four Lectures on Wave Mechanics* [Sch7] s přednáškami, které proslovil v březnu roku 1928 na Royal Institution v Londýně, a to i v německé verzi jako *Vier Vorlesungen über Wellenmechanik*.

Roku 1932 vydal Schrödinger texty dvou přednášek týkajících se kritiky přírodovědných poznatků pod názvem *Über Indeterminismus in der Physik. Ist die Naturwissenschaft milieubedingt?* [Sch8], roku 1946 text seminárních přednášek *Statistical Thermodynamic* [Sch10] a roku 1963 knihu *Die Wellenmechanik* [Sch17].

Schrödinger je autorem vysoce podnětných statí z popularizace fyziky, přírodovědy a filozofie vědy. Rodily se mimo jiné z přednášek, které měl pro veřejnost v Dublinu. Dodnes jsou velmi zajímavé jeho pohledy, tj. názory vynikajícího fyzika a filozofa, na fyziku, přírodní zákony, vědu, svět a život. Jedná se o následující tituly, které vyšly v rozpětí dvou desítek let, byly opakovaně vydávány a překládány.

- *What is Life? The Physical Aspect of the Living Cell* [Sch9], 1944.
- *Space-time structure* [Sch11], 1950.
- *Science and Humanism. Physics in Our Time* [Sch12], 1951.
- *Nature and the Greeks* [Sch13], 1954.
- *Expanding Universes* [Sch14], 1956.
- *Mind and Matter* [Sch15], 1958.
- *Was ist Naturgesetz? Beiträge zum naturwissenschaftlichen Weltbild* [Sch16], 1962.
- *Meine Weltansicht* [Sch18], 1963.
- *Mein Leben. Meine Weltansicht* [Sch19], 1985.

V českém překladu vyšly roku 2004 nejdůležitější Schrödingerovy statí v knížce *Co je život. Duch a hmota. K mému životu*.<sup>66</sup>

Upozorněme ještě na objemnou publikaci Michela Bitbola *Erwin Schrödinger: Philosophy and the Birth of Quantum Mechanics* [Bi] z roku 1992, v níž čtenář kromě biografických informací najde fakta o přínosu Schrödingerových prací z atomové fyziky, o vzniku vlnové mechaniky, o dialogu mezi Schrödingerem a fyziky působícími v Göttingenu apod.

Roger Penrose (nar. 1931), světoznámý anglický matematik a teoretický fyzik (obecná teorie relativity, astrofyzika, kosmologie, pseudoinverzní matice, Penroseovo dláždění atd.), nositel Nobelovy ceny z roku 2020, o Schrödingerových pracích napsal:

*Když jsem byl počátkem padesátých let mladým studentem matematiky, nečetl jsem mnoho, ale co jsem četl – aspoň pokud jsem knihu dočetl –, bylo obvykle od Erwina Schrödingera. Jeho psaní jsem shledával vždy přesvědčivé, vyvolávající objevené vzrušení a doprovázené výhledem na zcela nové chápání záhadného světa, v němž žijeme. Žádný z jeho spisů nepředčí v tomto ohledu jeho stručné klasické dílo *Co je život?, které patří – jak nyní vidím – nepochybně mezi nejuživnější vědecké spisy tohoto století. Je to působivý pokus pochopit některé z podstatných záhad života ...**<sup>67</sup>

<sup>66</sup> VUTIAM, Brno, 2004, 2006, 254 stran, 2. vydání: 2018, 289 stran.

<sup>67</sup> E. Schrödinger: *Co je život? Duch a hmota. K mému životu*, Vutium, Brno, 2004, 254 stran, citát ze s. 27.

## 8. Učebnice a monografie – třicátá léta

V prvních třech desetiletích 20. století se základní fakta o maticích objevila jen v několika učebnicích (zejména [Bó], [Bec], [D1], [D2]). Byly úspěšné, oblíbené a široce užívané, proto povědomí o maticích a o maticovém vyjádření výsledků, které byly dříve formulovány v řeči bilineárních a kvadratických forem či v řeči transformací, postupně narůstalo. Termín matice se v názvu učebnic a monografií do poloviny dvacátých let nevyskytoval – výjimkou je snad jen Cullisova třídílná rozsáhlá monografie *Matrices and Determinoids* [Cu] z let 1913 až 1925. Od poloviny dvacátých let byly základní poznatky o maticích obsaženy rovněž v učebnicích a monografiích prezentujících matematický aparát potřebný zejména ve fyzice, ale i v jiných aplikacích (zejména [CH], [Wa2], [Wi], [Wig1]).

Ve třicátých letech již bylo vydáno několik monografií věnovaných výhradně teorii matic ([TA], [ScSp2], [MD1], [Wed]). Měly velký ohlas, vycházely v dalších vydáních a dotiscích, užívány jsou dodnes. Dokumentují významný fakt: teorie matic se ve třicátých letech 20. století stala klasickou matematickou disciplinou.

### Bohumil Bydžovský

Pro českého čtenáře je zajímavé, že se roku 1930 objevila na knižním trhu půvabná knížka *Základy teorie determinantů a matic a jich užití* [By] od Bohumila Bydžovského.<sup>68</sup> Autor tehdy považoval za nutné zdůvodnit, proč vedle determinantů věnuje ve své učebnici pozornost rovněž maticím. V předmluvě uvedl:

*Od běžných učebnic jednajících o determinantech se liší tato tím, že obsahuje základy počtu maticového; je to odůvodněno velkou důležitostí, které nabyl tento počet v posledních letech svou účinnou a hospodárnou symbolikou.*

([By], s. iii)

Determinanty však v Bydžovského knížce dominují; je jim věnováno všech jedenáct paragrafů první části knihy, zatímco základy teorie matic jsou obsaženy až ve čtyřech paragrafech druhé části:

1. *Počet maticový* (s. 141–154).
2. *Formy lineární a bilineární* (s. 154–166).

---

<sup>68</sup> Bohumil Bydžovský (1880–1969), český matematik. V letech 1903 až 1918 vyučoval na středních školách, roku 1909 se habilitoval na České univerzitě v Praze a o dva roky později na České technice v Praze. Roku 1917 se stal mimořádným profesorem České univerzity, v letech 1921 až 1957 byl řádným profesorem Univerzity Karlovy. Věnoval se hlavně geometrii, teorii konfigurací a pedagogickým aktivitám. Je autorem či spoluautorem řady středoškolských učebnic a autorem vysokoškolských učebnic analytické a algebraické geometrie.

Viz K. Koutský: *Sedmdesátiny prof. Dr. Bohumila Bydžovského*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 75(1950), s. D349–D357, J. Metelka: *K 80. narozeninám akademika Bohumila Bydžovského*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 5(1960), s. 603–612, K. Šindelář: *Památce akademika Bohumila Bydžovského*, Časopis pro pěstování matematiky 95(1970), s. 100–113.

3. *Formy kvadratické I.* (s. 166–178).
4. *Formy kvadratické II.* (s. 178–196).

V závěru knížky je připojen krátký historický přehled a bibliografické poznámky (s. 196–206), v nichž je mimo jiné uvedeno, že základní informace o determinantech a jejich aplikacích najde čtenář v řadě aktuálních učebnic algebry. Pro obsírnější poučení o maticovém počtu jsou doporučeny výše uvedené knihy Maxima Bôchera (2. vydání německého překladu) a Hanse Becka, tedy knihy [Bô] a [Bec].

Poznamenejme, že druhé vydání Bydžovského knížky vyšlo roku 1947 pod mírně pozměněným názvem *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití*.

### **Bartel Leendert van der Waerden**

V letech 1930 a 1931 vyšla ve dvou dílech monografie *Moderne Algebra* [Wa1] van der Waerdena, která výrazně ovlivnila vývoj algebry ve 20. století. Pro studium lineární algebry van der Waerden v úvodu prvního dílu doporučil Bôcherovu knihu *Introduction of Higher Algebra* [Bô] z roku 1908 (resp. její německý překlad z roku 1910) a Dicksonovu knihu *Modern Algebraic Theories* [D2] z roku 1926 (resp. její německý překlad z roku 1929).

S maticemi se setkáme až v druhém díle v kapitole *Lineare Algebra*, která sestává z osmi paragrafů:

104. *Moduln. Linearformen. Vektoren. Matrizes* (s. 109–116).
105. *Moduln in bezug auf einen Körper. Lineare Gleichungen* (s. 116–120).
106. *Moduln in Hauptidealringen. Elementarteiler* (s. 120–125).
107. *Der Hauptsatz über Abelsche Gruppen* (s. 126–131).
108. *Darstellungen und Darstellungsmoduln* (s. 131–135).
109. *Normalformen für eine Matrix in einem kommutativen Körper* (s. 135–139).
110. *Elementarteiler und charakteristische Funktion* (s. 139–143).
111. *Quadratische und Hermitesche Formen* (s. 142–148).

Pojem matice je zaveden až na straně 112. Na následujících stranách je moderním způsobem prezentována standardní látka o maticích, operacích s maticemi, o jejich vztahu k lineárním transformacím, bilineárním, kvadratickým a hermitovským formám, o podobnosti matic, kanonických (normálních) tvarech atd. Kapitola končí tvrzením o současném převedení dvou hermitovských forem, z nichž jedna je pozitivně definitní, na kanonický tvar (tj. převedení jejich matic na diagonální tvar):

*Jedes Paar von Hermiteschen Formen  $G$ ,  $H$ , von denen eine, etwa  $G$ , positiv-definit ist, läßt sich gleichzeitig durch eine einzige Transformation auf*

die Gestalt

$$\begin{cases} G(u, u) = \sum \bar{c}_\nu c_\nu \\ H(u, u) = \sum \bar{c}_\nu c_\nu \lambda_\nu \end{cases}$$

bringen. Die  $\lambda_i$  sind die charakteristischen Wurzeln der Matrix  $A = G^{-1}H$  oder, was dasselbe ist, die Wurzeln der Säkulargleichung

$$|\lambda g_{jk} - h_{jk}| = 0. \quad ([\text{Wa1}], \text{ s. } 148)$$

Vzápětí je tento fakt v následujícím tvrzení přenesen do reálného oboru.

Připomeňme ještě, že van der Waerden vydal roku 1935 v edici *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* tenkou monografii *Gruppen von linearen Transformationen* [Wa3], v níž s maticemi rovněž pracuje. V poznámkách pod čarou uvedl řadu bibliografických odkazů. Mnohokrát zde citoval Dicksonovu knihu *Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory* z roku 1901, odkazoval i na jeho knihu *Modern Algebraic Theories* [D2] z roku 1926 a MacDuffeeho monografii *Theory of Matrices* [MD1].

### Herbert Westren Turnbull a Alexander Craig Aitken

Mimořádně úspěšnou monografií věnovanou maticím se stala kniha *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* [TA], kterou sepsali Herbert Turnbull a Alexander Aitken.<sup>69</sup> Vyšla v Londýně roku 1932. Volně navázala na Turnbullovu předchozí knihu *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants* [T] z roku 1928, je však na ní prakticky nezávislá. Předpokládá sice elementární znalosti o determinantech, nikoli však o maticích. Stala se velmi brzy klasickým textem o kanonických tvarech matic. Vycházela v dalších vydáních, užitečná je i v dnešní době. Hlavním důvodem jejího úspěchu je její zaměření na téma redukce matice na kanonický tvar, tj. na problematiku, která má četné a důležité aplikace. Historické poznámky v jednotlivých kapitolách dávají stručný přehled vývoje dané problematiky, připomínají autory nejdůležitějších výsledků a inspirují k dalšímu studiu a práci. Autoři se odvolali na několik předchozích knih, zejména na knihy Mutha [M2], Bôchera [Bô] a Dicksona [D2]. V úvodu napsali:

---

<sup>69</sup> Alexander Craig Aitken (1895–1967) pocházel z Nového Zélandu, kde získal univerzitní vzdělání (University of Otago, Dunedin), poté působil čtyři roky jako učitel. Roku 1925 získal doktorát na univerzitě v Edinburghu, začal tam pracovat, roku 1946 byl jmenován profesorem. Věnoval se převážně numerické matematice, statistice, lineární algebře, aplikacím maticového počtu ve statistice a metodě nejmenších čtverců. Je autorem několika učebnic.

Viz J. M. Whittaker, M. S. Bartlett: *Alexander Craig Aitken, 1895–1967*, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society 14(1968), 14 stran, W. W. Ledermann: *A. C. Aitken's Work in Pure Mathematics*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 16(1968), s. 162–165, M. L. Hunter: *An Exceptional Talent for Calculative Thinking*, British Journal of Psychology 53(1962), s. 243–258, G. J. Tee: *Mathematics in the Pacific Basin*, British Journal for the History of Science 21(1988), s. 401–417, A. C. Aitken, P. C. Fenton: *To Catch the Spirit: The Memoir of A. C. Aitken: With a Biographical Introduction*, University of Otago Press, Dunedin, 1995, 123 stran.

*This book has been written with the object of giving an account of the various ways in which matrices of finite order can be reduced to canonical form under different important types of transformation. ...*

*The subject-matter of the canonical reduction of matrices, which has numerous and important applications, has received attention in several treatises and a large number of original papers. The historical notes which we have appended to each chapter are intended to give a brief review of what has been done on each topic, to apportion due credit to pioneers, and to stimulate the student to further reading. ... We have preferred to follow the lead of Cullis, who develops the theory in terms of the structure and properties of matrices – in matrix idiom, as it were, rather than in terms of bilinear and quadratic forms, or of linear substitutions.* [TA], s. v, v–vi)

Uvedme nyní názvy všech jedenácti kapitol Turnbullovy a Aitkenovy monografie, které dobře charakterizují její obsah i koncepci:

- I. *Definitions and Fundamental Properties of Matrices* (s. 1–9).
- II. *Elementary Transformations. Bilinear and Quadratic Forms* (s. 10–18).
- III. *The Canonical Reduction of Equivalent Matrices* (s. 19–31).
- IV. *Subgroups of the Group of Equivalent Transformations* (s. 32–44).
- V. *A Rational Canonical Form for the Collineatory Group* (s. 45–57).
- VI. *The Classical Canonical Form for the Collineatory Group* (s. 58–81).
- VII. *Congruent and Conjective Transformations: Quadratic and Hermitian Forms* (s. 82–99).
- VIII. *Canonical Reduction by Unitary and Orthogonal Transformations* (s. 100–113).
- IX. *The Canonical Reduction of Pencils of Matrices* (s. 114–142).
- X. *Applications of Canonical Forms to Solution of Linear Matrix Equations. Commutants and invariants* (s. 143–166).
- XI. *Practical Applications of Canonical Reduction* (s. 167–179).

Jednotlivé kapitoly jsou dále členěny na kratší články; poslední článek každé kapitoly obsahuje historické poznámky.

V úvodu první kapitoly je výstižně nastíněna problematika, které je kniha věnována:

*The theory of canonical matrices is concerned with the systematic investigation of types of transformation which reduce matrices to the simplest and most convenient shape. The formulation of these various types is not merely useful as a preliminary to the deeper study of the properties of matrices themselves; it serves also to render the theory of matrices more immediately available for numerous applications to geometry, differential equations, analytical dynamics, and the like. Quite early, for example, in co-ordinate geometry, when the equation of a general conic is simplified by reference to principal axes, or*



again when two general conics are referred to their common self-conjugate triangle, the procedure involved is really equivalent to the canonical reduction of a matrix. ([TA], s. 1)

Připomeňme, že Aitken vydal roku 1939 učebnici *Determinants and Matrices* [Ai]. I ta byla velmi oblíbená, svědčí o tom její četná další vydání a německý překlad. Vyniká elegantním podáním, zdůrazňuje sílu teorie matic a její význam pro ostatní matematické disciplíny. Hlavním tématem jsou soustavy lineárních rovnic, okrajově je zachycena problematika vlastních čísel a vlastních vektorů, ukázáno je však užití matic ve statistice. Zajímavé je, že v Aitkinově učebnici *Statistical Mathematics*, kterou vydal ve stejném roce jako učebnici *Determinants and Matrices* [Ai], matice nefigurují.

O Aitkenově přínosu k teorii matic napsal roku 1997 Richard William Farebrother článek *A. C. Aitken and the Consolidation of Matrix Theory* [F]; najdeme v něm četné užitečné odkazy týkající se vývoje teorie matic.

## Otto Schreier a Emanuel Sperner

Roku 1931 vyšel první díl učebního textu *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra* [ScSp1], jehož autory jsou Otto Schreier<sup>70</sup> a Emanuel Sperner.<sup>71</sup> Je věnován afinnímu prostoru, soustavám lineárních rovnic, eukleidovskému prostoru, determinantům, teorii těles a základní větě algebry. S maticemi

---

<sup>70</sup> Otto Schreier (1901–1929), rakouský matematik židovského původu. Studoval na vídeňské univerzitě, kde získal roku 1923 doktorát, pak pracoval jako asistent na univerzitě v Hamburku, kde se roku 1926 habilitoval. Roku 1929, krátce před smrtí, získal místo mimořádného profesora na univerzitě v Rostocku. Věnoval se zejména teorii grup, teorii těles a teorii čísel.

Viz K. Menger: *Otto Schreier. Nachruf, gehalten in der Wiener mathematischen Gesellschaft am 8. November 1929*, Monatshefte der Mathematik und Physik 37(1930), s. 1–6, Ch. Binder: *Schreier, Otto*, Neue Deutsche Biographie, Band 23, Duncker & Humblot, Berlin, 2007, s. 537, Ch. Binder: *Schreier Otto*, Österreichisches Biographisches Lexikon 1815–1950, Band 11, Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Wien, 1997, s. 202.

<sup>71</sup> Emanuel Sperner (1905–1980), německý matematik a filozof. Studoval na univerzitách ve Freiburgu a Hamburku, kde ukončil studium a posléze se habilitoval. Pak působil dva roky jako hostující profesor v Číně, poté jako profesor na univerzitě v Královci a ve Štrasburku, po válce na univerzitách ve Freiburgu, Bonnu a Hamburku. Zabýval se funkcionální analýzou, algebrou, topologií a teorií dimenze, jeho jméno se v matematice dodnes objevuje (Spernerovo lemma, Spernerova algebra, Spernerovy prostory).

Viz F. Bachmann: *Emanuel Sperner: in memoriam*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 84(1982), s. 45–55, H. Karzel: *Erinnerungen an Emanuel Sperner aus den Jahren 1948–1968 und Emanuel Sporners Beiträge zur metrischen Geometrie und ihre Bedeutung für die Entwicklung der Geometrie*, Mitteilungen der Mathematische Gesellschaft in Hamburg 11(1983), s. 217–231, H. Zeitler: *Der Didaktiker Emanuel Sperner*, *ibid.*, 25(2006), s. 5–13, H. Karzel: *Emanuel Sperner: Leben und Werk*, *ibid.*, 25(2006), s. 23–32, H. Karzel: *Emanuel Sperner: Begründer einer neuen Ordnungstheorie*, *ibid.*, 25(2006), s. 33–44, H. Zeitler: *Emanuel Sperner und die Schulmathematik*, Praxis der Mathematik 23(1981), č. 8, s. 237–243, H. J. Arnold: *Zum Gedenken an Emanuel Sperner*, Resultate der Mathematik – Results in Mathematics 4(1981), č. 2, s. 123–127.

se pracuje hlavně v partiích o soustavách lineárních rovnic, o determinantech a o transformacích kartézské soustavy souřadnic.

Následující Schreierovou a Spernerovou knížkou je útlá učebnice *Vorlesungen über Matrizen* [ScSp2] z roku 1932; má jen 133 stran. Do tisku ji připravil Emanuel Sperner, neboť Otto Schreier byl v té době již po smrti. V předmluvě Emanuel Sperner napsal:

*Dieses Bändchen enthält die Vorlesungen Otto Schreiers (†) über Elementarteilertheorie. Die Auswahl des Stoffes ist im wesentlichen dieselbe, wie sie Otto Schreier für die Veröffentlichung geplant hatte. Anordnung und Beweisführung dagegen habe ich teilweise geändert, wodurch ich hoffe, noch einige Vereinfachungen erreicht zu haben.* ([ScSp2], s. 3)

Stručný obsah knížky obou autorů i její pojetí dobře vystihují názvy kapitol:

1. *Das Rechnen mit linearen Transformationen* (s. 5–17).
2. *Das Rechnen mit Matrizen* (s. 18–43).
3. *Minimalpolynom. Invariante Teilgebilde* (s. 43–64).
4. *Die Diagonalgestalt* (s. 64–72).
5. *Die Normalform* (s. 72–107).
6. *Einige Anwendungen der Theorie* (s. 107–133).

Význam kanonických tvarů matic výstižně naznačují úvodní slova šesté kapitoly:

*Wir werden zeigen, daß zu jeder linearen Transformation  $\sigma$  eine Basis von  $\mathfrak{L}$  existiert, bezüglich der die Matrix von  $\sigma$  eine besonders einfache und für  $\sigma$  charakteristische Gestalt, die sogenannte Normalform, hat. Diese Normalform wird uns unmittelbar eine Reihe neuer Erkenntnisse über lineare Transformationen liefern. So werden wir als erste Anwendung die Frage entscheiden, wann zwei lineare Transformationen bzw. zwei Matrizen ineinander transformierbar sind ...* ([ScSp2], s. 72–73)

Druhý díl výše zmíněného učebního textu *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra* [ScSp1] vyšel až roku 1935. Věnován je základům teorie grup, lineárním transformacím a maticím (*Lineare Transformationen und Matrizen*, s. 35–131) a projektivní geometrii. V předmluvě Emanuel Sperner objasnil vztah tohoto svazku a jejich předchozí knihy o maticích z roku 1932:

*Im zweiten Abschnitt hat das schon früher veröffentlichte und inzwischen vergriffene Bändchen „Vorlesungen über Matrizen“ ... wieder Aufnahme gefunden. Allerdings sind daran einige Umstellungen und Kürzungen vorgenommen worden, um es besser in das Ganze einzufügen.*

([ScSp1], díl 2., s. 3)

## Cyrus Colton MacDuffee

Velmi stručným, ale obsažným textem o teorii matic je útlá monografie *The Theory of Matrices* [MD1], kterou publikoval roku 1933 Cyrus Colton MacDuffee<sup>72</sup> ve známé edici *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. V úvodu výstižně objasnil, z jakých problémů se teorie matic zrodila:

*Matric algebra is a mathematical abstraction underlying many seemingly diverse theories. Thus bilinear and quadratic forms, linear associative algebra (hypercomplex systems), linear homogeneous transformations and linear vector functions are various manifestations of matric algebra. Other branches of mathematics as number theory, differential and integral equations, continued fractions, projective geometry etc. make use of certain portions of this subject. Indeed, many of the fundamental properties of matrices were first discovered in the notation of a particular application, and not until much later recognized in their generality.* ([MD1], s. iii)

V deseti kapitolách hutného textu členěných do 57 paragrafů (pouze 110 stran) obsahuje MacDuffeeho monografie velké množství materiálu a mnoho bibliografických informací uvedených v textu a v poznámkách pod čarou; pro poznání vývoje teorie matic a jejího stavu kolem roku 1930 je tento text stále velmi cenný. Tematické zaměření knížky lze dobře odhadnout z názvu jejích deseti kapitol (knížka bohužel nemá index):

- I. *Matrices, Arrays and Determinants* (s. 1–17).
- II. *The Characteristic Equation* (s. 17–29).
- III. *Associated Integral Matrices* (s. 29–40).
- IV. *Equivalence* (s. 40–51).
- V. *Congruence* (s. 51–68).
- VI. *Similarity* (s. 68–81).<sup>73</sup>
- VII. *Composition of Matrices* (s. 81–88).
- VIII. *Matric Equations* (s. 89–97).
- IX. *Functions of Matrices* (s. 97–104).
- X. *Matrices of Infinite Order* (s. 104–110).

---

<sup>72</sup> Cyrus Colton MacDuffee (1895–1961), americký matematik. Roku 1922 obhájil po vysokoškolských studiích (Colgate University, University of Chicago) disertační práci o neasociativních algebrách vedenou Leonardem Eugenem Dicksonem. Nejprve byl instruktorem a asistentem na Princeton University, od roku 1925 asistentem, později docentem a profesorem na Ohio State University. Od roku 1935 působil až do smrti jako profesor na univerzitě ve Wisconsinu. Věnoval se zejména abstraktní algebře, napsal řadu prací, několik monografií a učebnic. Byl členem významných institucí (National Research Council, American Association for the Advancement of Science), zastával čelné funkce (Council of the American Mathematical Society, president of the Mathematical Association of America 1945/1946), byl editorem časopisu *Transactions of the American Mathematical Society*, vchoval řadu doktorandů.

<sup>73</sup> 40. paragraf se jmenuje *Weyr's Characteristic*.

Roku 1940 vydal MacDuffee učebnici *An Introduction to Abstract Algebra* [MD2], v níž je algebra prezentována jako nauka o strukturách (grupy, okruhy, obory integrity, tělesa, lineární algebry). I tato kniha byla velmi úspěšná, vycházela v dalších vydáních. Její předposlední, sedmá kapitola pojednává o maticích (s. 203–250), osmá o lineárních asociativních algebrách (s. 251–296). Matice jsou v této knize chápány zejména jako prvky tzv. algebry matic:

*A mathematical system  $\mathfrak{M}$  whose elements are  $n \times n$  arrays which are subject to the additional operation of multiplication ... is called a total matrix algebra over  $\mathfrak{R}$  of order  $n^2$ . A matrix is an element of a total matrix algebra.*

([MD2], s. 214)

Poměrně efektivně jsou v knize prezentována základní fakta, např. charakteristický polynom, Cayleyova-Hamiltonova věta, teorie elementárních dělitelů, podobnost matic, Jordanův kanonický tvar apod.

MacDuffee je rovněž autorem úspěšné knížky *Vector and Matrices* [MD3], která vyšla roku 1943.<sup>74</sup> Knížka malého formátu má 203 stran, devět kapitol, které se dělí na 65 paragrafů. Pojem matice je zaveden již v 9. paragrafu (s. 23), algebra matic je chápána jako systém hyperkomplexních čísel (viz 18. paragraf *Matrices as Hypercomplex Numbers*).

Poznamenejme na okraj, že MacDuffee publikoval roku 1943 v časopise *The American Mathematical Monthly* článek *What is a Matrix?* [MD4], v němž objasnil pojem matice a zdůraznil jeho dva důležité aspekty:

*To define a matrix as a rectangular array of numbers is as inadequate as to define a single particle of matter or a single complex number. A matrix is a number of a total matrix algebra.*

*A matrix over a field  $F$  may be defined as an endomorphism of a vector space  $V$  over  $F$  or, alternatively, as the operator which produces this endomorphism.*

([MD4], s. 361, 364)

Dnes se zdá pozoruhodné, že ještě roku 1943 bylo užitečné publikovat v prestižním matematickém časopise článek objasňující pojem matice a jeho význam.

## Joseph Wedderburn

Další učebnicí věnovanou teorii matic je kniha *Lectures on Matrices* [Wed], kterou roku 1934 vydal Joseph Wedderburn.<sup>75</sup> Sepsal ji na základě přednášek,

<sup>74</sup> V seznamu 26 titulů literatury je uvedena práce českého matematika Karla Petra (1868–1950) nazvaná *Rationale kanonische Form einer linearen Substitution* z roku 1940 [v originálu *O racionálním kanonickém tvaru lineární substituce*, *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 69(1939/1940), s. 9–22], 55. paragraf je nazván *The Weyr Characteristic* (o Weyrově charakteristice je zmínka i v úvodu).

<sup>75</sup> Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882–1948), americký matematik skotského původu. Studoval v Edinburghu, Lipsku, Berlíně a Chicagu, poté působil v Edinburghu a zejména v Princetonu (od r. 1928 profesorem). Byl významným algebraikem (abstraktní

kteře od roku 1920 konal na univerzitě v Princetonu. Byla velmi úspěšná, dodnes patří k titulům, které se objevují v dalších vydáních.

Ve srovnání s předchozím MacDuffeeovým textem [MD1] je Wedderburnova kniha obširnější. V deseti kapitolách podává základy teorie matic a jejích aplikací. Navíc obsahuje rozsáhlou bibliografii teorie matic (549 prací z let 1853 až 1933), která byla v dalším vydání z roku 1949 podstatně doplněna o dalších 129 titulů. O koncepci a obsahu knihy si lze udělat dobrou představu z jejího stručného obsahu:

- I. *Matrices and Vectorss* (s. 1–19).
- II. *Algebraic Operations with Matrices. The Characteristic Equation* (s. 20–32).
- III. *Invariant Factors and Elementary Divisors* (s. 33–46).
- IV. *Vector Polynomials. Singular Matric Polynomials* (s. 47–62).
- V. *Compound Matrices* (s. 63–87).
- VI. *Symmetric, Skew, and Hermitian Matrices* (s. 88–101).
- VII. *Commutative Matrices* (s. 102–114).
- VIII. *Functions of Matrices* (s. 115–139).
- IX. *The Automorphic Transformation of a Bilinear Form* (s. 140–146).
- X. *Linear Associative Algebras* (s. 147–168).

Cyrus Colton MacDuffee v recenzi na Wedderburnovu knihu *Lectures on Matrices* [Wed] napsal:

*For the past seventy-five years matric theory has been growing in stature and in favor among men. Many branches of mathematics have been more promising infants, but few have shown such sustained growth and ever widening field of application. The concept of matrix, like that of group, extends its roots under algebra, number theory, geometry, differential and integral equations, wave mechanics – a fairly representative cross-section of modern mathematics. This*

---

teorie těles, lineární asociativní algebry, jednoduché algebry, hyperkomplexní čísla, teorie grup, teorie matic), zabýval se však i diferenciálními rovnicemi. Dokázal, že každé konečné těleso je komutativní (tzv. Wedderburnova věta).

Viz A. C. Aitken: *J. H. MacLagan Wedderburn, F.R.S., 1882–1948*, Edinburgh Mathematical Notes 38(1952), s. 19–22, H. S. Taylor: *Obituary: Joseph Henry MacLagen Wedderburn (1882–1948)*, Obituary Notices Royal Society 6(1949), s. 619–625, E. Artin: *The Influence of J. H. M. Wedderburn on the Development of Modern Algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society 56(1950), s. 65–72, K. Parshall: *In Pursuit of the Finite Division Algebra Theorem and Beyond: Joseph H. M. Wedderburn, Leonard Dickson, and Oswald Veblen*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences 33(1983), s. 274–299, K. Parshall: *Joseph H. M. Wedderburn and the Structure Theory of Algebras*, Archive for History of Exact Sciences 32(1985), s. 223–349, K. Parshall: *New Light on the Life and Work of Joseph Henry MacLagan Wedderburn (1882–1948)*, s. 523–537, in S. S. Demidov, M. Folkerts, D. E. Rowe, Ch. J. Scriba (eds.): *Amphora: Festschrift für Hans Wußing zu seinem 65. Geburtstag*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1992, xi+782 stran, H. Nathan: *Wedderburn, Joseph Henry MacLagan*, in [Gi]-14, s. 211–212.

*fundamental nature of matrix theory has never been so generally appreciated by mathematicians as at present. Thus Wedderburn's book is timely. ...*

*In recent years Wedderburn has been one of the most important contributors to matrix theory. ...*

*In brief, this book consolidates the gains of the last seventy-five years, filling in gaps and simplifying proofs, and laying a firm foundation on which the matrix theory of the next century will arise.<sup>76</sup>*

## Abraham Adrian Albert

Poměrně velkou pozornost věnuje maticím učebnice *Modern Higher Algebra* [A1] z roku 1937, kterou publikoval Abraham Adrian Albert.<sup>77</sup> Sepsal ji jako základ pro prezentaci moderní teorie algebraických čísel a teorie lineárních asociativních algeber. Motivován byl Dicksonovými učebnicemi [D1] a [D2], van der Waerdenovou dvoudílnou knihou [Wa1], Wedderburnovou monografií [Wed] a knihou *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie* Andrese Speisera z roku 1923.

Výklad o maticích je v Albertově knize prezentován zejména ve čtyřech z dvanácti kapitol (partie o determinantech, lineárních rovnicích a bilineárních formách jsou součástí třetí kapitoly):

III. *Matrices* (s. 46–74).

IV. *Similarity of Square Matrices* (s. 75–95).

V. *Symmetric and Skew Matrices* (s. 96–125).

X. *Algebras of Matrices* (s. 217–250).

Knih je sepsána moderním způsobem, výklad je stručný, jasný a efektivní, abstraktnost prezentované látky však již značně narostla, jak je poznamenáno v úvodu:

<sup>76</sup> Bulletin of the American Mathematical Society 41(1935), s. 471–472.

<sup>77</sup> Abraham Adrian Albert (1905–1972), americký matematik. Studoval na univerzitě v Chicagu, jeho učitelem byl Leonard Eugene Dickson, pod jehož vedením získal roku 1928 doktorát. Jeden rok strávil v Princetonu u Josepha Wedderburna, v letech 1929 až 1931 byl instruktorem na Columbia University, od roku 1931 působil až do smrti na univerzitě v Chicagu, v letech 1933/1934 a 1961/1962 navštívil opět Princeton. Věnoval se hlavně algebře, algebrám nejrůznějších typů, teorii matic a algebraické geometrii. V roce 1965/1966 byl prezidentem Americké matematické společnosti.

Viz D. Zelinsky: *A. A. Albert*, The American Mathematical Monthly 80(1973), s. 661–665, I. Kaplansky: *Abraham Adrian Albert, 1905–1972, A Biographical Memoir*, National Academy of Sciences, Washington, 1980, s. 1–22, I. Kaplansky: *Abraham Adrian Albert: November 9, 1905 – June 6, 1972*, s. 244–264, in P. L. Duren (ed.): *A Century of Mathematics in America I.*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1988, 477 stran, N. Jacobson: *Abraham Albert*, Bulletin of the American Mathematical Society 80(1974), s. 1075–1100, I. N. Herstein: *A. Adrian Albert*, Scripta Mathematica 29(1973), s. 185–189, K. H. Parshall: *Albert, Abraham Adrian*, in [Gi]–17, s. 6–8, D. D. Fenster: *Research in Algebra at the University of Chicago: Leonard Eugene Dickson and A. Adrian Albert*, in [GP], s. 179–197.

... in Chapters III, IV, and V with the theory of matrices with elements in a completely general field. Recent trends in algebraic investigation have made it important to know the extent of the validity of the classical theorems on matrices. It is no more difficult to carry out the proofs, where they are valid, for general fields instead of the classical case of subfields of the field of all complex numbers. But it is true that the proofs and results of the classical theory are not always valid. This is brought out clearly in Chapter V, where it is necessary to restrict the types of fields considered. ...

The theory of linear associative algebras is a fundamental, if quite advanced, branch of modern algebra. It is natural, however, to introduce this subject from the matrix point of view and we do so in Chapter X. Many quite abstract notions are made concrete by such a treatment, and quite adequate introduction to the theory is made in this way without going at all deeply into the abstract structure theorems on algebras. ([A1], s. vii–viii)

Připomeňme, že Albert je autorem dalších úspěšných knih – *Structure of Algebras* [A2] z roku 1939, *Introduction to Algebraic Theories* [A3] z roku 1941 a *Fundamental Concepts of Higher Algebra* [A4] z roku 1956, v nichž se s matematici rovněž pracuje.

## 9. Závěr

Teorie matic se ve třicátých letech 20. století stala samostatným plnohodnotným oborem. Její základy utvořily důležitou partii lineární algebry, která se ve stejné době konstituovala jako vstupní součást vysokoškolského matematického vzdělání, jako disciplína, na které staví algebra, geometrie, matematická analýza, funkcionální analýza, numerické metody, lineární programování atd.

Postavení teorie matic ve třicátých letech 20. století dokumentuje i referativní časopis *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, který začal vycházet roku 1931. Od roku 1932 bylo tematické třídění referovaných prací dáno rejstříkem – jedno ze základních témat bylo charakterizováno heslem *Matrizen und Determinanten* s podrobnějším vymezením *Eigenwerte, Elementarteiler, Funktionaldeterminanten, Infinitesimalrechnung der Matrizen, Matrizenrechnung, Spezielle Determinanten und Matrizen, Unendliche Matrizen*. V letech 1933 až 1968 bylo základním heslem *Lineare Algebra, Matrizen und Determinanten*, které bylo rovněž podrobněji členěno a specifikováno. Současně je vidět, že teorie matic šla od třicátých let ruku v ruce s lineární algebrou.

Ve druhé polovině 20. století byla již teorie matic plně uznávanou disciplínou rozpracovávanou do hloubky i do šířky, která byla využívána v řadě dalších oblastí. Není divu, že byla v té době vydávána řada učebnic a monografií zčásti nebo úplně věnovaných teorii matic. Některé byly zcela elementární, některé velmi rozsáhlé a důkladné, mnohdy byly doplněny obsáhlými přehledy literatury a důkladnými rejstříky. Speciální otázky teorie matic byly předmětem řady časopiseckých prací i významných monografií.

O vzniku a vývoji teorie matic se můžeme z nejrůznějších hledisek dočíst v pracích [Ha1] až [Ha5], v kapitolách *Quaternions, Vectors, and Linear Associative Algebras* a *Determinants and Matrices*, které jsou součástí mohutné monografie [K] (s. 772–794, 795–812), v obecnějším kontextu v monografiích věnovaných historii matematiky (např. [ALG]). První informaci o řadě zcela konkrétních otázek, věcných, historických i bibliografických, lze úspěšně vyhledat v monografiích [Wed] a [MD1], v článcích [Mu1] a [Mu2]. O historii teorie matic a jejím postavení v lineární algebře lze najít podrobnější informace v monografii [Be3].

## LITERATURA

- [Ai] Aitken A. C., *Determinants and Matrices*, Oliver and Boyd, Edinburgh, London, 1939, vii+136 stran, další vydání: 1942, 1944, 4. opravené vydání: Interscience Publishers, Inc., Oliver and Boyd, Edinburgh and London, New York, 1946, 143 stran, další vydání: 1948, 1949, 1951, 1954, 1958, 1964, 1983. Německy: *Determinanten und Matrizen*, Bibliographisches Institut AG, Mannheim, Zürich, 1964, 1969, 142 stran.
- [A1] Albert A. A., *Modern Higher Algebra*, The University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1937, xi+319 stran, další vydání: 1947, 1948, 1958, 1961, 1965, 1967. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 44(1938), s. 471–473.
- [A2] Albert A. A., *Structure of Algebras*, AMS Colloquium Publications, Volume XXIV, New York, 1939, xii+210 stran. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 46(1940), s. 587–591.
- [A3] Albert A. A., *Introduction to Algebraic Theories*, University of Chicago Press, Chicago, 1941, viii+137 stran.
- [A4] Albert A. A., *Fundamental Concepts of Higher Algebra*, Chicago University Press, Chicago, 1956, ix+165 stran, další vydání a dotisky: 1959, 1961, 1963, 1966. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 63(1957), s. 323–325, The Mathematical Gazette 42(1958), č. 340, s. 154.
- [ALG] Alten H.-W., Djafari Naini A., Folkerts M., Schlosser H., Schlote K.-H., Wußing H., *4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Hongkong, London, Mailand, Paris, Tokio, 2003, xiv+653 stran.
- [Ba] Bauer G., *Vorlesungen über Algebra*, Teubner, Leipzig, 1903, vi+376 pages, 2. vydání: 1910, vi+366 stran, 3. vydání: 1921, v+366 stran. Recenze: The Mathematical Gazette 3(1904), č. 44, p. 21, 14(1921), č. 201, s. 469–470. Přepřacované 4. a 5. vydání této učebnice viz [BB].
- [Bec] Beck H., *Einführung in die Axiomatik der Algebra*, Göschens Lehrbücherei 6, W. de Gruyter & Co., Berlin, Leipzig, 1926, x+197 stran. Recenze: The American Mathematical Monthly 35(1928), s. 89–91, Monatshefte für Mathematik und Physik 36(1929), s. A18–A20, Bulletin of the American Mathematical Society 35(1929), s. 414.
- [Be1] Bečvář J. a kol., *Eduard Weyr, 1852–1903*, edice Dějiny matematiky, svazek 2, Prometheus, Praha, 1995, 196 stran, 24 obrazových příloh, ISBN 80-7196-024-1.
- [Be2] Bečvář J., *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000, 435 stran, další vydání: 2002, 2005, 2010, 5. vydání: 2019, ISBN 978-80-7378-378-5.



- [Be3] Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, edice Dějiny matematiky, svazek 35, Matfyzpress, Praha, 2007, 519 stran, ISBN 978-80-7378-036-4.
- [BeB] Bečvář J., Bečvářová M., *Jarník's Notes of the Lecture Course Allgemeine Idealtheorie by B. L. van der Waerden (Göttingen 1927/1928)*, Series History of Mathematics, Volume 64, Matfyzpress, Prague, 2020, 251 stran, ISBN 978-80-7378-418-8.
- [Be] Beller M., *Matrix Theory Before Schrödinger: Philosophy, Problems, Consequences*, ISIS **74** (1983), s. 469–491, ISSN 0021-1753.
- [Ber1] Berezkina E. I., *O „Matematike v devjati knigach“*, Istoriko-matematičeskíe issledovanija **10** (1957), s. 427–438.
- [Ber2] Berezkina E. I., *Matematika v devjati knigach*, Istoriko-matematičeskíe issledovanija **10** (1957), s. 439–513.
- [Ber3] Berezkina E. I., *Primečanija k „Matematike v devjati knigach“*, Istoriko-matematičeskíe issledovanija **10** (1957), s. 514–584.
- [B] Bernkopf M., *A History of Infinite Matrices*, Archive for History of Exact Sciences **4** (1968), s. 308–358, ISSN 0003-9519.
- [BB] Bieberbach L., Bauer G., *Vorlesungen über Algebra*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1928, x+334 stran. Jedná se o čtvrté, Bieberbachem zcela přepracované vydání stejnojmenné Bauerovy učebnice [Ba], 5. vydání: 1933, x+358 stran. Recenze: The Mathematical Gazette 18(1934), č. 228, s. 114.
- [Bi] M. Bitbol, *Erwin Schrödinger. Philosophy and the Birth of Quantum Mechanics*, Institut autrichien de Paris, Editions Frontiers, Gif-sur-Yvette, 1992, xiii+460 stran, ISBN 2-86332-116-1.
- [Bo1] Born M., *Über elektrostatische Gitterpotentiale*, Zeitschrift für Physik **7** (1921), s. 124–140, viz též [Bo8]-I, s. 434–450.
- [Bo2] Born M., *Probleme der Atomdynamik, 1. Die struktur des Atoms, 2. Die Gittertheorie des festen Zustandes*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1926, viii+187 stran, další vydání: 1967.
- [Bo3] Born M., *Moderne Physik*, Springer, Berlin, 1933, vii+272 stran. Anglicky: *Atomic Physics*, Blackie & Son Limited, London, Glasgow, další vydání a dotisky: 1935, 1937, 1944, 1945, 1946, 1947, 1948, 1951, 1952, 1953, 1954, 1955, 1957, 1958, 1959, 1962, 8. vydání: Dover, New York, 1989, xiv+495 stran, ISBN 0-486-65984-4. Rusky: *Atomnaja fizika*, Mir, Moskva, 1965, 1967, 1970, 484 stran.
- [Bo4] Born M., *Physics in my Generation: a Selection of Papers*, Pergamon Press, London, 1956, viii+232 stran, též Springer, New York, 1969, 172 stran, též Longman, New York, 1970, 172 stran.
- [Bo5] Born M., *Physik im Wandel meiner Zeit*, Die Wissenschaft, Band 111, Vieweg, Braunschweig, 1957, 3. vydání: 1959, vii+252 stran.
- [Bo6] Born M., *Zur statistische Deutung der Quantentheorie*, Dokumente der Naturwissenschaft. Abteilung Physik, Band 1, Battenberg, Stuttgart, 1962, 130 stran.
- [Bo7] Born M., *Zur Begründung der Matrizenmechanik*, Battenberg, Stuttgart, 1962, 135 stran.
- [Bo8] Born M., *Ausgewählte Abhandlungen I., II.*, Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1963, 718+706 stran, ISBN 978-3525420010.
- [Bo9] Born M., *Mein Leben. Die Erinnerungen des Nobelpreisträgers*, Nymphenburger Verlagshandlung, München, 1975, 400 stran.

- [BHJ1] Born M., Heisenberg W., Jordan P., *Zur Quantenmechanik II.*, Zeitschrift für Physik **35** (1926), č. 8-9, s. 557–615, viz též [Bo8]-II., s. 155–213, resp. [BHJ2], s. 77–135. Anglicky: *On Quantum Mechanics II.*, in [Wa4], s. 321–385.
- [BHJ2] Born M., Heisenberg W., Jordan P., *Zur Begründung der Matrizenmechanik*, Dokumente der Naturwissenschaft. Abteilung Physik, Band 2, Battenberg, Stuttgart, 1962, 135 stran.
- [BH] Born M., Hund F., *Vorlesungen über Atommechanik I. Struktur der Materie in Einzeldarstellungen*, Struktur der Materie in Einzeldarstellungen, Band 2, Springer, Berlin, 1925, ix+358 stran.
- [BJ1] Born M., Jordan P., *Zur Quantenmechanik*, Zeitschrift für Physik **34** (1925), č. 1, s. 858–888, též in [Bo8]-II., s. 124–154. Anglicky: *On Quantum Mechanics*, in [Wa4], s. 277–306. Rusky: in *Uspechi fizičeskich nauk* 122(1977), s. 586–611.
- [BJ2] Born M., Jordan P., *Elementare Quantenmechanik. Zweiter Band der Vorlesungen über Atommechanik*, Struktur der Materie in Einzeldarstellungen, Band 9, Springer, Berlin, Heidelberg, 1930, xi+434 stran (navazuje na učebnici [BH]).
- [Bô] Bôcher M., *Introduction to Higher Algebra*, Prepared for Publication with the Cooperation of E. P. R. Duval, The Macmillan Company, New York, London, 1907, xi+321 stran, další vydání: 1922, 1924, 1933, 1949, 1964, reprint: Dover, New York, 2004, xi+321 stran, ISBN 978-0486495705. Německy: *Einführung in die höhere Algebra*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1910, xii+348 stran, další vydání: 1925, 1932, ..., 1952. Rusky: *Vvedenie v vysšuju algebru*, ONTI, Moskva, Leningrad, 1933. Recenze: *The Journal of Education* 67(1908), č. 9, s. 245, *Science. New Series* 27(1908), č. 692, s. 535–536, *The Mathematical Gazette* 4(1908), č. 72, s. 291–293, 50(1966), č. 371, s. 82, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 20(1909), s. A57–A58, 22(1911), s. A31–A32, *The American Mathematical Monthly* 15(1908), s. 23–24, 91(1984), s. 147–150.
- [Br1] de Broglie L., *A Tentative Theory of Light Quanta*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **47** (1924), č. 278, s. 446–458.
- [Br2] de Broglie L., *Recherches sur la théorie des quanta*, Annales de Physique, 10<sup>e</sup> Série **3** (1925), s. 22–128, reprinty: Paříž, 1963, Annales de la Fondation Louis de Broglie, **17** (1992), č. 1, 141 stran. Německy: *Untersuchungen zur Quantentheorie*, 1927.
- [Br3] de Broglie L., *Ondes et mouvements*, Gauthier-Villars, Paris, 1926, vi+133 stran, další vydání: 1988.
- [Br4] de Broglie L., *La mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1928, 57 stran.
- [Br5] de Broglie L., *Introduction à l'étude de la mécanique ondulatoire*, Hermann, Paris, 1930, 292 stran. Anglicky: *An Introduction to the Study of Wave Mechanics*, 1928. Německy: *Einführung in die Wellenmechanik*, Lipsko, 1929.
- [Br6] de Broglie L., *Recueil d'exposés sur les ondes et corpuscules*, Hermann et Cie, Paris, 1930, 80 stran.
- [Br7] de Broglie L., *Matiere et lumiere*, A. Michel, Paris, 1937, 342 stran. Anglicky: *Matter and Light: The New Physics*, 1939, též německy, italsky, japonsky, španělsky a holandsky.
- [Br8] de Broglie L., *La physique nouvelle et les quanta*, Flammarion, Paris, 1937, 307 stran. Anglicky: *The Revolution in Physics. A Non-Mathematical Survey of Quanta*, Noonday, New York, 1953, 310 stran, 1956, 1958, 1970, též italsky.
- [Br9] de Broglie L., *Continu et discontinu en physique moderne*, A. Michel, Paris, 1941, 269 stran, další vydání: 1949, též německy, holandsky, italsky.

- [Br10] de Broglie L., *De la mécanique ondulatoire à la théorie du noyau, I., II., III.*, Hermann, Paris, 1943–1946, 227, 143, 159 stran.
- [Br11] de Broglie L., *Physique et microphysique*, A. Michel, Paris, 1947, 370 stran. Anglicky: *Physics and Microphysics*, 1960, též španělsky a německy.
- [Br12] de Broglie L., *Savants et decouvertes*, A. Michel, Paris, 1951, 400 stran, též španělsky.
- [Br13] de Broglie L., *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire: la théorie de la double solution*, Gauthier-Villars, Paris, 1956, viii+299 stran. Anglicky: *Non-linear Wave Mechanics: A Causal Interpretation*, 1960.
- [Br14] de Broglie L., *Perspectives nouvelles en microphysique*, A. Michel, Paris, 1956, 356 stran, další vydání: 1992. Anglicky: *New Perspectives in Physics*, 1962.
- [Br15] de Broglie L., *Sur les sentiers de la science*, A. Michel, Paris, 1960, 417 stran, též italsky.
- [Br16] de Broglie L., *Introduction à la nouvelle théorie des particules de M. Jean-Pierre Vigié et de ses collaborateurs*, Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1961, xx+108 stran. Anglicky: *Introduction to the Vigier Theory of Elementary Particles*, 1963.
- [Br17] de Broglie L., *Étude critique des bases de l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1963, x+99 stran. Anglicky: *The Current Interpretation of Wave Mechanics: A Critical Study*, 1964.
- [Br19] de Broglie L., *Certitudes et incertitudes de la science*, A. Michel, Paris, 1966, 303 stran.
- [Br19] de Broglie L., *Recherches d'un demi-siècle*, A. Michel, Paris, 1976, 411 stran.
- [Bu] Bub J., *The Interpretation of Quantum Mechanics*, The University of Western Ontario Series in Philosophy of Science 3, Reidel, Dordrecht, 1974, ix+155 stran, ISBN 90-277-0465-1.
- [By] Bydžovský B., *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*, JČMF, Praha, 1930, iv+211 stran, 2. vydání: *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití*, JČMF, Praha, 1947, 239 stran.
- [Cl] Cline B. L., *The Questioners: Physicists and the Quantum Theory*, Crowell, 1965, 274 stran, ISBN 978-1114181793, nové vydání: *Men who Made a New Physics: Physicists and the Quantum Theory*, University of Chicago Press, Chicago, London, 1987, 288 stran, ISBN 978-0226110271.
- [CH] Courant R., Hilbert D., *Methoden der mathematischen Physik I.*, Springer, Berlin, 1924, xiii+450 stran, 2. vydání: 1931, xiv+469 stran, 3. vydání: Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1968, xv+469 stran. Anglicky: *Methods of Mathematical Physics I.*, Interscience, New York, 1953, xv+560 stran, 2. vydání: Wiley, New York, 1989, 3. vydání: 2004. Rusky: *Metody matematické fyziky*, GITTL, Moskva, 1933, ix+532 stran, 2. vydání: 1945, 3. upravené vydání: 1951, 476 stran. [Druhý díl: *Methoden der mathematischen Physik II.*, Springer, Berlin, 1937, xiv+549 stran, 2. vydání: 1968. Anglicky: Interscience, New York, 1953, xxii+830 stran, další vydání: Wiley, New York, 1989, resp. Wiley, Weinheim, 2004. Rusky: GITTL, Moskva, 1945, 620 stran, 2. vydání: 1951, 544 stran].
- [Cu] Cullis C. E., *Matrices and Determinoids I., II., III.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1913, 1918, 1925, díl I: Book on Demand Ltd., 2013, 450 stran, ISBN 978-5518693470, díl II: Nabu Press, 2011, 584 stran, ISBN 978-1174775543, nové vydání dílů I a II: Wentworth Press, 2016, 458+584 stran, ISBN 978-1371103668, 9781371008697. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 26(1920),

- s. 224–233, 33(1927), s. 618–621, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society 10(1920), s. 243–256, 11(1921), s. 51–82.
- [DG] Dewitt B. S., Graham N., *The Many Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton Series in Physics 63, Princeton University Press, 2015, 266 stran, ISBN 978-0691618951.
- [DW] Dicke R. H., Wittke J. P., *Introduction to Quantum Mechanics*, Reading, Addison-Wesley Publishing Company, 1960, xi+369 stran.
- [D1] Dickson L. E., *Algebras and their Arithmetics*, University of Chicago Press, Chicago, Cambridge University Press, London, 1923, xii+241 stran, reprinty: G. E. Stechert & Co., New York, 1938, Dover, New York 1960. Německy: *Algebren und ihre Zahlentheorie. Mit einem Kapitel über Idealtheorie von Andreas Speiser*, Orell Füssli, Zürich, Leipzig, 1927, viii+308 stran. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 30(1924), s. 263–267, Nature 114(1924), s. 532.
- [D2] Dickson L. E., *Modern Algebraic Theories*, Chicago, New York, Boston, B. H. Sanborn & Co., 1926, ix+276 stran, reprint: *Algebraic Theories*, Dover Publications, Inc., New York, 1959. Německy: *Höhere Algebra*, Autorisierte deutsche Ausgabe von L. E. Dickson „Modern Algebraic Theories“ herausgegeben von Ewald Bodewig, Teubner, Leipzig und Berlin, 1929, vii+242 stran. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 32(1926), s. 707–710, The American Mathematical Monthly 34(1927), s. 532–535, The Mathematical Gazette 13(1927), č. 186, s. 288–289.
- [Die] Dieudonné J., *History of Functional Analysis*, Mathematics Studies 49, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1981, vi+312 stran, reprint: 1983.
- [DFLS] Diner S., Fargue D., Lochak G., Selleri F., *The Wave-Particle Dualism. A Tribute to Louis de Broglie on his 90th Birthday*, Reidel, Dordrecht, 1984, vii+566 stran.
- [Di1] Dirac P., *The Fundamental Equations of Quantum Mechanics*, Proceedings of the Royal Society of London **A 109** (1926), s. 642–653, viz též [Wa3], s. 307–320.
- [Di2] Dirac P., *Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom*, Proceedings of the Royal Society of London **A 110** (1926), s. 561–579, viz též [Wa4] (první čtyři části ze sedmi), s. 417–427.
- [Di3] Dirac P., *Die Prinzipien der Quantenmechanik*, S. Hirzel, Leipzig, 1930, xi+274 stran. Anglicky: *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1930, x+257 stran, další vydání: 1947, 1948, 1956, xii+311 stran, 1958, 1959, 1995, 1996, 1998, 2013, xii+314 stran, ISBN 978-1-60796-560-2. Rusky: *Principy kvantovoj mechaniki*, Fizmatgiz, Moskva, 1960, Nauka, Moskva, 1979, 479 stran. Francouzsky: 1931. Italsky: 1959.
- [Di4] Dirac P., *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer, New York, 1964, v+87 stran, další vydání: Dover, New York, 2001, Snowball Publishing, 2012. Rusky: *Lekcii po kvantovoj mechanike*, Mir, Moskva, 1968, 80 stran.
- [Di5] Dirac P., *Spinors in Hilbert Space*, Springer US, Plenum Press, New York, 1974, vii+91 stran, ISBN 978-1-4757-0036-7, reprint: 2012, ISBN 978-1475700367. Rusky: *Spinory v Gil'bertovom prostranstve*, Mir, Moskva, 1978, 126 stran.
- [Di6] Dirac P., *Directions in Physics. Lectures Delivered During a Visit to Australia and New Zealand, September 1975*, Wiley, New York, 1978, vii+95 stran, ISBN 978-0471029977.
- [Du] Dugas R., *A History of Mechanics*, Routledge & Kegan Paul, London, 1957, 671 stran, též 1988, Dover, New York, 2011, 688 stran, ISBN 978-0486656328.

- [EMW] *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, Teubner, Leipzig, 1898–1935.
- [ESM] *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Gauthier-Villars, Paris, Teubner, Leipzig, 1904–1916, reprint: Gabay, 1992.
- [F] Farebrother R. W., *A. C. Aitken and the Consolidation of Matrix Theory*, Linear Algebra and its Applications **264** (1997), s. 3–12.
- [Fr1] Frobenius G., *Über vertauschbare Matrizen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, s. 601–614, též in *Gesammelte Abhandlungen II.*, s. 705–718.
- [Fr2] Frobenius G., *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, s. 985–1021, též in *Gesammelte Abhandlungen III.*, s. 1–37.
- [Gi] Gillispie Ch. C. (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, New York, 18 svazků, 1970–1990.
- [GL] Grattan-Guinness I., Ledermann W., *Matrix Theory*, s. 775–786, in I. Grattan-Guinness (ed.): *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Routledge, London, New York, 1994, xiii+842, xi+845–1806 stran, ISBN 0-415-03785-9, další vydání: Johns Hopkins Press, Baltimore, 2003, ISBN 0-8018-7396-7, 0-8018-7397-5.
- [GP] Gray J. J., Parshall K. H. (ed.), *Episodes in the History of Modern Algebra (1800–1950)*, History of Mathematics 32, American Mathematical Society, London Mathematical Society, Providence, 2007, viii+336 stran, ISBN 978-0-8218-4343-7.
- [G] Green H. S., *Matrix Mechanics in Quantum Mechanics*, With a Foreword by Max Born, Noordhoff, Groningen, 1965, 118 stran. Rusky: *Matricijnaja kvantovaja mechanika*, Mir, Moskva, 1968, 163 stran.
- [Gri] Griffiths D. J., *Introduction to Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, 480 stran, ISBN 978-0-131-11892-8, 2. vydání: 2017, 468 stran, ISBN 978-1-107-17986-8, 3. vydání (spoluautor D. F. Schroeter): xii+495 stran, ISBN 978-1-107-18963-8.
- [Ha1] Hawkins T., *The Theory of Matrices in the 19th Century*, s. 561–570, in R. D. James (ed.): *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vancouver, B.C., 1974, Volume 2, Vancouver, 1975, viii+600 stran, ISBN 0-919558-04-6.
- [Ha2] Hawkins T., *Cauchy and the Spectral Theory of Matrices*, *Historia Mathematica* **2** (1975), s. 1–29, ISSN 0315-0860.
- [Ha3] Hawkins T., *Another Look at Cayley and the Theory of Matrices*, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* **27** (1977), s. 82–112, ISSN 0003-9810.
- [Ha4] Hawkins T., *Weierstrass and the Theory of Matrices*, *Archive for History of Exact Sciences* **17** (1977), s. 119–163, ISSN 0003-9519.
- [Ha5] Hawkins T., *Frobenius and the Symbolical Algebra of Matrices*, *Archive for History of Exact Sciences* **62** (2008), s. 23–57, ISSN 0003-9519.
- [He1] Heisenberg W., *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, *Zeitschrift für Physik* **33** (1925), č. 1, s. 879–893, též in *Dokumente der Naturwissenschaft, Abt. Physik*, **2** (1962), s. 31–45. Anglicky: *Quantum-Theoretical Re-interpretation of Kinematic and Mechanical Relations*, též in G. Ludwig: *Wellenmechanik*, Akademie Verlag, Berlin, Oxford, Braunschweig, 1969, s. 193–210, též in [Wa4], s. 261–276. Rusky: *Uspechi fizičeskich nauk* **122** (1977), s. 574–586.

- [He2] Heisenberg W., *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, Hirzel, Leipzig, 1930, viii+117 stran, další vydání: Hirzel, 1941, 1942, 1944, Bibliographisches Institut & Brockhaus AG, Mannheim, 1991, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001, viii+117 stran, ISBN 3-86025-608-4. Anglicky: *The Physical Principles of the Quantum Theory*, University of Chicago Press, Chicago, 1930, vi+183 stran, další vydání: Dover, Mineola, 1949, Dover, New York, 1968, ISBN 0-486-60113-7.
- [He3] Heisenberg W., *Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft*, Hirzel, Leipzig, 1935, 45 stran.
- [He4] Heisenberg W., *Vorträge über kosmische Strahlung*, Springer, Berlin, 1943, 173 stran.
- [He5] Heisenberg W., *Die Physik der Atomkerne: acht Vorträge*, Die Wissenschaft, Band 100, Vieweg, Braunschweig, 1943, vi+180 stran, 2. vydání: 1947, 3. vydání: 1949, viii+192 stran.
- [He6] Heisenberg W., *Physics and Philosophy. The Revolution in Modern Science*, Harper & Brothers, New York, 1958, 213 stran, též Allen & Unwin, London, 1958, 1962, nové vydání: Unwin University Books, 2015, 224 stran. Německy: *Physik und Philosophie*, Ullstein, Darmstadt, 1959, též Ullstein, Frankfurt am Main, 1961, 1965, 8. vydání: Hirzel, Stuttgart, 2011, 288 stran, ISBN 978-3-7776-2153-1. Česky: *Fyzika a filosofie*, Filosofie a současnost 2, Svoboda, Praha, 1966, 167 stran, 2. přehlédnuté vydání: Aurora, Praha, 2000, ISBN 80-85974-91-6. Francouzsky: 1961.
- [He7] Heisenberg W., *Die kopenhagener Deutung der Quantentheorie*, Dokumente der Naturwissenschaft, Abteilung Physik, Band 4, Battenberg, Stuttgart, 1963, 67 stran.
- [He8] Heisenberg W., *Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles*, Interscience Publ., London, New York, Sydney, 1966, 177 stran.
- [He9] Heisenberg W., *Der Teil und das Ganze: Gespräche im Umkreis der Atomphysik*, Piper, München, 1969, 333 stran, 6. vydání: Piper, München, 1986, 336 stran. Česky: *Část a celek. Rozhovory o atomové fyzice*, Velká řada, svazek 33, Votobia, Olomouc, 1997, 275 stran, ISBN 80-7198-216-4.
- [He10] Heisenberg W., *Schritte über Grenzen. Gesammelte Reden und Aufsätze*, Piper, München, 1971, 313 stran.
- [Ho] Hooker C. A. (ed.), *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*, Volume I. *The Historical Evolution*, The University of Western Ontario Series in Philosophy of Science 5, Reidel, Dordrecht, 1975, xv+607 stran, ISBN 90-277-0567-4.
- [Hud] Hudeček J., *Matematika v devíti kapitolách*, edice Dějiny matematiky, svazek 37, Matfyzpress, Praha, 2008, 244 stran, ISBN 978-80-7378-046-3.
- [Hu] Hund F., *Geschichte der Quantentheorie*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, 239 stran, 2. vydání: Bibliographisches Institut, Mannheim, 1975, ISBN 3-411-01476-8, 3. přepracované vydání: 1984, 248 stran, ISBN 978-3411016846. Anglicky: *The History of Quantum Theory*, Imperial College, London, Harper Row, New York, 1974, 260 stran, ISBN 978-0064930604. Recenze: *Journal of Chemical Education* 52(1975), č. 12, s. A560, *Berichte der Bunsengesellschaft für physikalische Chemie* 80(1976), s. 934.

- [ChG] Chemla K., Guo S., *Les Neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Preface by G. Lloyd, Dunod, Paris, 2004, xvi+1017 stran, ISBN 978-2100077786.
- [Ja1] Jammer M., *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, The History of Modern Physics 1880–1950, Volume 12, McGraw Hill, New York, 1966, 399 stran, ISBN 978-0070322752, 2. vydání: 1989, 436 stran, ISBN 0-88318-617-9. Recenze: Journal of Chemical Education 44(1967), č. 5, s. 308. Rusky: *Evoljucija ponjatij kvantovoj mehaniki*, Nauka, Moskva, 1985, 378 stran.
- [Ja2] Jammer M., *The Philosophy of Quantum Mechanics. The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective*, Wiley-Interscience, New York, 1974, 536 stran, ISBN 978-0-471-43958-5.
- [Jo1] Jordan P., *Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage*, Die Wissenschaft, Band 87, Vieweg, Braunschweig, 1933, 2. vydání: 1944, vii+112 stran.
- [Jo2] Jordan P., *Die Physik des 20. Jahrhunderts. Einführung in den Gedankeninhalt der modernen Physik*, Die Wissenschaft, Band 88, Vieweg, Braunschweig, 1936, x+143 stran, 2. vydání: 1938, x+159 stran, další vydání: 1939, 1941, 1943, 1945, 7. vydání: 1949, reprint: 2013, viii+159 stran, ISBN 978-3-663-00288-8.
- [Jo3] Jordan P., *Die Physik und das Geheimnis des organischen Lebens*, Die Wissenschaft, Band 95, Vieweg, Braunschweig, 1941, 176 stran.
- [Jo4] Jordan P., *Physik im Vordringen*, Die Wissenschaft, Band 99, Vieweg, Braunschweig, 1949, vii+112 stran.
- [Jo5] Jordan P., *Schwerkraft und Weltall. Grundlagen der theoretischen Kosmologie*, Die Wissenschaft, Band 107, Vieweg, Braunschweig, 1952, viii+207 stran, 2. rozšířené vydání: 1955, xi+277 stran.
- [Jo6] Jordan P., *Atom und Weltall. Einführung in den Gedankeninhalt der modernen Physik*, Die Wissenschaft, Band 110, Vieweg, Braunschweig, 1956, viii+144 stran, 9. vydání: 1965. Jedná se o rozšířený svazek *Die Physik des 20. Jahrhunderts* [Jo2].
- [Jo7] Jordan P., *Die Expansion der Erde: Folgerungen aus der Diracschen Gravitationshypothese*, Die Wissenschaft, Band 124, Vieweg, Braunschweig, 1966, xiv+182 stran.
- [Jo8] Jordan P., *Begegnungen: Albert Einstein, Karl Heim, Hermann Oberth, Wolfgang Pauli, Walter Heitler, Max Born, Werner Heisenberg, Max von Laue, Niels Bohr*, Stalling, Oldenburg, 1971, 207 stran, ISBN 3-7979-1934-4.
- [JNW] Jordan P., von Neumann J., Wigner E., *On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism*, Annals of Mathematics **35** (1934), s. 29–64.
- [KCL] Kangshen S., Crossley J. N., Lun A. W.-C., *The Nine Chapters on the Mathematical Art. Companion and Commentary*, Oxford University Press, Oxford, Science Press, Beijing, 1999, xiv+596 stran, ISBN 978-0198539360.
- [K] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, xvii+1238 stran, 2. vydání ve třech svazcích: 1990, xvii+390+xxii, xvii+391–812+xxii, xv+813–1211+xxii stran, ISBN 0-19-506135-7, 0-19-506136-5, 0-19-506137-3.
- [KV] Klíma J., Velický B., *Kvantová mechanika I., II.*, Karolinum, Praha, 2015, 2018, 356, 373 stran, ISBN 978-80-246-2937-7, 978-80-246-3623-8.

- [Kn1] Knobloch E., *Determinants*, s. 766–774, in I. Grattan-Guinness (ed.): *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Routledge, London, New York, 1994, xiii+842, xi+845–1806 stran, ISBN 0-415-03785-9, další vydání: Johns Hopkins Press, Baltimore, 2003, ISBN 0-8018-7396-7, 0-8018-7397-5.
- [Kn2] Knobloch E., *From Gauss to Weierstrass: Determinant Theory and its Historical Evaluations*, s. 51–66, in S. Chikara, S. Mitsuo, J. V. Dauben (eds.): *The Intersection of History and Mathematics*, Science Networks, Historical Studies, Volume 15, Birkhäuser, Basel, 1994, x+262 stran, ISBN 978-3-0348-7523-3, reprint: 2012, ISBN 978-3-0348-7523-3.
- [Ko] Koertge N. (ed.), *New Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, Detroit, New York, 8 svazků, 2008, ISBN 978-0-684-31320-7.
- [Kow] Kowalewski G., *Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten*, Veit, Leipzig, 1909, v+550 stran, 2. přepracované vydání: *Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten*, W. de Gruyter, Berlin, 1925, vi+304 stran, 3. vydání: 1942, vii+320 stran, 4. vydání: 1954, vi+348 stran.
- [Kr] Kronecker L., *Vorlesungen über Mathematik. Vorlesungen über allgemeine Zahlentheorie*, II. *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten* Teubner, Leipzig, 1903, xii+390 stran.
- [Lo] London F., *Über die Jacobischen Transformationen der Quantenmechanik*, Zeitschrift für Physik **37** (1926), č. 12, s. 915–925.
- [Lu] Ludyk G., *Quantum Mechanics in Matrix Form*, Springer International Publishing, Cham, 2018, xiii+214 stran, ISBN 978-3-319-26364-9.
- [MD1] MacDuffee C. C., *Theory of Matrices*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Volume 2, Springer, Berlin, 1933, v+110 stran, reprinty: Chelsea, New York, 1946, 1956, Dover, Mineola, New York, 2004. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 40(1934), s. 372–373.
- [MD2] MacDuffee C. C., *An Introduction to Abstract Algebra*, Wiley, New York, Chapman & Hall, London, 1940, vii+303 stran, další vydání: 1948, 1950, 1956, 1959, 1966. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 47(1941), s. 539–543, Science, New Series, 93(2408)(1941), s. 185–186, National Mathematics Magazine 15(1941), č. 4, s. 211–212.
- [MD3] MacDuffee C. C., *Vectors and Matrices*, Mathematical Association of America, Ithaca, New York, 1943, xi+192 stran, další vydání: 1947, 1949, 1953, xi+203 stran, 1961, 1966. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 52(1946), s. 405–407.
- [MD4] MacDuffee C. C., *What is a Matrix?*, The American Mathematical Monthly **50** (1943), s. 360–365.
- [MK] MacKinnon E., *Heisenberg, Models, and the Rise of Matrix Mechanics*, Historical Studies in the Physical Sciences **8** (1977), s. 137–188, ISSN 0073–2672.
- [Meh] Mehra J., *The Golden Age of Theoretical Physics I., II.*, World Scientific, Singapore, 2001, 1436 stran, ISBN 978-981-02-4342-5.
- [MR] Mehra J., Rechenberg H., *The Historical Development of Quantum Theory I.–VI.*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982–2001, Volume I.1, I.2: 1982, xlvii+372, vi+376–878 stran, Volume II: 1982, vi+355 stran, Volume III: 1982, vii+334 stran, Volume IV: 1982, viii+322 stran, Volume V.1, V.2: 1987, xviii+366, vii+368–980 stran, Volume VI.1, Vol VI.2: 2000, 2001, xxxvi+670, viii+672–1612 stran, ISBN 978-0-387-95262-8.



- [Me] Messiah A., *Mécanique quantique I., II.*, Dunod, Paris, 1959, 1960, xv+xv+974 stran. Anglicky: *Quantum Mechanics I., II.*, North-Holland, Amsterdam, 1961, 1962, xv+xv+1136 stran, 4. vydání dílu I: 1967, 5. vydání dílu II: 1969. Německy: *Quantenmechanik*, W. de Gruyter, Berlin, New York, 1976, 1979, 452+585 stran, 2. vydání dílu I: 1991, 3. vydání dílu II: 1990.
- [Mi1] Mie G., *Grundlagen einer Theorie der Materie. Erste Mitteilung*, Annalen der Physik, Vierte Folge, **37(342)** (1912), č. 3, s. 511–534.
- [Mi2] Mie G., *Grundlagen einer Theorie der Materie. Zweite Mitteilung*, Annalen der Physik, Vierte Folge, **39(344)** (1912), č. 11, s. 1–40.
- [Mi3] Mie G., *Grundlagen einer Theorie der Materie. Dritte Mitteilung*, Annalen der Physik, Vierte Folge, **40(345)** (1913), č. 1, s. 1–66.
- [Mik] Mikami Y., *The Development of Mathematics in China and Japan*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1913, 347 stran, reprint: Chelsea, New York, 1961, 1974, 389 stran, ISBN 9780828401494, Creative Media Partners, 2017, 394 stran, ISBN 9781376291681.
- [MoAt] *Die moderne Atomtheorie*, Hirzel, Leipzig, 1934, 45 stran.
- [Mu1] Muir T., *List of Writings on the Theory of Matrices (1857–1893)*, American Journal of Mathematics **20** (1898), s. 225–228.
- [Mu2] Muir T., *The Literature of Cayleyan Matrices*, Transactions of the Royal Society of South Africa **18** (1930), s. 219–227.
- [M1] Muth P., *Grundlagen für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie. Mit einem Begleitworte von M. Pasch*, Teubner, Leipzig, 1895, v+131 stran.
- [M2] Muth P., *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, Teubner, Leipzig, 1899, xvi+236 stran. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 7(1901), s. 308–316.
- [Ne1] Netto E., *Vorlesungen über Algebra I., II.*, Teubner, Leipzig, 1896, 1900, x+388, xii+519 stran.
- [Ne2] Netto E., *Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1904, viii+200 stran, 2. vydání: 1913. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 11(1905), s. 441–442.
- [Ne3] Netto E., *Gruppen- und Substitutionentheorie*, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig, 1908, viii+176 stran. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 16(1909), s. 33–35.
- [Ne4] Netto E., *Die Determinanten*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1910, vi+128 stran, 2. vydání (L. Bieberbach): 1925. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 17(1911), s. 547–548.
- [Ne5] Netto E., *Algebra*, Grundlehren der Mathematik für Studierende und Lehrer, Teubner, Leipzig, Berlin, 1915, xii+232 stran.
- [vN] von Neumann J., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 38, Springer, Berlin, 1932, 262 stran, též 1943, 1968, 1981, 2. vydání: 1996, ix+262 stran, ISBN 978-3-540-59207-5. Anglicky: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955, 464 stran, ISBN 978-0691028934, Princeton, Oxford, 2018, xviii+304 stran, ISBN 978-0-691-17856-1. Rusky: *Matematičeskije osnovy kvantovoj mechaniky*, Nauka, Moskva, 1964, 367 stran.

- [P1] Pascal E., *I determinanti: teoria ed applicazioni. Con tutte le più recenti ricerche*, Hoepli, Milano, 1897, viii+330 stran, 2. vydání: 1923. Německy: *Die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen*, Teubner, Leipzig, 1900, xvi+266 stran.
- [P2] Pascal E., *Repertorio di matematiche superiori (Definizioni – Formole – Teoremi – Cenni bibliografici)*, I. *Analisi*, II. *Geometria*, Ulrico Hoepli, Milano, 1898, 1900, xv+642, xviii+928 stran.
- [P3] Pascal E., *Repertorium der höheren Mathematik*, I. *Analysis*, II. *Geometrie*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1900, 1902, xii+638, ix+712 stran, 2. vydání: I.1, 1910, xv+528 stran, I.2, 1927, xii+529–1024, I.3, 1929, xii+1025–1598, II.1, 1910, xvi+536 stran, II.2, 1922, xii+537–1165 stran.
- [Pa] Pauli W., *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik*, Zeitschrift für Physik **36** (1926), s. 336–363. Anglicky: *On the Hydrogen Spectrum from the Standpoint of the New Quantum Mechanics*, in [Wa3], s. 387–415.
- [Per1] Perovic S., *Schrödinger's Interpretation of Quantum Mechanics and the Relevance of Bohr's Experimental Critique*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics, Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics **37** (2006), s. 275–297, ISSN 1355-2198.
- [Per2] Perovic S., *Why were Matrix Mechanics and Wave Mechanics Considered Equivalent?*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics, Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics **39** (2008), s. 444–461, ISSN 1355-2198.
- [Pe1] Perron O., *Zur Theorie der Matrizes*, Mathematische Annalen **64** (1907), s. 248–263.
- [Pe2] Perron O., *Algebra*, I. *Die Grundlagen*, II. *Theorie der algebraischen Gleichungen*, Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe. Reine Mathematik 8, 9, W. de Gruyter, Berlin, Leipzig, 1927, viii+307, viii+243 stran, 2. vydání: 1932, 1933, viii+301, viii+261 stran, 3. vydání: 1951, reprint: W. de Gruyter, Berlin, 2011. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 34(1928), s. 115–116.
- [Pie] Pietsch A., *A History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2007, xxiii+855 stran, ISBN 978-0-8176-4367-6.
- [Pi] Pincherle S., *Lezioni di algebra complementare*, I. *Analisi algebrica*, II. *Teoria delle equazioni*, Zanichelli, Bologna, 1906, 1908, vi+366, vi+356 stran, 2. vydání: 1920, 1921, 3. vydání: 1924, 1926.
- [Pu] Purrington R. D., *The Heroic Age. The Creation of Quantum Mechanics, 1925–1940*, Illustrated Edition, Oxford University Press, New York, 2018, xv+403 stran, ISBN 978-0-19-065517-4.
- [Rei] Reichenbach H., *Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik*, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Springer, Basel, 1949, 198 stran, další vydání: 2013, 198 stran, ISBN 978-3-0348-4130-6. Recenze: Archiv für Philosophie 4(1951), č. 2, s. 175.
- [Sh] Shapiro H., *The Weyr Characteristic*, The American Mathematical Monthly **106** (1999), s. 919–929, ISSN 0002-9890.
- [Schn] Schneider M., *Zwischen zwei Disziplinen: B. L. van der Waerden und die Entwicklung der Quantenmechanik*, Mathematik im Kontext, Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, xvi+411 stran, ISBN 978-3-642-21824-8.

- [ScSp1] Schreier O., Sperner E., *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra I., II.*, Hamburger mathematischen Einzelschriften, 10. Heft, 19. Heft, Teubner, Leipzig, Berlin, 1931, 1935, 238, 308 stran, 2. vydání: Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1948, 7. vydání dílu I: 1969, 6. vydání dílu II: 1963. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 38(1932), s. 622, The Mathematical Gazette 17(1933), č. 222, s. 57–58, 21(1937), č. 244, s. 240–241, Monatshefte für Mathematik und Physik 45(1936), s. A14. Anglicky: *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, Chelsea, New York, 1951, 378 stran, další vydání: 1955, 1959, Courier Corporation, 2013, viii+388 stran, ISBN 9780486278650 [jedná se o překlad celého prvního dílu a dvou kapitol druhého dílu]. *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory. Projective Geometry of  $n$  dimensions*, Chelsea, New York, 1951, 208 stran, další vydání: 1955, 1959, 1961 [jedná se o překlad třetí kapitoly druhého dílu]. Recenze: The Mathematical Gazette 37(1953), č. 321, s. 228–229, The Mathematics Teacher 45(1952), s. 483. Ruský: *Vvedenie v linejnuju algebru v geometričeskom izložennii*, ONTI, Moskva, Leningrad, 1934, 210 stran [překlad prvního dílu].
- [ScSp2] Schreier O., Sperner E., *Vorlesungen über Matrizen*, Hamburger mathematischen Einzelschriften, 12. Heft, Teubner, Leipzig, Berlin, 1932, 133 stran. Recenze: Monatshefte für Mathematik und Physik 41(1934), A15–A16. Ruský: *Teorija matric*, ONTI, 1936, 156 stran.
- [Sch1] Schrödinger E., *Quantisierung als Eigenwertproblem. Erste Mitteilungen*, Annalen der Physik **384(79)** (1926), č. 4, s. 361–376.
- [Sch2] Schrödinger E., *Quantisierung als Eigenwertproblem. Zweite Mitteilungen*, Annalen der Physik **384(79)** (1926), č. 6, s. 489–527.
- [Sch3] Schrödinger E., *Quantisierung als Eigenwertproblem. Dritte Mitteilungen*, Annalen der Physik **385(80)** (1926), č. 13, s. 437–490.
- [Sch4] Schrödinger E., *Quantisierung als Eigenwertproblem. Vierte Mitteilungen*, Annalen der Physik **386(81)** (1926), č. 18, s. 109–139.
- [Sch5] Schrödinger E., *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen*, Annalen der Physik **384(79)** (1926), č. 8, s. 734–756.
- [Sch6] Schrödinger E., *Abhandlungen zur Wellenmechanik*, Barth, Leipzig, 1927, ix+169 stran, 2. vydání: 1928.
- [Sch7] Schrödinger E., *Four Lectures on Wave Mechanics*, Blackie, London, 1928, 53 stran. Německy: *Vier Vorlesungen über Wellenmechanik*, Springer, Berlin, 1928, v+57 stran.
- [Sch8] Schrödinger E., *Über Indeterminismus in der Physik. Ist die Naturwissenschaft milieubedingt. Zwei Vorträge zur Kritik der naturwissenschaftlichen Erkenntnis*, Barth, Leipzig, 1932, 62 stran.
- [Sch9] Schrödinger E., *What is Life? The Physical Aspect of the Living Cell*, Cambridge University Press, Cambridge, 1944, viii+91 stran, další tisky: 1945, 1948, 1951, 1955, 1962, 1969, 1992, viii+184 stran, ISBN 978-1-107-60466-7. Viz též *What is Life? The Physical Aspect of the Living Cell. Mind and Matter. Autobiographical Sketches*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, viii+184 stran, 2013, ISBN 978-1-107-60466-7. Německy: *Was ist Leben? Die lebende Zelle mit den Augen des Physikers betrachtet*, Francke, Bern, 1946, 143 stran, 4. vydání: Piper, München, 1999, 156 stran, ISBN 978-3-492-21134-5. Ruský: *Čto takoe žizn'*, 1972. Česky: *Co je život? Duch a hmota. K mému životu*, VUTIUM, Brno, 2004, 254 stran, ISBN 80-214-3175-X, dotisk: 2006, 2. vydání: 2018, 289 stran, ISBN 978-80-214-5007-3.

- [Sch10] Schrödinger E., *Statistical Thermodynamic. A Course Seminar Lectures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1946, 88 stran, další tisky: 1948, 1952, 1962, 1968, 1989, 2013, 95 stran, ISBN 978-0486318608. Německy: *Statistische Thermodynamik*, Barth, Leipzig, 1952, 106 stran.
- [Sch11] Schrödinger E., *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, Cambridge, 1950, viii+119 stran, další tisky: 1954, 1960, 1985, 1986, 1991, 1994, 1997, ISBN 0-521-31520-4. Německy: *Die Struktur der Raum-Zeit*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1993, viii+136 stran, ISBN 3-534-02282-3. Rusky: *Prostranstvenno-vremennaja struktura vselennoj*, Nauka, Moskva, 1986, 221 stran.
- [Sch12] Schrödinger E., *Science and Humanism. Physics in Our Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1951, 68 stran. Německy: *Naturwissenschaft und Humanism. Die heutige Physik*, Deuticke, Wien, 1951, 88 stran.
- [Sch13] Schrödinger E., *Nature and the Greeks. Science and Humanism*, Cambridge University Press, Cambridge, 1954, nové vydání: 1996, x+172 stran, 2014, ISBN 978-1107431836. Německy: *Die Nature und die Griechen. Kosmos und Physik*, Rowohlt, Hamburg, 1956, 145 stran. Polsky: 2017.
- [Sch14] Schrödinger E., *Expanding Universes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1956, viii+93 stran.
- [Sch15] Schrödinger E., *Mind and Matter*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958, vii+103 stran. Německy: *Geist und Materie*, Die Wissenschaft, Band 113, Vieweg, Braunschweig, 1959, viii+78 stran, další vydání: Diogenes Taschenbuch, Zsolnay, 1989, 146 stran, ISBN 3-257-21782-X.
- [Sch16] Schrödinger E., *Was ist ein Naturgesetz? Beiträge zum naturwissenschaftlichen Weltbild*, Oldenbourg, München, 1962, 146 stran, 7. vydání: de Gruyter, Oldenbourg, 2012, 148 stran, ISBN 978-3486716580.
- [Sch17] Schrödinger E., *Die Wellenmechanik*, Dokumente der Naturwissenschaft, Abteilung Physik, Band 3, Battenberg, Stuttgart, 1963, 199 stran.
- [Sch18] Schrödinger E., *Meine Weltansicht*, Bücher des Wissens, Fischer Bücherei, Frankfurt am Mein, 1963, 149 stran. Anglicky: *My View of the World*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964, viii+109 stran.
- [Sch19] Schrödinger E., *Mein Leben. Meine Weltansicht*, Zsolnay, Wien, Hamburg, 1985, 181 stran.
- [Š] Štěpánová M., *Počátky teorie matic v českých zemích a jejich ohlasy*, edice Dějiny matematiky, svazek 56, Matfyzpress, Praha, 2014, 473 stran, ISBN 978-80-7378-254-2.
- [T] Turnbull H. W., *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants*, Blackie & Son Ltd., London and Glasgow, 1928, xvi+338 stran, dotisky: 1929, 1945, 2. vydání: 1948, 368 stran, dotisky: 1950, 1960. Recenze: Bulletin of the Mathematical Society 36(1930), s. 29–30, The Mathematical Gazette 14(1929), č. 201, s. 466–467, Monatshefte für Mathematik und Physik 37(1930), s. A9.
- [TA] Turnbull H. W., Aitken A. C., *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Blackie, London, Glasgow, Bombay, 1932, xiii+192 stran, další vydání: 1945, 1948, 1950, 1952, reprint: Dover, New York, 1961, 2004, 224 stran, ISBN 978-0486441689. Recenze: Nature 130(1932), s. 867.
- [Tv] Tvrdá J., *Vznik teorie matic*, Dějiny věd a techniky **3** (1970), s. 11–23. Anglicky: *On the Origin of the Theory of Matrices*, Acta Historiae Rerum Naturalium Necnon Technicarum 5(1971), s. 335–354.
- [Vo] Vogel K., *Neun Bücher arithmetischer Technik*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Vieweg, Braunschweig, 1968, 159 stran, ISSN 0232-3419, další vydání: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013, 160 stran, ISBN 978-3-322-97959-9.

- [Wa1] van der Waerden B. L., *Moderne Algebra I., II.*, Springer, Berlin, 1930, 1931, viii+243, vii+216 stran, 4. vydání: *Algebra*, Springer, 1955, 9. vydání dílu I: 1993, xii+272 stran, ISBN 978-3642855283, 6. vydání dílu II: 1993, xii+300 stran, ISBN 978-3540568018. Anglicky: *Modern Algebra I., II.*, Ungar, New York, 1949, 1950, xii+264, ix+222 stran, nejnovější vydání: Springer, New York, 2003, xiv+265, xii+284 stran, ISBN 978-0387406244, 978-0387406251. Rusky: 1934, 1947, 1976, 1979, Nauka, Moskva, 2004, 623 stran.
- [Wa2] van der Waerden B. L., *Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 36, Springer, Berlin, 1932, viii+157 stran, další vydání: Springer-Verlag, Berlin, 1980, viii+211 stran. Recenze: *The Mathematical Gazette* 16(1932), č. 220, s. 287–288. Anglicky: *Group Theory and Quantum Mechanics*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 214, Springer, Berlin, 1974, viii+211 stran, ISBN 3-540-06740-X.
- [Wa3] van der Waerden B. L., *Gruppen von linearen Transformationen*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 4, Springer, Berlin, 1935, iii+91 stran, další vydání: Chelsea, New York, 1948.
- [Wa4] van der Waerden B. L. (ed.), *Sources of Quantum Mechanics*, Classics of Science, Volume V, Dover, New York, 1967, vii+430 stran, ISBN 0-486-61881-1, resp. North-Holland, Amsterdam, 1967, xi+430 stran. Recenze: *American Journal of Physics* 36(1968), č. 4, s. 374–375, *Physics Today* 21(1968), č. 7, s. 97–97.
- [Web] Weber H., *Lehrbuch der Algebra I., II.*, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1895, 1896, xv+654, xiv+796 stran, 2. vydání: 1898, 1899, xvi+704, xvi+856 stran, 3. vydání: Chelsea, New York, 1961, reprint: AMS Chelsea, Providence, RI, 2002. Francouzsky: *Traité d'algèbre supérieure. Principes, racines des équations, grandeurs algébriques, théorie de Galois*, Gauthier-Villars, 1898, xi+764 stran. Recenze: *Bulletin of the American Mathematical Society* 3(1897), s. 174–195, 4(1898), s. 200–234, 5(1899), s. 480–482, *Science. New Series* 38(1913), č. 981, s. 550–551.
- [Wed] Wedderburn J. H. M., *Lectures on Matrices*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume 17, American Mathematical Society, New York, 1934, vii+200 stran, reprinty: Lithoprinters Ann Arbor, Michigan, U.S.A., 1949, vii+205 stran, AMS Press, Providence, 1960, Dover, New York, 1964, vii+200 stran, další reprinty: 1977, 2002, 2008, vii+205 stran. Recenze: *Bulletin of the American Mathematical Society* 41(1935), s. 471–472, *The Mathematical Gazette* 19(1935), č. 235, s. 308–310, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 42(1935), s. A26–A27.
- [W] Weinberg S., *Lectures on Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013, xix+358 stran, ISBN 978-1-107-02872-2, 2. vydání: 2015, xxii+419 stran, ISBN 978-1-107-11166-0.
- [We1] Weyl H., *Raum, Zeit, Materie – Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie*, Springer, Berlin, 1918, viii+234 stran, 2. vydání: 1919, 5. vydání: 1923, viii+338 stran, Peking, 1950, ix+300 stran. Anglicky: *Space-Time-Matter*, Dover, Mineola, 1952, xvi+330 stran.
- [We2] Weyl H., *Das Kontinuum – kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Veit und Comp., Leipzig, 1918, iv+83 stran. Anglicky: *The Continuum: a Critical Examination of the Foundation of Analysis*, 1987, Dover, New York, 1994, xxvi+130 stran.
- [We3] Weyl H., *Was ist Materie? Zwei Aufsätze zur Naturphilosophie*, Springer, Berlin, 1924, 88 stran.

- [We4] Weyl H., *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Oldenbourg, München, Berlin, 1927, 162 stran, 3. rozšířené vydání: 1966, 406 stran, 6. vydání: 1990, viz též A. Baeumler, M. Schröter (eds.): *Handbuch der Philosophie*, Teil A. Anglicky: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 1949, x+311 stran, další vydání: 2009, xvii+311 stran, ISBN 978-0-691-14120-6.
- [We5] Weyl H., *Quantenmechanik und Gruppentheorie*, Zeitschrift für Physik **46** (1927), s. 1–46.
- [We6] Weyl H., *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel, Leipzig, 1928, viii+228 stran, 2. přepracované vydání: 1931, xii+366 stran, reprinty: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1967, 1981, ISBN 978-3-534-06668-1. Recenze: Deutsche Literaturzeitung für Kritik der internationalen Wissenschaft 49(1928), s. 2474, Monatshefte der Mathematik und Physik 36(1929), s. A48–A52, Angewandte Chemie 42(1929), č. 19, s. 486, Scientia 26(1932), s. 112. Anglicky: *Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Methuen & Company, 1931, 422 stran, Dover, New York, 1950, xxii+422 stran, ISBN 0-486-60269-9, Martino Fine Books, 2014, 448 stran, ISBN 978-1614275800. Rusky: *Teorija grup i kvantovaja mechanika*, Nauka, Moskva, 1986, 495 stran.
- [Wh] Whitehead A. N., *A Treatise on Universal Algebra with Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1898, xxvi+586 stran.
- [Wig1] Wigner E. P., *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, Vieweg, Braunschweig, 1931, viii+332 stran, reprint: 1977, ISBN 3-528-08353-X. Anglicky: *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Pure and Applied Physics, Volume 5, Academic Press, New York and London, 1959, 372 stran, další tisky: 1960, 1962, 1964, Elsevier, 2012, 386 stran, ISBN 9780323152785. Recenze: American Journal of Physics 28(1960), s. 408–409, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 12(1960), č. 1, s. 67.
- [Wig2] Wigner E. P., *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Richard Courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959, Communications on Pure and Applied Mathematics **13** (1960), s. 1–14.
- [Wi] Wintner A., *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Einführung in den analytischen Apparat der Quantenmechanik*, Hirzel, Leipzig, 1929, xiii+280 stran. Recenze: Bulletin of the American Mathematical Society 37(1931), s. 651–652.

## Poděkování

Studie byla podpořena grantem GA ČR *Dopad první světové války na utváření a proměny vědeckého života matematické komunity* s registračním číslem 18-00449S.

## Adresa

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.  
 Matematicko-fyzikální fakulta UK  
 Sokolovská 83  
 186 75 Praha 8  
 e-mail: becvar@karlin.mff.cuni.cz