Zdeněk Halas
Třetí Hilbertův problém

In: Martina Bečvářová (author); Jindřich Bečvář (author); Zdeněk Halas (author); Magdalena Hykšová (author); Antonín Slavík (author); Ivan Netuka (author); Jiří Veselý (author); Jaroslav Zhouf (author): Matematický svět mezi válkami. (Czech). Praha: České vysoké učení technické v Praze, Ústav aplikované matematiky Fakulty dopravní ČVUT, 2020.
pp. 173–[184].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404397

# Třetí Hilbertův problém

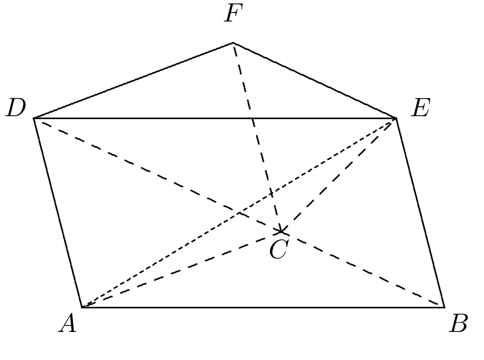
Zdeněk Halas

**Abstract.** In this chapter, we will briefly introduce Hilbert's third problem and its solution presented by Hilbert's student Max Dehn. We will also recall further developments in this area. Finally, we present a recently discovered solution to Hilbert's third problem, presented by the Polish mathematician Ludwik Antoni Birkenmajer in 1882.

**Key words.** Hilbert's third problem, Max Dehn, Ludwik Antoni Birkenmajer.

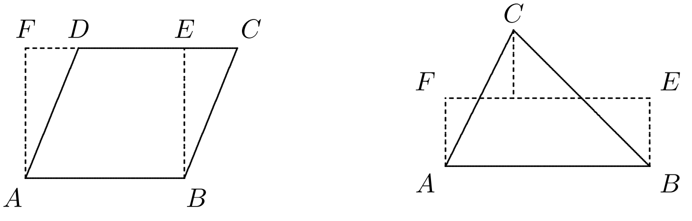
## 1. Formulace problému

Ve školních kabinetech můžeme vidět model trojbokého hranolu, který je složen ze tří trojbokých jehlanů, jež mají stejný objem (viz obr. 1). Demonstruje se tím skutečnost, že objem trojbokého jehlanu je jednou třetinou objemu trojbokého hranolu, pokud mají obě tělesa shodné podstavy a stejnou výšku. Problémem však je, že tyto tři jehlany, na něž se hranol rozkládá, nejsou shodné. Názornou demonstraci je proto ještě třeba doplnit *důkazem tvrzení, že každé dva jehlany, které mají tutéž podstavu a stejnou výšku, mají stejný objem.*




Obr. 1. Rozklad trojbokého hranolu $ABCDEF$
na tři trojboké jehlany $ABEC$, $DEFC$ a $DAEC$

Důkaz tohoto tvrzení je obsažen již v Eukleidových *Základech*, je však založen na exhaustační metodě; v porovnání s odvozeními vztahů pro obsahy některých čtyřúhelníků je tento důkaz náročný. Například vztah pro obsah rovnoběžníku odvodíme tak, že jej převedeme na obdélník přesunutím jednoho trojúhelníku, který z rovnoběžníku oddělíme. Podobně odvodíme vztah pro obsah obecného trojúhelníku tak, že jej převedeme na obdélník přesunutím dvou menších trojúhelníků (viz obr. 2).




Obr. 2. Transformace rovnoběžníku $ABCD$ na rovnoplochý obdélník $ABEF$
Transformace trojúhelníku $ABC$ na rovnoplochý obdélník $ABEF$

Analogicky bychom tedy mohli očekávat podobně jednoduchý důkaz tvrzení, že každé dva trojboké jehlany $J$ a $J'$, které mají shodné podstavy a stejnou výšku, mají stejný objem; tento důkaz by byl založen na jejich rozkladech na konečně mnoho čtyřstěnů: jehlan $J$ na čtyřstěny $T_1, T_2, \ldots, T_n$ a jehlan $J'$ na čtyřstěny $T'_1, T'_2, \ldots, T'_n$, přičemž čtyřstěny $T_i$ a $T'_i$ jsou pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ shodné. Existují-li takové rozklady těles $J$ a $J'$, říkáme, že jsou *ekvidekomposabilní*. Obecný postup nalezení takových rozkladů se však stále nedařilo najít. Jinými slovy, nedařilo se dokázat tvrzení, že každé dva trojboké jehlany $J$ a $J'$ mají stejný objem právě tehdy, když jsou ekvidekomposabilní.

David Hilbert (1862–1943) o tom píše v [Hi2], což je první publikace úplného seznamu slavných 23 Hilbertových problémů (viz též [Hi1], [Hi3], [Hi4]). V původní přednášce, kterou Hilbert přednesl 8. srpna 1900 na Druhém mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v sekci Historie a bibliografie matematiky, však tento problém uveden nebyl.[1]

Uveďme nyní kompletní znění třetího problému dle [Hi2].

*Z oblasti základů geometrie bych chtěl zmínit následující problém:*

*3. Rovnost objemů dvou čtyřstěnů se základnami stejného obsahu a se stejnou výškou.*

*Gauss vyjadřuje ve dvou dopisech Gerlingovi své politování nad tím, že jisté stereometrické věty závisí na exhaustační metodě, tj., moderně řečeno, na axiómu spojitosti (nebo na Archimédovu axiómu).*

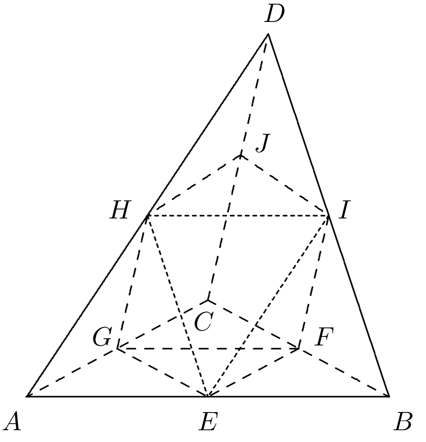
*Gauss zmiňuje zejména Eukleidovo tvrzení, že trojboké jehlany se stejnými výškami jsou ve stejném poměru jako jejich podstavy. Analogický problém v rovině už byl vyřešen. Gerlingovi se také podařilo dokázat rovnost objemů dvou symetrických mnohostěnů pomocí jejich rozkladu na shodné části. Přesto*

[1] Hilbert na radu Adolfa Hurwitze (1859–1919) a Hermanna Minkowskiho (1864–1909) přednesl z připravených třiadvaceti problémů jen deset.

*se mi zdá pravděpodobné, že obecný důkaz výše zmíněného Eukleidova tvrzení tímto způsobem není možný; jednalo by se tedy o rigorózní důkaz jeho nemožnosti. Takový by byl proveden, pokud by se podařilo uvést dva čtyřstěny se stejným obsahem podstavy a se stejnou výškou, které nelze žádným způsobem rozložit na shodné čtyřstěny a které nelze ani připojením shodných čtyřstěnů doplnit na takové mnohostěny, pro něž je rozklad ve shodné čtyřstěny možný.*

## 2. Řešení třetího Hilbertova problému

V Eukleidových *Základech* je ve XII. knize v propozici 7 dokázáno, že trojboký hranol lze rozložit na tři čtyřstěny stejného objemu (viz obr. 1). Tyto čtyřstěny však nejsou shodné. Eukleidés proto musel dokázat (viz XII. 5), že poměr objemů trojbokých jehlanů, které mají stejnou výšku, je roven poměru obsahů jejich podstav. Důkaz založil na exhaustační metodě a na rozkladu jehlanu s trojúhelníkovou podstavou (viz XII. 3) na dva shodné jehlany (podobné celému jehlanu) a dva hranoly stejného objemu (dohromady většího než polovina objemu celého jehlanu) – viz obr. 3.




Obr. 3. Rozklad trojbokého jehlanu $ABCD$
na dva shodné jehlany $AEGH$, $HIJD$
a dva trojboké hranoly $GFCHIJ$, $BFIEGH$ stejného objemu

David Hilbert očekával, že bude v důkazu propozice XII. 5 použití exhaustační metody nutné. Proto ve třetím problému požadoval uvést dva čtyřstěny se stejným obsahem podstavy a se stejnou výškou, které nejsou ekvidekomposabilní.

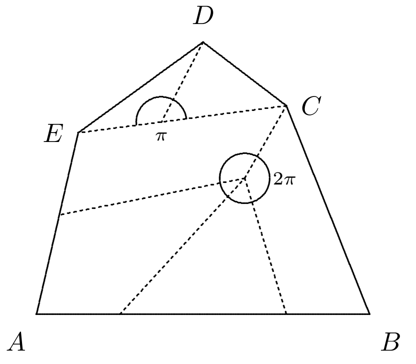
Publikované řešení na sebe nenechalo dlouho čekat. Ještě v roce 1900 vydal Hilbertův žák Max Dehn článek [De1], v němž odvodil nutné podmínky ekvidekomposability a – moderně řečeno – předložil příklady mnohostěnů s různými Dehnovými invarianty (např. krychle a pravidelný čtyřstěn). Zároveň přislíbil, že v dalším článku [De2] předloží důkaz – opět moderně řečeno – že ekvidekomposabilní mnohostěny musí mít stejný Dehnův invariant. Celý důkaz byl tedy založen na tom, že mnohostěnu přiřadil číslo (dnes nazývané Dehnův invariant), které se při rozkladu na menší mnohostěny nemění. Po důkazu tvrzení, že ekvidekomposabilní mnohostěny musí mít stejný Dehnův invariant, stačilo předložit dva čtyřstěny, které mají shodné základny a stejné výšky, přesto je však jejich Dehnův invariant různý.

Kuriozní je, že článek [De1] se objevil v témže třetím sešitu výroční zprávy Královské vědecké společnosti v Göttingenu jako první publikace všech 23 Hilbertových problémů [Hi2].

V článku [De2] Max Dehn popsal, jak k základní myšlence dospěl. Postupoval analogicky jako u mnohoúhelníků. Rozložíme-li totiž mnohoúhelník $P$ na dílčí mnohoúhelníky $P_1, \ldots, P_n$, dostaneme:

$$U(P) + n\pi = \sum_{i=1}^{n} U(P_i)\,,$$

kde $U(C)$ označuje součet vnitřních úhlů mnohoúhelníku $C$.




Obr. 4. Rozklad pětiúhelníku $ABCDE$ na dílčí trojúhelníky a čtyřúhelníky

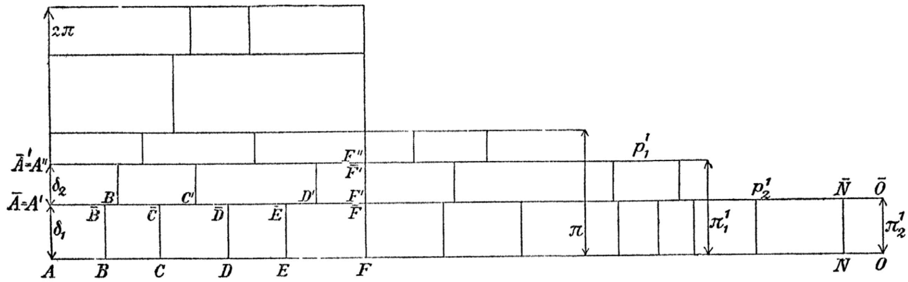
Nutná podmínka ekvidekomposability dvou mnohoúhelníků $P'$ a $P''$ je tedy:

$$U(P') + n'\pi = U(P'') + n''\pi\,,$$

neboli

$$U(P') = U(P'') \mod \pi\,.$$

V prostoru pak Max Dehn zavedl tzv. *dělicí plochy*, čímž převedl trojrozměrný problém na dvourozměrný. Dělicí plocha totiž shrnuje informace o mnohostěnu: skládá se z obdélníků, jejichž jedna strana je vždy rovna délce hrany mnohostěnu a druhá strana je rovna délce oblouku jednotkové kružnice, který odpovídá úhlu, jenž svírají příslušné stěny (tzv. *dihedrální úhel*). Po rozkladu mnohostěnu na dílčí mnohostěny mohou vzniknout obdélníky tří typů: s výškou rovnou $\pi$ (hrana leží ve stěně), $2\pi$ (hrana leží uvnitř původního mnohostěnu) a s výškou rovnou jiné hodnotě (hrana je součástí některé z hran; Dehn tyto hodnoty značí $\pi_1, \pi_2, \dots$). Podmínky ekvidekomposability dvou mnohostěnů se tím převedly na problém nalezení nutné podmínky pro přeměnu jedné dělicí plochy ve druhou.




Obr. 5. Příklad dělicí plochy mnohostěnu, jak jej uvedl ve svém článku [De1] Max Dehn

Dehn tak dospěl k nutné podmínce ekvidekomposability mnohostěnů:

$$n_1'\pi_1' + n_2'\pi_2' + \cdots + n_k'\pi_k' + n'\pi = n_1''\pi_1'' + n_2''\pi_2'' + \cdots + n_k''\pi_k'' + n''\pi\,,$$

kterou však odvodil již Raoul Bricard (1870–1943) v článku [Bri] z roku 1896 (tzv. Bricardova podmínka). Koeficienty $n_i'$ a $n_j''$ Dehn určil jako celá čísla vyhovující jisté homogenní lineární soustavě.

Dehnovo odvození rovnic popisujících transformace dělicích ploch bylo však náročné a málo srozumitelné. Veniamin Fedorovič Kagan (1869–1953) ve svém článku [Kag] upozornil na to, že místo koeficientů $n_i'$ a $n_j''$ mohou vystupovat přímo délky hran, a tím podmínku ekvidekomposability mnohostěnů podstatně zjednodušil.

Ve druhé polovině 20. století došlo k zásadnímu posunu ve zkoumání rozložitelnosti mnohostěnů. Hugo Hadwiger (1908–1981) definoval v [Ha1] na množině všech mnohostěnů $\mathbb{P}$ v prostoru funkcionál $D$ invariantní vůči rozkladu i vůči shodnosti, tj. splňující podmínky

$D(P) = D(P_1) + D(P_2)$, lze-li mnohostěn $P$ rozložit na mnohostěny $P_1$ a $P_2$,

$D(P) = D(P')$, jsou-li mnohostěny $P$ a $P'$ shodné,

který nazval *Dehnovým invariantem*.

V článcích [Ha1] a [Jes] se podařilo nezávisle dokázat, že funkcionály s těmito vlastnostmi existují. Hadwiger v [Ha2] uvedl konkrétní příklad funkcionálu, který je Dehnovým invariantem. Zavedl za tím účelem pojem *dihedrální funkce*, tj. funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující vlastnosti

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

$$f(\pi) = 0.$$

Pak již mohl definovat funkcionál

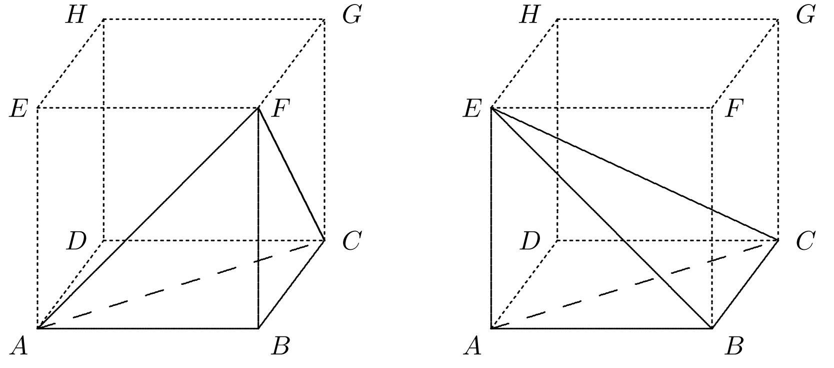
$$\chi(P) = \sum_k p_k f(\pi_k)\,,$$

kde $p_k$ jsou délky hran mnohostěnu $P$ a $\pi_k$ velikosti příslušných stěnových úhlů, o němž dokázal, že je Dehnovým invariantem.

Vypočtěme například Dehnův invariant jednotkové krychle $K$: délky všech hran $p_1, \dots, p_{12}$ jsou rovny jedné, velikosti všech dihedrálních úhlů $\pi_1, \dots, \pi_{12}$ jsou rovny $\frac{\pi}{2}$, takže

$$\chi(K) = \sum_{k=1}^{12} p_k f(\pi_k) = 12 \cdot p_k f(\pi_k) = 12 \cdot 1 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} f(\pi) = 0\,.$$

Nyní je již řešení třetího Hilbertova problému snadné. Max Dehn předložil dva čtyřstěny s vrcholy ležícími ve vybraných vrcholech krychle se shodnými podstavami a stejnými výškami (viz obr. 6). Pokud bychom vypočetli Dehnovy invarianty těchto dvou čtyřstěnů, obdrželi bychom různé hodnoty. Tím je dokázáno, že tyto dva čtyřstěny se shodnými podstavami a stejnou výškou nejsou ekvidekomposabilní.




Obr. 6. Čtyřstěny $ABCF$ a $ABCE$, které nejsou ekvidekomposabilní

Všimněme si, že Dehnovy invarianty umožňují dokázat, že dva mnohostěny nemají žádný společný rozklad: nejsou-li si hodnoty Dehnova invariantu rovny, nejsou navzájem rozložitelné. Opačnou implikaci se podařilo dokázat mnohem později, a to v článcích [Syd] a [Jes] (tzv. Dehn-Sydlerova věta): dva mnohostěny jsou navzájem rozložitelné modulo hranoly právě tehdy, když jsou si rovny jejich Dehnovy invarianty.

Ve druhé polovině 20. století také došlo k zobecnění předchozích výsledků. Situací v prostorech dimenze větší než tři se úspěšně zabýval Hugo Hadwiger ve svém článku [Ha3]. Přenesení Dehnovy-Sydlerovy věty do prostorů s konstantní křivostí se však dosud nepodařilo. Dílčí výsledky týkající se geodetických mnohostěnů alespoň vedly k dalšímu zjednodušení důkazu Dehnovy-Sydlerovy věty v rámci eukleidovské geometrie.

## 3. Max Dehn (1878–1952)

Podívejme se nyní na osobu Maxe Dehna, autora prvního publikovaného řešení třetího Hilbertova problému.

Max Dehn se narodil 13. listopadu roku 1878 jako čtvrté z osmi dětí úspěšného lékaře Maximilliana Mosese Dehna. Vyrůstal v sekularizované židovské rodině. Sám se po otcově smrti, když mu bylo devatenáct let, připojil k Luterské církvi. Po absolvování gymnázia v Hamburku začal studovat na univerzitě ve Freiburgu. Ve studiích pokračoval v Göttingenu, kde získal v roce 1900 doktorát. Poté působil jako asistent na technické škole v Karlsruhe, po habilitaci od roku 1901 jako soukromý docent v Münsteru, a od roku 1911 byl mimořádným profesorem v Kielu, od roku 1913 pak řádným profesorem na univerzitě v Breslau. Mezi jeho odborné zájmy patřila zejména algebraická topologie, mladá disciplína, u jejíhož vzniku na přelomu 19. a 20. století stál zejména Henri Poincaré (1854–1912).

Za svého působení v Kielu se při víkendové návštěvě v Hamburku setkal ve svých 33 letech s Toni Landau, devatenáctiletou studentkou umění z Berlína, dcerou redaktora, divadelního kritika a spisovatele. Po krátké známosti se vzali a měli celkem tři děti: Helmuta Maxe (*1914), Mariu (*1915) a Evu (*1919). V letech 1915 až 1918 působil Max Dehn na východní frontě jako zeměměřič, poté v ústředí šifroval zprávy.

V roce 1921 byl Max Dehn jmenován řádným profesorem na univerzitě ve Frankfurtu. Zde se věnoval zejména slavnému Frakfurtskému semináři z historie matematiky, který se konal každý čtvrtek odpoledne od čtyř do šesti hodin. Carl Ludwig Siegel (1896–1981) jej popsal takto:

*Základní ideou těchto seminářů bylo studovat prameny nejvýznamnějších matematických myšlenek všech dob … Zabývali jsme se tedy starověkými autory, nejvíce Eukleidem a Archimédem, a to po několik semestrů. Jindy jsme se po několik semestrů zabývali vývojem algebry a geometrie od středověku po 17. století, kdy jsme se seznámili s díly Leonarda Pisánského, Viety, Cardana, Descarta, Desarguea. Naše společné studium myšlenek, z nichž se v 17. století vyvinul infinitezimální počet, bylo rovněž přínosné. Zde jsme se zabývali mimo jiné objevy Keplera, Huygense, Stevina, Fermata, Gregoryho a Barrowa. …*

*Nesnažili jsme se za každou cenu publikovat. Skutečný význam semináře spočíval v něčem jiném: v tom, aby byl povzbuzením pro studenty, kteří se jej účastnili, a aby lépe porozuměli tomu, čemu se učili na přednáškách. Seminář byl užitečný i pro nás vyučující: dával nám radost ze sledování úžasných výsledků starších období.*

Texty se na tomto semináři četly vždy v původních jazycích: řecky, latinsky, italsky, francouzsky, holandsky, … Účastníků tedy nebylo nikdy příliš mnoho.

Postupně však na Maxe Dehna začaly doléhat politické změny. V roce 1933 někteří z jeho přátel přišli o venia legendi. Na něho samotného se vztahovaly výjimky, ale už v roce 1935 ztratil své postavení na univerzitě a musel odejít do penze. Frankfurt však neopustil, neboť bylo těžké opustit příjemné místo k bydlení a knihy, které by si nemohl vzít s sebou. Situace se však začala dramaticky zhoršovat v roce 1938. Max Dehn byl dokonce zatčen, ale následně byl poslán domů, protože pro něho v přeplněné věznici nebylo místo. Rozhodl se skrývat; podařilo se mu odjet vlakem a po několika dnech s manželkou dorazili do Hamburku, následně přes Kodaň do Norska, kde Max Dehn získal místo v Technologickém institutu v Trondheimu. 9. dubna 1940 však došlo k invazi německých vojsk do Norska, a tak museli s manželkou uprchnout. Díky tomu, že ještě z Frankfurtu znali dermatoložku Clare Haas, která přesídlila do Idaho a jíž se podařilo Maxu Dehnovi zajistit místo na místní univerzitě, mohli se vydat na cestu do Spojených států. Cestovali přes Sibiř, Japonsko a Tichý oceán. Na univerzitě v Idaho mohl strávit jen jeden rok, a tak hledal další možnosti zaměstnání: nejprve působil v Chicagu, pak v Marylandu, kde měl vyučovat matematiku přímo z Eukleida, Apollónia či Newtona. Nebylo to však ideální, neboť studenti nebyli na tento školní program připraveni. Nakonec v roce 1944 začal působit na Black Mountain College v Severní Karolíně, kde bylo dobré intelektuální prostředí. Studovali tam zejména básníci, hudebníci a další umělci různého zaměření. I když tam byl jediným matematikem, cítil se tam být celkem šťastným a zůstal tam až do konce svého života.

## 4. Ludwik Antoni Birkenmajer

Dehnovo řešení problému, který David Hilbert předložil jako třetí ve svém seznamu, však nebylo první, jak nedávno upozornili Danuta Ciesielska a Krzysztof Ciesielski v článku [CC]. Jelikož byl problém objemu jehlanu v 19. století dobře znám, tak byl zadán 12. června 1882 jako druhý ze dvou problémů v soutěži, kterou vypsala Akademie věd a umění v Krakově. Zadání znělo takto:

*Jsou-li dány libovolné dva čtyřstěny stejného objemu, rozdělte jeden z nich rovinami, je-li to možné, na nejmenší možný počet částí, které mohou být přerovnány tak, aby vytvořily druhý čtyřstěn.*

*Pokud to není možné provést, nebo je to možno provést za jistých omezujících podmínek, tak dokažte, že to není možné, nebo uveďte přesně tyto podmínky.*

První soutěžní problém byl algebraický, vypsaná odměna byla tisíc francouzských franků. Za úspěšné vyřešení druhého problému, jenž se týkal objemu jehlanu, byla odměna 500 franků. Zadání obou problémů předložil Akademii věd a umění v Krakově polský matematik Władysław Kretkowski (1840–1910), který také nabídl vypsané odměny.

Ve zprávě [Roz] se můžeme dočíst o výsledcích soutěže. První problém (algebraický) nevyřešil nikdo. K druhému problému se sešla dvě řešení. Dle pravidel soutěže byla označena pseudonymy.

První řešitel si zvolil pseudonym *Eureka*. Popsal pouze jeden případ, a to ještě za dalších omezujících podmínek, takže nesplnil zadání. Druhý řešitel zaslal své řešení pod pseudonymem ’AEI ‘O ΘEOΣ ΓEΩMETPEI. Ve zprávě [Roz] se o něm píše: *Druhý článek je naprosto odlišný: je přísně vědecký, obsahuje 40 stran a 7 obrázků, členěn je do tří kapitol.* Jeho hodnocení bylo pozitivní, porota jej ohodnotila jako článek vysoké kvality, který obsahuje řešení problému a zasluhuje odměnu. V této zprávě je pouze dvoustránkové shrnutí autorova řešení, a tak nebylo jednoznačně prokazatelné, že je řešení skutečně správné. Danuta Ciesielska a Krzysztof Ciesielski však naštěstí nalezli ve vědecké knihovně PAU a PAN (Polská akademie umění a Polská akademie věd) kompletní původní rukopis článku zaslaného do soutěže, takže je nyní zřejmé, že řešení bylo skutečně správné.

Po vyhlášení výsledků soutěže se ukázalo, že řešitelem byl osmadvacetiletý učitel matematiky Ludwik Antoni Birkenmajer (1855–1929). Studoval na univerzitě ve Lvově, kde získal roku 1879 doktorát. Dále pokračoval ve studiích ve Vídni. V letech 1880 až 1909 vyučoval matematiku a fyziku na střední zemědělské škole v Czernichówě nedaleko Krakova. Zároveň se v roce 1881 habilitoval na Jagellonské univerzitě v Krakově, kde působil jako soukromý docent a přednášel matematickou fyziku. V roce 1897 pro něho zřídili na Jagellonské univerzitě stolici Dějin exaktních věd, kde byl profesorem až do konce života. Známé je zejména jeho rozsáhlé dílo o Koperníkovi [Bir].

Podívejme se nyní aspoň stručně na Birkenmajerovo řešení. Založil jej na důkazu tvrzení, že rozklad dvou čtyřstěnů ze zadání je možný pouze za jistých podmínek, čímž ukázal, že obecně dva čtyřstěny stejného objemu nejsou ekvidekomposabilní.

V první kapitole zkoumal řezy čtyřstěnu rovinou, čímž dostal trojúhelníky a čtyřúhelníky, následně zkoumal mnohostěny, které pomocí řezů čtyřstěnu rovinou vznikají, užíval při tom Eulerovu větu pro mnohostěny.

Druhá kapitola již obsahuje podmínky řešitelnosti. Birkenmajer našel parametry, které mu umožnily najít invariant ekvidekomposability. Pomocí vztahu odvozeného v předchozí kapitole našel

$$2n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 9n$$

podmínek ($n$ je počet rovin) existence společného rozkladu čtyřstěnů $T_1$ a $T_2$, která závisí na existenci řešení jistých diofantických rovnic. Sám pak shrnuje, že

*... úloha je řešitelná pouze tehdy, když existuje aspoň 7 podmínek ve tvaru rovnic obsahujících 11 invariantů charakterizujících $T_1$ a $T_2$ tak, že čtyři z těchto invariantů jsou nezávislé. Je-li to splněno, pak existuje právě jedna rovina řešící úlohu.*

V poslední kapitole udává přesné podmínky, kdy je úloha řešitelná; důsledkem je, že řešení existuje pouze ve dvou speciálních případech:

1) když jedna stěna čtyřstěnu je rovnoramenným trojúhelníkem a dihedrální úhel při základně tohoto trojúhelníku je pravý,

   nebo

2) když jedna stěna čtyřstěnu je rovnoramenným trojúhelníkem a dihedrální úhel mezi osou úhlu při jeho vrcholu a hranou proti její základně je pravý.

Práce obsahuje ještě zajímavý dodatek, v němž Birkenmajer upozorňuje na to, že tento geometrický problém lze převést na problém algebraický: na zkoumání polynomiální funkce.

Birkenmajer své řešení, které zaslal do soutěže, nikdy nepublikoval. Zůstalo v rukopise, psané polsky, a tak se o něm matematická veřejnost nemohla dozvědět. Ani David Hilbert tedy nemohl vědět, že problém objemu jehlanu, který zařadil do svého seznamu na třetí místo, byl už vyřešen.

## LITERATURA


[Bir] L. A. Birkenmajer, *Mikolaj Kopernik. Cz. 1.: Studya nad pracami Kopernika oraz materyaly biograficzne*, Skład Główny w Księgarni Spółki Wydawniczej Polskiej, Kraków, 1900.

[Bol] V. G. Boltjanskij, *Tret'ja problema Gil'berta*, Nauka, Moskva, 1977.

[Bri] R. Bricard, *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres*, Nouvelles annales de mathématiques, III, **15** (1896), s. 331–334.

[CC] D. Ciesielska, K. Ciesielski, *Equidecomposability of Polyhedra: A Solution of Hilbert's Third Problem in Kraków before ICM 1900*, The Mathematical Intelligencer **40** (2018), No. 2, s. 55–63.

[De1] M. Dehn, *Über raumgleiche Polyeder*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-physik. Klasse, 1900, s. 345–354.

[De2] M. Dehn, *Über den Rauminhalt*, Mathematische Annalen **55** (1902), s. 465–478.

[Gau] *Carl Friedrich Gauss, Werke VIII*, Teubner, Leipzig, 1900.

[Ha1] H. Hadwiger, *Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionale*, Commentarii Mathematici Helvetici **24** (1950), s. 204–218.

[Ha2] H. Hadwiger, *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder*, Archiv der Mathematik **2** (1950), s. 441–444.

[Ha3] H. Hadwiger, *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder*, Mathematische Annalen **127** (1954), s. 170–174.

[Hi1] D. Hilbert, *Problèmes mathématiques*, L'Enseignement Mathematique **1** (1900), s. 349–355.

[Hi2] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1900, s. 253–297.

[Hi3] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, **1** (1901), s. 44–63, s. 213–237.

[Hi4] D. Hilbert, *Mathematical Problems*, Bulletin of the American Mathematical Society **8** (1902), s. 437–479.

[Jes] B. Jessen, *The Algebra of Polyhedra and the Dehn-Sydler Theorem*, Mathematica Scandinavica **22** (1968), s. 241–256.

[Kag] V. F. Kagan, *Über die Transformation der Polyeder*, Mathematische Annalen **57** (1903), s. 421–424.

[Roz] *Rozprawy i Sprawozdania z Posiedzeń Wydzialu Matematyczno-Przyrodniczego Akademii Umiejętności* **11** (1884), s. 87–92.

[Syd] J.-P. Sydler, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidean à trois dimensions*, Commentarii Mathematici Helvetici **40** (1965), s. 43–80.

## Adresa

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: halas@karlin.mff.cuni.cz