02. ročník matematické olympiády

6. Řešení úloh ze soutěže

In: Rudolf Zelinka (editor): 02. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1952-1953. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1954. pp. 24–84.

6. Řešení úloh ze soutěže.

A. ÚLOHY I. KOLA, KATEGORIE A.

1. Ak m, n sú celé kladné čísla, ukážte, že číslo $\sqrt{2}$ leží medzi číslami

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m+2n}{m+n}.$$

Riešenie. Pretože nemôže platiť $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$, platí buď

$$0 < \frac{m}{n} < \sqrt{2}, \text{ alebo } \sqrt{2} < \frac{m}{n}.$$

1. Nech $0 < \dfrac{m}{n} < \sqrt{2}$. Potom platí $\dfrac{m^2}{n^2} < 2$. Z tejto nerovnosti dostávame postupne

$$m^2 < 2n^2,$$

$$2m^2 + 4mn + 2n^2 < m^2 + 4mn + 4n^2,$$

$$2(m+n)^2 < (m+2n)^2,$$

$$2 < \frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2},$$

$$\sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n}.$$

2. Nech $\dfrac{m}{n} > \sqrt{2}$. Postupom ako v 1. dostaneme

$$\sqrt{2} > \frac{m+2n}{m+n}.$$

Stačí všade nahradiť znamienko „menšie" znamienkom „väčšie".

2. Obrazy komplexních čísel 0, Z_1, Z_2 tvoří v rovině komplexních čísel trojúhelník, který stručně označíme OZ_1Z_2. Určete komplexní čísla, jejichž obrazy jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníka sestrojeného nad stranou Z_1Z_2 a ležícího v polorovině Z_1Z_2O.

Řešení. I. Obraz libovolného komplexního čísla Z v rovině komplexních čísel označíme týmž písmenem Z; zvláště O je obraz čísla nula. Užijeme těchto pomocných vět: [1] Obrazem bodu X v posunutí roviny komplexních čísel, při kterém bod M přechází v bod N, je bod X'; o čísle X' platí $X' = X + (N - M)$. [2] Obrazem bodu X při otočení roviny komplexních čísel kolem bodu O o úhel velikosti α je bod X'. O komplexním čísle X' platí

$$X' = X(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha).$$

Jestliže $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, označíme $\cos\frac{1}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\pi = S$ (komplexní jednotka). Otočení o úhel $k\alpha$, kde k je přirozené číslo, odpovídá komplexní jednotka S^k. Tu platí $S^3 = -1$, $S^6 = 1$, $S^4 = -S$, $S^5 = -S^2$, $1 - S = -S^2$, $1 + S^2 = S$.

II. Označme X střed hledaného pravidelného šestiúhelníka. Velikost poloměru kružnice šestiúhelníku opsané je $|Z_1 - Z_2|$, takže bude platit $\overline{XZ_1} = \overline{XZ_2} = \overline{Z_2Z_1}$. Dále označme A ten vrchol hledaného šestiúhelníka, o kterém platí $XA \uparrow\uparrow Z_2Z_1$, $\overline{XA} = \overline{Z_2Z_1}$. Posuňme hledaný šestiúhelník do polohy $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ tak, aby bod X splynul s bodem O, takže platí $OA_1 \uparrow\uparrow XA$, $\overline{OA_1} = \overline{XA}$ neboli $OA_1 \uparrow\uparrow Z_2Z_1$, $\overline{OA_1} = \overline{Z_2Z_1}$. To znamená posunutí úsečky Z_2Z_1 do polohy OA_1 (i co do smyslu), takže podle [1] platí $A_1 = Z_1 - Z_2$. Další vrcholy pomocného šestiúhelníka $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ dostaneme jako obrazy komplexních čísel, které podle [2] obdržíme postupnými otočeními bodu A_1 o úhly $k\cdot(\frac{1}{3}\pi)$ pro $k = 1, 2, 3, 4, 5$ kolem bodu O. Je tedy:

$$A_1 = Z_1 - Z_2, \qquad B_1 = A_1S, \qquad C_1 = A_1S^2,$$
$$D_1 = A_1S^3 = -A_1, \quad E_1 = A_1S^4 = -A_1S, \quad F_1 = A_1S^5 = -A_1S^2.$$

Hledaný šestiúhelník dostaneme z pomocného šestiúhelníka $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ takovým posunutím, při kterém přejde i co do pořadí krajních bodů buď úsečka B_1C_1 v úsečku Z_1Z_2, nebo úsečka F_1E_1

v úsečku Z_1Z_2. Prvnímu posunutí podle [1] odpovídá přičtení komplexního čísla $V = Z_1 - B_1$, při čemž je bod V středem X hledaného šestiúhelníka. Druhému posunutí odpovídá podle [1] přičtení komplexního čísla $W = Z_1 - F_1$, při čemž je bod W středem X hledaného šestiúhelníka.

Body V, W jsou zřejmě souměrně sdružené k přímce Z_1Z_2, která je tedy osou úsečky VW. Podle známé poučky z planimetrie je bod O blíže k tomu z bodů V, W, se kterým leží v téže polorovině vyťaté přímkou Z_1Z_2. Protože s bodem X leží v téže polorovině vyťaté přímkou Z_1Z_2 i celý hledaný šestiúhelník, bude ten z bodů V, W bodem X, který má od bodu O menší vzdálenost, neboli ten bod, jemuž odpovídající komplexní číslo má menší absolutní hodnotu. Tedy:

a) je-li $|V| < |W|$, je $X \equiv V$; b) je-li $|V| > |W|$, je $X \equiv W$.

(Případ rovnosti vzhledem k tomu, že přímka Z_1Z_2 neprochází bodem O, nemůže nastat.)

Výpočtem zjistíme, že (viz [2])

$$V = Z_1 - B_1 = S(Z_2 - Z_1S), \quad |V| = |Z_2 - Z_1S|,$$
$$W = Z_1 - F_1 = S(Z_1 - Z_2S), \quad |W| = |Z_1 - Z_2S|.$$

Vrcholy hledaného šestiúhelníka $ABCDEF$ jsou po řadě dány těmito komplexními čísly:

$$A = X + A_1 = X + (Z_1 - Z_2), \quad D = X + D_1 = X + (Z_2 - Z_1),$$
$$B = X + B_1 = X + (Z_1 - Z_2)S, \quad E = X + E_1 = X + (Z_2 - Z_1)S,$$
$$C = X + C_1 = X + (Z_1 - Z_2)S^2, \quad F = X + F_1 = X + (Z_2 - Z_1)S^2,$$

kde X je jedno z čísel V, W.

V případě a) vskutku je $B = Z_1$, $C = Z_2$ a v případě b) je $F = Z_1$, $E = Z_2$, jak se snadným počtem přesvědčíme.

(Řešil s. Jan Hejcman, III. tř. G, Praha IX.)

3. Buďte A', B', C', D' paty kolmic spuštěných po řadě z vrcholů A, B, C, D čtyrstěnu $ABCD$ vždy na rovinu protější jeho stěny.

a) Jestliže bod A' leží na kolmici BH spuštěné v rovině BCD z bodu B k přímce CD (při čemž H je příslušná pata), potom je $AB \perp CD$. Dokažte.

b) Dokažte, že předchozí poučku lze obrátit.

c) Jestliže bod A' splývá s průsečíkem výšek trojúhelníka BCD, potom i body B', C', D' splynou po řadě s průsečíky výšek trojúhelníků CDA, DAB, ABC; dokažte. Co pak platí o přímkách AA', BB', CC', DD'?

Řešení. a) Nechť tedy bod A' leží na kolmici BH spuštěné v rovině BCD k přímce CD; budiž H průsečík kolmic BH, CD. Pak přímka CD je kolmá k oběma různoběžkám AA', BH, a tím i k rovině ABH (bod A jistě neleží na přímce BH); je tedy $CD \perp AB$, neboť AB je přímka roviny ABH.

b) Máme dokázat: Jestliže ve čtyrstěnu $ABCD$ je $AB \perp CD$, potom pata A' kolmice AA' spuštěné z bodu A na rovinu BCD padne na přímku BH této roviny, při čemž je $BH \perp CD$, a bod H je průsečíkem přímek BH, CD. Rozeznávejme dva případy:

1. Nechť $AA' \not\equiv AB$ a tedy $A' \not\equiv B$. Obě různoběžky AA', AB určují rovinu $\varrho \equiv ABA'$, která obsahuje dvě různoběžky AA', AB kolmé k přímce CD; je tedy $CD \perp \varrho$ a tím i $BA' \perp CD$ (BA' je průsečnice rovin BCD, ϱ). Ale bodem B prochází přímka $BH \perp CD$, takže je $BA' \equiv BH$, a bod A' je bodem přímky BH, což bylo dokázati.

2. Nechť $AA' \equiv AB$ a tedy $B \equiv A'$; potom naše tvrzení je samozřejmé.

c) Máme dokázat, že body B', C', D', jsou po řadě průsečíky výšek v trojúhelnících CDA, DAB, ABC za předpokladu, že bod A' je průsečík výšek trojúhelníka BCD; označme po řadě BH, CK, DL jeho výšky. Podle výsledku a) této úlohy je $AB \perp CD$, $BC \perp DA$, $BD \perp AC$, neboť bod A' leží na všech třech výškách BH, CK, DL trojúhelníka BCD; kterékoli dvě protilehlé hrany čtyrstěnu $ABCD$ stojí tedy navzájem kolmo. Dokážeme nyní, že na př. bod B', ležící v rovině ACD, je bodem výšky AQ trojúhelníka ACD, spuštěné z bodu A k přímce CD. Podle právě odvozeného výsledku je $BA \perp CD$ a podle výsledku b) této úlohy padne bod B' na výšku AQ. Podobně se dokáže, že bod B' leží na zbývajících dvou výškách trojúhelníka ACD. Stejně se dokáže podobné tvrzení o bodech C', D'.

Protože $CD \perp AB$, $CD \perp BH$, je přímka CD kolmá k rovině ABH a tím i k přímce AH. Proto je $AH \equiv AQ$. Odtud plyne, že přímky AA', BB' mají společný bod. To lze dokázat o kterýchkoli dvou z přímek AA', BB', CC', DD' a protože všechny tyto přímky jsou různé a všechny neleží v téže rovině, procházejí všechny týmž bodem (viz Matematika pro II. tř. gymnasií, str. 89, př. 3).

4. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Budiž $A_1B_1C_1$ trojúhelník stejnolehlý s trojúhelníkem ABC podle středu A (koeficient stejnolehlosti $\lambda > 1$) a dále $A_2B_2C_2$ trojúhelník souměrný s trojúhelníkem $A_1B_1C_1$ podle přímky BC. Určete a) konstruktivně, b) početně, který bod trojúhelníka ABC přejde po obou operacích na své místo?

Řešení. a) Konstruktivní. Budiž X hledaný bod, X_1 jeho obraz ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem λ, X_2 obraz bodu X_1 v souměrnosti podle přímky BC. Podle předpokladu je $X \equiv X_2$. Je zřejmé, že $X_1 \not\equiv X_2$; jinak by totiž splynuly také body X, X_1, a to je nemožné, neboť $\lambda > 1$. Přímka XX_1, totožná s přímkou X_2X_1, prochází jednak bodem A, jednak je kolmá k přímce BC. To jest, hledaný bod X leží na kolmici k spuštěné z bodu A na přímku BC. Z vlastnosti stejnolehlosti plyne, že $XB \parallel X_1B_1$; ježto je zřejmě $X \not\equiv A$, vznikne lichoběžník BXX_1B_1, jehož střední příčka prochází jednak průsečíkem P přímek k, BC, jednak středem Q úsečky BB_1. Odtud vyplývá konstruktivní řešení: Vedeme bodem B rovnoběžku m s přímkou PQ; zřejmě je $m \not\equiv AB$; určíme průsečík X přímek k, m; to je bod, který má skutečně žádanou vlastnost, jak vyplývá z obrácení vyloženého postupu. Úloha má tudíž jediné řešení.

b) Početní řešení. Použijeme označení z odst. a) a navážeme na poznatek, že hledaný bod X leží na přímce k. Zavedeme na této přímce souřadnice s počátkem A; bod P nechť má souřadnici $v > 0$; dále budiž $X \equiv (x)$, $X_1 \equiv (x_1)$, $X_2 \equiv (x_2)$. Pak platí $x_1 = \lambda x$, $\frac{x_1 + x_2}{2} = v$, čili $x = x_2 = 2v - x_1 = 2v - \lambda x$.

Odtud plyne $x(1 + \lambda) = 2v$, a ježto $1 + \lambda > 0$, je

$$x = \frac{2v}{1 + \lambda}.$$

Úloha má jediné řešení.

5. Komplexní číslo z a číslo $\bar{z}$ s ním komplexně sdružené vyhovují rovnici

$$az + b\bar{z} + c = 0,$$

kde a, b, c jsou daná komplexní čísla. Co vyplňují obrazy všech takových čísel z v rovině komplexních čísel?

Řešení. (Budeme se odvolávat na poučky 116, 118a, str. 45 z učebnice Matematika pro II. třídu gymnasií.)

Jestliže pro určité z platí

$$az + b\bar{z} + c = 0, \qquad (1)$$

pak podle výše citovaných pouček platí též (přejdeme-li k číslům sdruženým)

$$\bar{b}z + \bar{a}\bar{z} + \bar{c} = 0. \qquad (2)$$

Rovnice (1), (2) znásobíme postupně čísly $\bar{a}$, $(-b)$ a obě sečteme, takže dostaneme

$$(a\bar{a} - b\bar{b})z + c\bar{a} - \bar{c}b = 0,$$

čili

$$(|a|^2 - |b|^2)z = \bar{c}b - c\bar{a}. \qquad (3)$$

I. Nechť nejprve $|a|^2 - |b|^2 \neq 0$. Potom rovnice (3) má jediné řešení

$$z = \frac{\bar{c}b - c\bar{a}}{|a|^2 - |b|^2},$$

jehož obrazem je jediný bod.

II. Budiž nyní

$$|a|^2 - |b|^2 = 0. \qquad (4)$$

To nastane tehdy, když buď

a) $|a| + |b| = 0$, nebo b) $|a| - |b| = 0$.

a) V prvním případě musí pak být $a = b = 0$. Jestliže při tom $c \neq 0$, pak rovnici (1) nevyhovuje žádné komplexní číslo. Když $c = 0$, pak rovnice (1) je splněna pro každé komplexní číslo. Obrazy těchto čísel vyplňují celou rovinu.

b) Za druhé je $|a| = |b| \neq 0$. Kdyby totiž bylo $|a| = 0$, bylo by i $|b| = 0$, což je případ a). Budeme rozlišovat dvě možnosti:

α) $\bar{c}b - c\bar{a} \neq 0$. Pak rovnice (3) nemá řešení a tedy žádný bod roviny nevyhovuje úloze.

β) $\bar{c}b - c\bar{a} = 0$. Je-li $c \neq 0$, vyhovuje úloze zřejmě číslo $z_0 = -\frac{c}{2a}$, neboť $\bar{z}_0 = -\frac{\bar{c}}{2\bar{a}} = -\frac{c\bar{c}}{2c\bar{a}} = -\frac{c\bar{c}}{2\bar{c}b} = -\frac{c}{2b}$.

Nalezený výsledek však platí i pro $c = 0$, takže vždy

$$az_0 + b\bar{z}_0 + c = 0.$$

Vyhovuje-li úloze ještě číslo $z \neq z_0$, platí též

$$az + b\bar{z} + c = 0,$$

a odtud pak odečtením

$$a(z - z_0) + b(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0.$$

Poněvadž $a \neq 0$, $b \neq 0$, můžeme položit

$$z - z_0 = \frac{h}{a}, \quad \bar{z} - \bar{z}_0 = -\frac{h}{b},$$

kde h je komplexní číslo volené tak, aby $\frac{\bar{h}}{\bar{a}} = -\frac{h}{b}$, čili $b\bar{h} + \bar{a}h = 0$, a tedy také $\bar{b}h + a\bar{h} = 0$. Odtud sečtením

$$(\bar{a} + \bar{b})h + (a + b)\bar{h} = 0.$$

1. Je-li $a + b \neq 0$, vyhovíme tomu tak, že položíme

$$h = (a + b)q, \quad \bar{h} = -(\bar{a} + \bar{b})q,$$

při čemž $\bar{h} = (\bar{a} + \bar{b})\bar{q} = -(\bar{a} + \bar{b})\,\bar{q}$, čili $q = -\bar{q}$, takže q je ryze imaginární, t. j. $q = ri$, kde $r \neq 0$ je reálné číslo. Dané úloze tedy vyhovuje nejvýše číslo tvaru

$$z = -\frac{c}{2a} + \frac{(a + b)\,\mathrm{i}}{a} \cdot r,$$

kde r je reálné číslo. Dosazením se však přesvědčíme, že obráceně každé číslo tohoto tvaru úloze vyhovuje.

Obrazy všech těchto čísel dostaneme z čísla $z_0 = -\frac{c}{2a}$ posunutím o délku $\left|\frac{a + b}{a} \cdot r\right|$ ve směru udaném vektorem $\frac{(a + b)\,\mathrm{i}}{a}$ nebo ve směru opačném podle toho, je-li $r > 0$ nebo $r < 0$. Všecky tyto obrazy vyplní přímku.

2. Je-li $a + b = 0$, je $b = -a$, takže $-a\bar{h} + \bar{a}h = 0$; tomu vyhovíme, bude-li $h = sa$, $\bar{h} = \bar{s}\bar{a}$, neboť $a \neq 0$, při čemž musí být $\bar{s}\bar{a} = s\bar{a}$ čili $\bar{s} = s$, takže s je reálné. Dané úloze vyhovuje, jak se opět přesvědčíme dosazením, každé číslo tvaru

$$z = -\frac{c}{2a} + s,$$

kde s je reálné číslo. Obrazy všech těchto čísel vyplňují opět přímku (rovnoběžnou s reálnou osou).

6. Ak je u irracionálne, a, b c, d racionálne, je

$$\frac{au + b}{cu + d} \tag{1}$$

(kde $cu + d \neq 0$) racionálne vtedy a len vtedy, keď $ad - bc = 0$; dokážte.

Řešení. I. Nejprve dokážeme, že zlomek (1) je racionální číslo, jestliže je $ad - bc = 0$ neboli

$$ad = bc. \tag{2}$$

Čísla c, d nemohou být současně rovna nule, jinak by bylo $cu + d = 0$ a výraz (1) by nebyl definován.

Je-li $c = 0$, musí být vzhledem ke vztahu (2) také $a = 0$ a výraz (1) je roven racionálnímu číslu $\frac{b}{d}$.

Je-li $c \neq 0$, $d \neq 0$, pak ze vztahu (2) plyne, že $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Označme k hodnotu $\frac{a}{c}$, takže je $a = kc$, $b = kd$. Dosaďme tyto hodnoty do vztahu (1); obdržíme

$$\frac{au + b}{cu + d} = \frac{k(cu + d)}{cu + d} = k,$$

takže (1) je racionální číslo.

II. Obráceně nechť je (1) rovno racionálnímu číslu $\frac{m}{n}$, kde n je číslo přirozené a m číslo celé. Z rovnosti

$$\frac{au + b}{cu + d} = \frac{m}{n}$$

dostaneme po snadné úpravě

$$u(na - mc) = md - nb.$$

Protože $md - nb$ je racionální číslo, je tento vztah možný jen tehdy, je-li

$$na - mc = 0, \quad md - nb = 0.$$

Je-li $c \neq 0$, $d \neq 0$, pak z předchozích rovnic plyne

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{n}, \quad \frac{b}{d} = \frac{m}{n} \text{ neboli } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \text{ t. j. } ad - bc = 0.$$

Je-li $c = 0$, je i $a = 0$ (neboť $n \neq 0$) a proto platí $ad - bc = 0$.
Je-li $d = 0$, je i $b = 0$ (neboť $n \neq 0$) a proto platí $ad - bc = 0$.

Tím je poučka dokázána.

(Řešil s. Jiří Vodička, 4. tř. G, Česká Lípa.)

7. Budiž dán trojúhelník ABC; dále buďtež M, N, P body, které po řadě leží uvnitř stran BC, CA, AB, a to tak, že $MN \parallel AB$, $MP \parallel AC$. Zvolte bod M tak, aby o velikostech úseček MN, MP platil vztah

$$\overline{MN} + \overline{MP} = k,$$

kde $k > 0$ je dané číslo. Proveďte diskusi za předpokladu, že $\overline{AB} \leqq \overline{AC}$ a stanovte, kterou podmínku musí splňovat číslo k, aby úloha měla řešení.

Řešení. Označme $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$; je $b \geqq c$. Nechť M je vnitřní bod úsečky BC. Veďme $MN \parallel BA$, $MP \parallel CA$, kde bod N odděluje body C, A a bod P body B, A. Označme $\overline{BM} = x$, takže

$$0 < x < a. \tag{1}$$

Potom $\overline{MC} = a - x > 0$. Je $\triangle PBM \sim \triangle NMC \sim \triangle ABC$ a tedy

$$\frac{\overline{MP}}{b} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\overline{MN}}{c} = \frac{a - x}{a}.$$

Aby bod M vyhovoval podmínce úlohy, musí platit $\overline{MP} + \overline{MN} = k$, neboli

$$\frac{b}{a} x + c \frac{a - x}{a} = k;$$

po úpravě dostaneme podmínku

$$(b - c)x = a(k - c). \tag{2}$$

Rozlišujeme dva případy:

a) $b - c = 0$ neboli $b = c$. Pak rovnice (2) má vzhledem k tomu, že $a \neq 0$, řešení x jen pro $k - c = 0$ neboli $k = b = c$.

Jestliže je však $k = b = c$, potom každý vnitřní bod M úsečky BC vyhovuje úloze, jak se snadno dokáže.

b) $b - c \neq 0$, takže podle předpokladu je $b > c$ (tedy $b - c > 0$); potom řešení rovnice (2)

$$x = a \cdot \frac{k - c}{b - c} \tag{3}$$

musí vyhovovat nerovnostem (1). Z podmínky (1) $x > 0$ plyne vzhledem k tomu, že je $a > 0$, $b - c > 0$, že musí být $k - c > 0$ nebcli $k > c$. Z podmínky (1) $x < a$ plyne vzhledem ke (3), že $\frac{k - c}{b - c} < 1$, a protože je $b - c > 0$, dostaneme odtud $k < b$.

Aby tedy existoval hledaný bod M, musí být splněna podmínka

$$c < k < b. \tag{4}$$

Jestliže je podmínka (4) splněna, má úloha jediné řešení, které se najde takto:

Na polopřímce AB určíme bod R a na polopřímce AC bod Q tak, aby platilo $\overline{AR} = \overline{AQ} = k$ [bod R padne zřejmě na prodloužení úsečky AB za bod B, bod Q je vnitřním bodem úsečky AC, jak plyne ze vztahu (4)]. Užijeme-li na přímku RQ a trojúhelník ABC Paschovy věty, dostaneme, že přímka RQ protne přímku BC v bodě M, který odděluje body B, C. Dokážeme, že bod M vyhovuje úloze. Sestrojme body N, P jako na počátku úvahy, takže platí $\overline{MP} = \overline{AN}$. Z podobnosti trojúhelníků ARQ a NMQ, které se shodují ve všech úhlech, plyne vzhledem k tcmu, že $\overline{AR} = \overline{AQ}$, že také $\overline{MN} = \overline{NQ}$.

Je tedy

$$\overline{MN} + \overline{MP} = \overline{NQ} + \overline{AN} = \overline{AQ} = k.$$

Jednoznačnost řešení plyne z jednoznačnosti řešení x rovnice (2).

8. Nutná a postačující podmínka, aby bylo lze čtyrstěnu vepsati kulovou plochu, která by se dotýkala všech jeho hran, je, aby součty všech tří dvojic protějších hran byly si rovny. Dokažte.

Řešení. a) Předpokládejme, že čtyrstěnu $A_1A_2A_3A_4$ lze vepsat kulovou plochu, která se dotýká hrany A_iA_k v bodě $A_{ik} \equiv A_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4, i \neq k$). Tato kulová plocha protne na př. rovinu $A_1A_2A_3$ v kružnici vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Podle vlastnosti tečen vedených z bodu ke kružnici je $\overline{A_1A_{12}} = \overline{A_1A_{13}}$. Obdobně dostaneme v rovinách $A_1A_2A_4$ a $A_1A_3A_4$ vztahy $\overline{A_1A_{12}} = \overline{A_1A_{14}}$, $\overline{A_1A_{13}} = \overline{A_1A_{14}}$. Obecně: všecky tři úsečky A_iA_{ik} ($k \neq i$) jsou si rovny. Z toho plyne:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} = \overline{A_1A_{12}} + \overline{A_2A_{12}} + \overline{A_3A_{34}} + \overline{A_4A_{34}} =$$
$$= \overline{A_1A_{13}} + \overline{A_2A_{24}} + \overline{A_3A_{31}} + \overline{A_4A_{42}} = \overline{A_1A_{13}} + \overline{A_3A_{13}} +$$
$$+ \overline{A_2A_{24}} + \overline{A_4A_{24}} = \overline{A_1A_3} + \overline{A_2A_4}.$$

Tím je dokázána rovnost součtů dvou libovolných dvojic protějších hran.

b) Předpokládejme, že platí vyslovená podmínka o rovnosti součtů protějších hran. Vepišme kružnice trojúhelníkům $A_1A_2A_3$ a $A_1A_2A_4$ a označme jejich dotykové body A_{12}, A_{13}, A_{23} a A'_{12}, A_{14}, A_{24}. Z našeho předpokladu vyplývá vztah:

$$\begin{aligned}&\overline{A_1A_{13}} + \overline{A_3A_{13}} + \overline{A_2A_{24}} + \overline{A_4A_{24}} = \\ &= \overline{A_2A_{23}} + \overline{A_3A_{23}} + \overline{A_1A_{14}} + \overline{A_4A_{14}}.\end{aligned} \tag{1}$$

Podle vlastnosti tečen je však $\overline{A_3A_{13}} = \overline{A_3A_{23}}$, $\overline{A_4A_{24}} = \overline{A_4A_{14}}$, $\overline{A_1A_{13}} = \overline{A_1A_{12}}$, $\overline{A_2A_{23}} = \overline{A_2A_{12}}$, $\overline{A_1A_{14}} = \overline{A_1A'_{12}}$, $\overline{A_2A_{24}} = \overline{A_2A'_{12}}$.
Rovnice (1) se zjednoduší na tvar:

$$\overline{A_1A_{12}} + \overline{A_2A'_{12}} = \overline{A_2A_{12}} + \overline{A_1A'_{12}}. \tag{2}$$

Mimo tuto rovnici platí též triviální vztah

$$\overline{A_1A_{12}} + \overline{A_2A_{12}} = \overline{A_1A'_{12}} + \overline{A_1A'_{12}}. \tag{3}$$

Odečtením rovnice (3) od (2) dostaneme

$$\overline{A_2A_{12}} = \overline{A_2A'_{12}}.$$

Vzhledem k tomu, že oba body A_{12}, A'_{12} leží na polopřímce A_2A_1, je $A'_{12} \equiv A_{12}$. Obdobný výsledek platí pro kružnice vepsané kterýmkoli dvěma stěnám čtyrstěnu.

Sestrojme nyní kulovou plochu k, která obsahuje kružnici k_4 vepsanou trojúhelníku $A_1A_2A_3$ a mimo to bod A_{14}. Tato kulová plocha je jednoznačně určena a protne rovinu $A_1A_2A_4$ v kružnici k_3, která se dotýká přímky A_1A_2 v bodě A_{12} a obsahuje bod A_{14}. Tato kružnice k_3 a kružnice k'_3, vepsaná trojúhelníku $A_1A_2A_4$, mají tedy společný bod A_{14} a obě se dotýkají přímky A_1A_2 v bodě A_{12}; proto je $k_3 \equiv k'_3$. Tím je dokázáno, že se kulová plocha k dotýká také hran A_1A_4, A_2A_4. Záměnou indexů vyplývá, že se dotýká i hrany A_3A_4.

9. Nádržka má tvar rotačního kužele spočívajícího podstavou na vodorovné rovině; její objem je V_0 litrů a výška u dm. Při plnění nádržky nateče za vteřinu a litrů vody. Vyjádřete vzdálenost vodní hladiny od vrcholu kužele po n vteřinách (n racionální číslo kladné).

Řešení. a) Budiž n přirozené číslo. Označíme u_n hledanou vzdálenost, p obsah podstavy daného kužele (v dm²), p_n obsah podstavy menšího kužele, který vznikne z daného, vedeme-li rovinu rovnoběžnou s podstavou ve vzdálenosti u_n od vrcholu daného kužele. Pak je

$$\frac{p_n}{p} = \frac{u_n^2}{u^2},$$

$$\frac{1}{3}pu - \frac{1}{3}p_nu_n = an,$$

to jest

$$p_n = p\frac{u_n^2}{u^2},$$

čili

$$\frac{1}{3}pu - \frac{1}{3}p\frac{u_n^3}{u^2} = an.$$

Odtud postupně plyne

$$pu^3 - pu_n^3 = 3anu^2,$$

$$u_n^3 = u^3\left(1 - \frac{3an}{pu}\right),$$

$$u_n = u\sqrt[3]{1 - \frac{an}{V_0}}. \qquad (1)$$

Vzorec (1) má význam jen pro $n \leq \frac{V_0}{a}$.

b) Je-li $n = \frac{p}{q}$ racionální (p, q jsou přirozená čísla), zvolíme za časovou jednotku q-tý díl vteřiny, za který nateče $b = \frac{a}{q}$ litrů vody. Podle vztahu (1) je

$$u_n = u\sqrt[3]{1 - \frac{bp}{V_0}} = u\sqrt[3]{1 - \frac{an}{V_0}}. \tag{2}$$

Omezení $n \leq \frac{V_0}{a}$ zůstává i v tomto případě v platnosti.

10. Jsou dána dvě komplexní čísla A, B, při čemž $|A| = 1$. Jestliže pro komplexní čísla Z, Z' platí vztah

$$Z' = AZ + B, \tag{1}$$

potom obraz čísla Z' vznikne z obrazu čísla Z otáčením, je-li $A \neq 1$, a posunutím, je-li $A = 1$, $B \neq 0$; dokažte. Určete střed otáčení, resp. velikost posunutí.

Řešení. Jsou dvě možnosti: buď je $A \neq 1$ nebo $A = 1$.

a) Je-li $A \neq 1$, dokážeme, že existuje takové otáčení kolem jakéhosi středu Z_0, které převádí bod Z v bod Z'. Pro toto otáčení platí $Z' - Z_0 = K(Z - Z_0)$, kde K je komplexní číslo, pro něž $|K| = 1$, $K \neq 1$. Úpravou předchozí rovnice dostaneme

$$Z' = KZ + Z_0(1 - K). \tag{2}$$

Srovnáním rovnic (1), (2) vzhledem k předpokladu $A \neq 1$, $|A| = 1$ zjistíme, že stačí položit

$$A = K, \quad B = Z_0(1 - K);$$

odtud lze vypočíst

$$Z_0 = \frac{B}{1 - K} = \frac{B}{1 - A}. \tag{3}$$

Rovnice (1) pak značí otáčení kolem bodu Z_0, daného vztahem (3).

b) Je-li $A = 1$, dokážeme, že existuje takové posunutí, které převádí bod Z v bod Z'. Pro toto posunutí platí $Z' = Z + U$, kde U je komplexní číslo různé od nuly. Jestliže je $B \neq 0$, lze položit $U = B$, kde $U \neq 0$ a rovnice (1) značí posunutí, jehož velikost je $|B|$.

Jiné řešení úlohy. Daný vztah (1) představuje shodnost, neboť jsou-li X, Y dva body a X', Y' jejich obrazy, platí

$$X' = AX + B, \qquad Y' = AY + B;$$

odtud

$$X' - Y' = A(X - Y)$$

a také

$$|X' - Y'| = |X - Y|,$$

neboť $|A| = 1$. Uvedené zobrazení tedy zachovává vzdálenosti a je to tedy shodnost.

Hledejme samodružné body této shodnoti. Pro ně platí $X' = X$, čili

$$X = AX + B,$$

$$X(1 - A) = B. \tag{4}$$

a) Je-li $A \neq 1$, plyne odtud $X = \dfrac{B}{1 - A}$; dané zobrazení má jediný samodružný bod a je to tedy otáčení.

b) Je-li $A = 1$, $B = 0$, pak rovnice (4) nemá řešení. Poněvadž pro každý bod X a jeho obraz X' platí $X' = X + B$, čili $X' - X = B$, všecky vektory XX' jsou souhlasně rovnoběžné a téže velikosti. Dané zobrazení je tedy posunutí.

c) Je-li $A = 1$, $B = 0$, pak rovnice (4) má nekonečně mnoho řešení a dané zobrazení je totožnost.

11. Budiž dán trojúhelník ABC. Nechť jsou A', B', C' takové body roviny, že platí

$$\overline{AB'} = \overline{AC'} \qquad \overline{BC'} = \overline{BA'}, \qquad \overline{CA'} = \overline{CB'}.$$

Označme a', b', c' přímky roviny, které po řadě procházejí body A', B', C', při čemž platí

$$a' \perp BC, \qquad b' \perp CA, \qquad c' \perp AB.$$

Dokažte, že přímky a', b', c' procházejí jedním bodem!

Řešení. I. *Pomocná poučka.* [1] Buďte XYZ, XYZ' dvě trojice bodů v prostoru, při čemž je $X \not\equiv Y$ a dále

$$\overline{XZ} = \overline{XZ'}, \quad \overline{YZ} = \overline{YZ'}. \tag{1}$$

Potom body Z, Z' leží v rovině $\xi \perp XY$. Obráceně platí:

[2] Jestliže body Z, Z' leží v rovině $\xi \perp XY$, při čemž platí

$$\overline{XZ} = \overline{XZ'}, \tag{2}$$

potom platí

$$\overline{YZ} = \overline{YZ'}. \tag{3}$$

Důkaz. [1] Jestliže Z je bodem přímky XY, je zřejmě $Z' \equiv Z$ a poučka platí i v případě, že je buď $X \equiv Z$ nebo $Y \equiv Z$.

Nechť body X, Y, Z neleží v jedné přímce. Pak podle (1) je $\triangle XYZ \cong \triangle XYZ'$(sss) a pata P kolmice $ZP \perp XY$ je i patou kolmice $Z'P \perp XY$. Rovina $\xi \perp XY$ jdoucí bodem P podle známé stereometrické poučky obsahuje všechny kolmice vztyčené v bodě P k přímce XY, tedy i přímky PZ, PZ' a tím i body Z, Z', což jsme měli dokázat.

[2] Označme P průsečík přímky XY s rovinou ξ. Je-li $Z \equiv P$, je i $Z' \equiv P$ a poučka platí.

Budiž nadále $Z \not\equiv P$ a tedy i $Z' \not\equiv P$. Pak je poučka vzhledem k (2) zřejmě správná v případě, že rovina ξ jde bodem X (podle poučky sus) nebo Y (podle poučky Ssu). Jestliže rovina ξ neprochází žádným z bodů X, Y, je vzhledem k (2) $\triangle XPZ \cong \triangle XPZ'$(Ssu), neboť $\measuredangle XPZ = \measuredangle XPZ' = \frac{1}{2}\pi$, takže $\overline{PZ} = \overline{PZ'}$. Odtud plyne, že $\triangle YPZ \cong \triangle YPZ'$(sus), neboť $\measuredangle YPZ = \measuredangle YPZ' = \frac{1}{2}\pi$ a tedy $\overline{YZ} = \overline{YZ'}$, což jsme měli dokázat.

II. *Vlastní řešení* úlohy spočívá v tom, že buď z trojúhelníků ABC, ABC', BCA', CAB' jako stěn vytvoříme čtyrstěn $ABCV$ (pokud není ve speciálních případech tvrzení úlohy samozřejmé), nebo že trojice bodů ABC', BCA', CAB', považujeme za pravoúhlé průměty určitých trojúhelníků ABC'', BCA'', CAB'' (do roviny ABC), takže lze z trojúhelníků ABC, ABC'', BCA'', CAB'' zase vytvořit čtyrstěn.

Určeme v rovině ϱ trojúhelníka ABC průsečík O přímek a', b', o nichž se snadno dokáže, že jsou různoběžné. Rozeznávejme *dva případy*:

Případ [1]. Je-li $\overline{CO} \leq \overline{CA}$, určíme na kolmici k vztyčené v bodě O k rovině ϱ bod V tak, aby platilo

$$\overline{CV} = \overline{CA'} = \overline{CB'} \tag{1}$$

(v případě, že $\overline{CO} = \overline{CA}$, je $V \equiv O$); v tom je zahrnut případ $C \equiv O$ a případ $C \equiv A' \equiv B'$. Vzhledem k (1) podle pomocné poučky [2] je

$$\overline{BV} = \overline{BA'}, \tag{2}$$

neboť body V, A' leží v rovině $\alpha \perp BC$; z téhož důvodu je

$$\overline{AV} = \overline{AB'}, \tag{3}$$

neboť body V, B' leží v rovině $\beta \perp AC$. Podle předpokladu úlohy vzhledem ke vztahům (2), (3) platí $\overline{BV} = \overline{BC'}$, $\overline{AV} = \overline{AC'}$ a vzhledem k pomocné poučce [1] leží body V, C' v rovině $\gamma \perp AB$, ve které leží i bod O. Průsečnicí rovin ϱ, γ je přímka jdoucí body C', O a kolmá k přímce AB, t. j. přímka c', což jsme měli dokázat.

Případ [2]. Je-li $\overline{CO} > \overline{CA}$ (pak je $\overline{CO} > 0$ a proto $A' \not\equiv C \not\equiv B'$), vztyčíme v bodech A', B', C' kolmice k rovině ϱ a po řadě na nich určíme body A'', B'', C'' tak, aby platilo $\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \overline{C'C''} = \overline{CO}$. Ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků $CA'A''$, $CB'B''$ a dvou dalších takových dvojic plyne

$$\overline{CA''} = \overline{CB''} > \overline{OC}, \quad \overline{AB''} = \overline{AC''} > \overline{OC}, \quad \overline{BA''} = \overline{BC''} > \overline{OC}.$$

Tím je případ [2] převeden na případ [1] a lze tedy jako v případě [1] určit bod V užitím úsečky $\overline{CA''} > \overline{OC}$. Rovina $\alpha \perp BC$, jdoucí bodem A'', jde i body A', V a tím i bodem O; totéž platí o rovinách $\beta \perp CA$, $\gamma \perp AB$ jdoucích po řadě trojicemi bodů B'', V, B' a C'', V, C'.

Iné riešenie. Sostrojme kružnicu k_1 so stredom A a polomerom $\overline{AB'} = \overline{AC'}$, kružnicu k_2 so stredom B a polomerom $\overline{BC'} = \overline{BA'}$ a kružnicu k_3 so stredom C a polomerom $\overline{CA'} = \overline{CB'}$. Priamka a' je chordálou kružníc k_2, k_3, pretože prechádza ich spoločným bodom A' a je kolmá na spojnicu ich stredov BC. Podobne, priamka b' je chordálou kružníc k_1 *a* k_3 a priamka c' je chordálou kružníc k_1, k_2. Tvrdenie úlohy je dôsledkom vety, že chordály troch kružníc sa pretínajú v jednom bode.

(Riešil s. Pavol Brunovský, 4. d, II.G, Bratislava.)

12. Označme P počátek soustavy pravoúhlých souřadnic. Body $[m; n]$, kde m, n jsou celá čísla, nazveme mřížové body. Budiž $p > 2$ dané přirozené číslo. Označme A_k ty mřížové body $[p; k]$, pro něž je $0 \leqq k \leqq p$ a uvažujme trojúhelníky

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3,\ PA_3A_4, \ldots,\ PA_{p-2}A_{p-1}.$$

Dokažte, že p je prvočíslo tehdy a jen tehdy, když počet mřížových bodů uvnitř každého z uvažovaných trojúhelníků je $\frac{1}{2}(p-1)$.

Řešení. I. Zaveďme označení bodů $A \equiv [p, 0]$, $A_k \equiv [p, k]$, $B_k \equiv$ $\equiv [0, k]$ pro $k = 1, 2, \ldots, p - 1$. Budiž $p > 2$ dané prvočíslo. Uvnitř úsečky PA_k neleží žádný mřížový bod. Kdyby tam totiž ležel mřížový bod $M \equiv [x, y]$, pak by platilo $1 \leqq x < p$, $\dfrac{k}{p} = \dfrac{y}{x}$ (směrnice přímky PA_k), což není možné, neboť zlomek $\dfrac{k}{p}$ je vzhledem k předpokladu úlohy v základním tvaru.

Určeme počet mřížových bodů uvnitř obdélníka PAA_kB_k; je zřejmě roven $(p-1)(k-1)$. Protože uvnitř úsečky PA_k není žádný mřížový bod, je počet mřížových bodů uvnitř trojúhelníka PAA_k roven

$$\tfrac{1}{2}(p-1)(k-1), \tag{1}$$

jak vyplývá z toho, že $\triangle PAA_k$ a $\triangle A_kB_kP$ i síť mřížových bodů jsou souměrné podle středu úsečky PA_k.

Uvažujme nyní $\triangle PA_jA_{j+1}$ (pro $j = 1, 2, \ldots, p-2$); uvnitř tohoto trojúhelníka je $\frac{1}{2}(p-1)(j+1-1) - \frac{1}{2}(p-1)(j-1) =$ $= \frac{1}{2}(p-1)$ mřížových bodů, jak plyne ze vztahu (1) a z toho, že vnitřek trojúhelníka PA_jA_{j+1} dostaneme, jestliže od vnitřku trojúhelníka PAA_{j+1} ubereme vnitřek trojúhelníka PAA_j a vnitřek úsečky PA_j. (Uvnitř $\triangle PAA_1$ a $\triangle PA_{p-1}A_p$ není zřejmě žádný mřížový bod.) Tím je první část úlohy dokázána.

II. *Obráceně*, budiž $p > 2$ liché číslo a budiž uvnitř každého z trojúhelníků $PA_1A_2, PA_2A_3, \ldots, PA_{p-2}A_{p-1}$ právě $\frac{1}{2}(p-1)$ mřížových bodů, což je celkem $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ bodů. Protože každé dvě po sobě následující přirozená čísla $p-1$, p jsou nesoudělná, je zlomek $\dfrac{p-1}{p}$ v základním tvaru a proto uvnitř úsečky PA_{p-1} neleží žádný mřížový bod. Uvnitř trojúhelníka PAA_{p-1} je proto podle téhož úsudku jako v první části právě $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ mřížových bodů, z nichž žádný neleží ani uvnitř úsečky PA_1, neboť zlomek $\frac{1}{p}$ je v základním tvaru. (Přitom uvnitř trojúhelníka PAA_1 rovněž není žádný mřížový bod.) Je tedy počet mřížových bodů uvnitř trojúhelníka PAA_{p-1} roven celkovému počtu mřížových bodů uvnitř trojúhelníků PA_1A_2, $PA_2A_3, \ldots, PA_{p-2}A_{p-1}$, a proto uvnitř úseček PA_1, PA_2, $PA_3, \ldots, PA_{p-2}$ neleží žádný mřížový bod. Odtud plyne, že p je prvočíslo, neboť kdyby existovala přirozená čísla a, b, kde $1 < a \leqq \leqq b < p$, taková, že $p = ab$, ležel by uvnitř úsečky PA_a, při čemž $A_a \equiv [p, a]$, mřížový bod $Q \equiv [b, 1]$. Tím je důkaz proveden.

13. Buďte $[x; y]$ body v rovině pravoúhlých souřadnic. Určete, pro které z nich platí nerovnost

$$\big||x+a| - |y-a|\big| < a,$$

kde a je dané číslo. Vyčárkujte v rovině souřadnic ty její části, pro jejichž body je splněna daná nerovnost.

Řešení. Je-li $a \leqq 0$, není pro žádný bod roviny daná nerovnost splněna. Budiž tedy dále $a > 0$. Proveďme transformaci souřadnic $x + a = x'$, $y - a = y'$. To je posunutí, jímž přejde počátek $P \equiv [0,0]$ do bodu $P' \equiv [-a, a]$. Daný vztah v tomto případě zní

$$\big||x'| - |y'|\big| < a.$$

Poněvadž $|-x'| = |x'|$, $|-y'| = |y'|$, je hledaná množina bodů souměrná podle os x', y' a stačí tedy vyšetřovat pouze případ $x' \geqq 0$, $y' \geqq 0$, kdy $\big||x'| - |y'|\big| = |x' - y'|$.

1. Je-li $x' \geqq y'$, je $|x' - y'| = x' - y'$ a jde o body, jejichž souřadnice splňují vztah $x' - y' < a$ čili $y' - x' > -a$ (a vedle toho $y' - x' \leqq 0$).

2. Je-li $x' < y'$, je $|x' - y'| = y' - x'$ a jde o body, pro něž platí $y' - x' < a$ (a vedle toho $y' - x' > 0$).

Spojením obou výsledků dostáváme

$$-a < y' - x' < a$$

čili $$x' - a < y' < x' + a.$$

Tyto body leží v I. kvadrantu (neboť $x' \geqq 0$, $y' \geqq 0$) uvnitř pásu vyťatého rovnoběžkami o rovnicích

$$y' = x' - a, \qquad y' = x' + a.$$

Ostatní dostáváme souměrností podle os x', y' (obrázek si lask. čtenář snadno načrtne).

14. Dokažte s použitím komplexních čísel, že složením dvou otáčení s různými středy vznikne otáčení nebo posunutí. Určete střed výsledného otáčení nebo posunutí. Určete střed výsledného otáčení, resp. velikost výsledného posunutí. Zjistěte podmínky, kdy vznikne otáčení a kdy posunutí.

Řešení. První otáčení budiž $z' = a_1 z + b_1$, kde $a_1 \neq 1$, $|a_1| = 1$; druhé otáčení budiž $z'' = a_2 z + b_2$, kde $a_2 \neq 1$, $|a_2| = 1$. Složení obou otáčení dostaneme dosazením; vyjde $z'' = a_2(a_1 z + b_1) + b_2$ neboli

$$z'' = a_1 a_2 z + (a_2 b_1 + b_2). \tag{1}$$

Je vždy $|a_1 a_2| = |a_1| \cdot |a_2| = 1$. Rozeznávejme dva případy:

Případ [1]. Budiž

$$a_1 a_2 = 1. \tag{2}$$

Pak je $a_2 b_1 + b_2 \neq 0$, jak ihned dokážeme. Středem prvního otáčení je bod $\left[\dfrac{b_1}{1 - a_1}\right]$, středem druhého bod $\left[\dfrac{b_2}{1 - a_2}\right]$. Podle znění úlohy je $\dfrac{b_1}{1 - a_1} \neq \dfrac{b_2}{1 - a_2}$ Protože je $1 - a_2 \neq 0$, platí vzhledem ke (2)

$$b_2 \neq \frac{b_1(1 - a_2)}{1 - a_1} = \frac{a_2 b_1(1 - a_2)}{a_2 - 1} = -a_2 b_1,$$

takže $a_2 b_1 + b_2 \neq 0$. Rovnice (1) tedy vyjadřuje posunutí o nenulový vektor o počátečním bodu $[0]$ a koncovém bodu $[a_2 b_1 + b_2]$ (viz učebnici Matematika pro II. třídu gymnasií, str. 50 a násl.).

Případ [2]. Budiž $a_1 a_2 \neq 1$. Pak rovnice (1) značí otáčení, jehož středem je bod

$$\left[\frac{a_2 b_1 + b_2}{1 - a_1 a_2}\right].$$

15. Jestliže $a > 0$ a n je přirozené číslo, potom platí

$$n(a^{2n+1} + 1) \geqq a + a^2 + \ldots + a^{2n}; \tag{1}$$

dokažte! Proveďte diskusi, pro která a nastane rovnost.

Řešení. Důkaz provedeme užitím matematické indukce.

I. Pro $n = 1$ dokážeme platnost vztahu

$$a^3 + 1 \geqq a + a^2. \tag{2}$$

Jestliže tento vztah je správný, jsou pro $a + 1 > 0$ správné vztahy

$$(a + 1)(a^2 - a + 1) \geqq a(a + 1),$$
$$a^2 - a + 1 \geqq a,$$
$$a^2 - 2a + 1 \geqq 0,$$
$$(a - 1)^2 \geqq 0. \tag{3}$$

Nerovnost v posledním vztahu platí zřejmě pro každé reálné, kladné a různé od čísla 1. Pro $a = 1$ nastává rovnost. Zpětným postupem odvodíme ze vztahu (3) vztah (2), a to pro $a \neq 1$ nerovnost, pro $a = 1$ rovnost.

II. Nechť platí vztah (1) pro určité přirozené n; dokážeme, že potom platí i pro číslo $n + 1$, t. j. že platí

$$(n + 1)(a^{2n+3} + 1) \geqq a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{2n} + a^{2n+1} + a^{2n+2}. \tag{4}$$

Uvažujme nejprve výraz

$$R = (n + 1)(a^{2n+3} + 1) - n(a^{2n+1} + 1) - a^{2n+1} - a^{2n+2} \tag{5}$$

a dokažme o něm, že pro $a > 0$ je $R \geqq 0$. Po vynásobení a snadné úpravě dostaneme, že

$$R = na^{2n+1}(a^2 - 1) + a^{2n+1}(a^2 - 1) + 1 - a^{2n+2}.$$

Zřejmě je správná identita

$$a^{2n+2} - 1 = (a^2 - 1)(a^{2n} + a^{2n-2} + a^{2n-4} + \ldots + a^2 + 1),$$

pomocí níž lze výraz R uvést na tvar

$$R = (a^2 - 1)[(n + 1)a^{2n+1} - (a^{2n} + a^{2n-2} + a^{2n-4} + \ldots + a^2 + 1)]. \tag{6}$$

Proveďme nyní diskusi tohoto výrazu pro $a > 0$:

a) Je-li $a > 1$, potom zřejmě platí $a^2 > 1$ neboli $a^2 - 1 > 0$

a dále $a^{2n+1} > a^{2n} > a^{2n-2} > a^{2n-4} > \ldots > a^2 > 1$. Proto jsou oba činitelé na pravé straně vztahu (6) kladná čísla a tedy $R > 0$.

b) Je-li $0 < a < 1$, je $a^2 < 1$, $a^2 - 1 < 0$ a dále

$$a^{2n+1} < a^{2n} < a^{2n-2} < a^{2n-4} < \ldots < a^2 < 1,$$

takže

$$(n + 1)\, a^{2n+1} < a^{2n} + a^{2n-2} + a^{2n-4} + \ldots + a^2 + 1.$$

Jsou tedy oba činitelé na pravé straně výrazu (6) záporná čísla a tudíž je $R > 0$.

c) Je-li $a = 1$, je $R = 0$.

Vzhledem k platnosti vztahu (1), kde rovnost nastává právě pro $a = 1$, platí též vztah

$$n(a^{2n+1} + 1) + a^{2n+1} + a^{2n+2} \geqq a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{2n} + a^{2n+1} + a^{2n+2}. \tag{7}$$

Přičteme-li výraz R ve tvaru (6) ke vztahu (7), obdržíme vztah (4), při čemž nerovnost platí pro každé $a > 0$, které je různé od čísla 1; rovnost nastává právě pro $a = 1$.

III. Protože pro $n = 1$ podle odst. I. vztah (1) platí, pak vzhledem k odst. II. platí i pro každé přirozené n, což jsme měli dokázat.

(Řešil s. Bruno Adam, 4. tř. Nerudova G, Praha III.)

16. Je-li n celé nezáporné číslo, potom číslo

$$2^{12n+8} - 3^{6n+2}$$

je dělitelné třinácti. Dokažte!

Řešení. Důkaz provedeme užitím matematické indukce. Zaveďme označení

$$V_k = 2^{12k+8} - 3^{6k+2},$$

kde k je nezáporné celé číslo.

I. Dokážeme, že V_0 je dělitelné třinácti; platí

$$V_0 = 2^8 - 3^2 = 256 - 9 = 247 = 13 \cdot 19,$$

čímž je důkaz proveden.

II. Určeme nejprve rozdíl $V_{k+1} - V_k$; postupně obdržíme tyto výrazy:

$$V_{k+1} - V_k = 2^{12(k+1)+8} - 3^{6(k+1)+2} - (2^{12k+8} - 3^{6k+2}),$$
$$V_{k+1} - V_k = 2^{12k+20} - 2^{12k+8} - 3^{6k+8} + 3^{6k+2},$$
$$V_{k+1} - V_k = 2^{12k+8}(2^{12} - 1) - 3^{6k+2}(3^6 - 1).$$

Ale $2^{12} - 1 = 4095 - 1 = 13 \cdot 315$ a $3^6 - 1 = 728 = 13 \cdot 56$; proto platí

$$V_{k+1} - V_k = 13 \cdot 315 \cdot 2^{12k+8} - 13 \cdot 56 \cdot 3^{6k+2}$$

a tedy

$$V_{k+1} - V_k = 13(315 \cdot 2^{12k+8} - 56 \cdot 3^{6k+2}).$$

Protože výraz v závorce na pravé straně poslední rovnosti je číslo celé, je číslo $V_{k+1} - V_k$ dělitelné třinácti. Předpokládejme, že V_k je dělitelné třinácti, pak je dělitelné třinácti i číslo V_{k+1}, neboť ze vztahu

$$V_{k+1} = V_k + (V_{k+1} - V_k)$$

vyplývá, že je rovno součtu dvou čísel, která jsou dělitelná třinácti.

III. Tím jsme provedli oba kroky důkazu matematickou indukcí a správnost závěru úlohy je dokázána.

(Řešil s. Jan Hejcman, 3. tř. G, Praha IX.)

Jiné řešení. K důkazu použijeme dvou pomocných pouček: *Poučka* [1]. Buďte dána celá čísla $a, b, c, d, p \neq 0$ a předpokládejme, že čísla $a - c$, $b - d$ jsou dělitelná číslem p. Potom je číslem p dělitelný i dvojčlen $ab - cd$.

Důkaz. Platí $ab - cd = b(a - c) + c(b - d)$, takže uvažovaný dvojčlen je součtem dvou čísel, z nichž každé je dělitelné číslem p; tím je poučka dokázána.

Poučka [2]. Pro přirozené n platí známá identita

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots +$$
$$+ a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}). \qquad (1)$$

I. Vzhledem k poučce [1] pro přirozené n položme $a = 2^{12n}$, $b = 2^8$, $c = 3^{6n}$, $d = 3^2$, takže je $a - c = 2^{12n} - 3^{6n}$, $b - d = 2^8 - 3^2$, $ab - cd = 2^{12n+8} - 3^{6n+2}$, což je právě číslo naší úlohy. Nyní musíme vzhledem k poučce [1] dokázat, že čísla $a - c = 2^{12n} - 3^{6n}$, $b - d = 2^8 - 3^2$ jsou dělitelná třinácti.

a) Platí $2^8 - 3^2 = (2^4 - 3)(2^4 + 3) = 13 \cdot 19$, takže číslo $b - d$ je dělitelné třinácti.

b) Podle poučky [2] (vzorec (1))

$$2^{12n} - 3^{6n} = (2^{12})^n - 3^6)^n = (2^{12} - 3^6) \cdot Q,$$

kde Q je podle vztahu (1) číslo celé. Stačí tedy dokázat, že $2^{12} - 3^6$ je dělitelné třinácti; skutečně platí

$$2^{12} - 3^6 = (2^6 - 3^3)(2^6 + 3^3) = 37 \cdot 91 = 37 \cdot 7 \cdot 13,$$

takže číslo $a - c$ je dělitelné třinácti.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno pro každé přirozené n.

II. Pro $n = 0$ tvrzení úlohy platí, jak plyne z odst. Ia).

Tím je tvrzení úlohy dokázáno pro každé celé nezáporné n.

(Řešil s. Jaroslav Šedivý, 4b tř. G Sokolovo, Praha 8.)

B. ÚLOHY I. KOLA, KATEGORIE B.

1. V dílně pracuje a dělníků, kteří mají dokončit určitou zakázku za a dní, m dělníků utvoří úderku a zaváží se, že lepší organisací práce zvýší svůj výkon o 10%. Stalo se tak po p dnech práce na zakázce. O kolik dní se zmenší původně plánovaná doba d dní, potřebná k provedení zakázky?

Řešení. Označme V velikost zakázky, tedy celkovou práci, kterou je třeba vykonat (na př. počet předmětů, které je třeba vyrobit). Předpokládáme-li, že všichni dělníci mají stejný výkon, pak jeden dělník vykoná za den $\frac{V}{ad}$ práce. Po výkonu zvýšeném o 10% musí úderník vykonat za den $\left(\frac{V}{ad} + \frac{10V}{100\,ad}\right)$ práce. Za p dní vykonají při původním výkonu všichni dělníci společně část zakázky o velikosti $\frac{V}{ad}\,ap$. Po těchto p dnech bude zakázka při zvýšeném výkonu m dělníků skončena za x dní; při tom těchto m dělníků provede

$\left(\frac{V}{ad} + \frac{10V}{100ad}\right) . mx$ zakázky a ostatních $a - m$ dělníků zpracuje $\frac{V}{ad}(a - m)x$ zakázky. Pro neznámé číslo x dostáváme rovnici

$$\frac{V}{ad}ap + \left(\frac{V}{ad} + \frac{10V}{100ad}\right)mx + \frac{V}{ad}(a - m)x = V.$$

Znásobíme-li obě strany této rovnice číslem $\frac{100ad}{V}$, dostaneme rovnici

$$100ap + (100 + 10)mx + 100(a - m)x = 100ad,$$

z níž plyne

$$x = \frac{100a\,(d - p)}{10m + 100a} \quad \text{neboli} \quad x = \frac{10a\,(d - p)}{m + 10a}.$$

Původně plánovaná doba d se tedy zmenší o $d - (p + x)$ dní, t. j. o

$$d - p - x = \frac{m(d - p)}{m + 10a} \text{ dní;}$$

to lze uvést na tvar

$$d - (p + x) = \frac{d - p}{1 + 10 \cdot \dfrac{a}{m}}.$$

Zlomek na pravé straně je kladné číslo, neboť $d > p$, a je funkcí proměnných p, m. Roste-li p tak, že stále platí $d > p$, zmenšuje se hodnota čísla $d - (p + x)$. Roste-li m (kde $m \leqq a$), roste i hodnota $d - (p + x)$.

(Řešil s. Jiří Havrda, 2 tř. G, Česká Lípa.)

2. a) Každé prvočíslo s výjimkou čísel 2, 3 lze psát ve tvaru $6n \pm 1$, kde n je vhodné přirozené číslo; dokažte. Platí také obrácená poučka?

b) Užitím předchozího výsledku dokažte: Zmenšíme-li čtverec kteréhokoliv prvočísla s výjimkou čísel 2, 3 o jednu, dostaneme číslo, které je dělitelné číslem 24.

Řešení. a) Je-li prvočíslo $p > 3$, pak čísla $p - 1$, $p + 1$ jsou obě sudá. Čísla $p - 1$, p, $p + 1$ jdou po sobě v posloupnosti přirozených čísel a je tedy právě jedno z nich dělitelné třemi. Číslo p to zřejmě není, tedy buď $p - 1$ nebo $p + 1$ je dělitelné třemi. Máme tedy dokázáno, že buď $p - 1$ nebo $p + 1$ je dělitelné šesti, čili existuje přirozené číslo n takové, že platí buď $p = 6n + 1$ nebo $p = 6n - 1$. (Viz cvič. 61, str. 25 v učebnici Matematika pro I. třídu gymnasií.)

Obrácená poučka by zněla: Je-li p přirozené číslo tvaru $6n + 1$ nebo $6n - 1$, pak p je prvočíslo větší nežli tři.

Tato poučka není správná, neboť číslo 25 je tvaru $6n + 1$, ale není prvočíslo a číslo 35 je tvaru $6n - 1$ a také není prvočíslo.

b) Je-li $p = 6n + 1$, pak $p^2 - 1 = 36n^2 + 12n = 12n\,(3n + 1) =$ $= 12n\,[2n + (n + 1)] = 24\,n^2 + 12n\,(n + 1) = 24\,[n^2 + \frac{1}{2}n\,(n + 1)]$.

Číslo $\frac{1}{2}n\,(n + 1)$ je přirozené, neboť součin $n(n + 1)$ je sudý. Je tedy $p^2 - 1$ dělitelné číslem 24.

Je-li $p = 6n - 1$, pak $p^2 - 1 = 24\,[n^2 + \frac{1}{2}(n - 1)\,n]$, a tedy i v tomto případě je $p^2 - 1$ násobkem čísla 24.

3. Je dána kružnice k a její tětiva AB, která není průměrem; budiž p sečna kružnice k kolmá k přímce AB. Určete na přímce p takový bod X, aby dutý úhel $\sphericalangle\, AXB$ byl co největší. Proveďte diskusi.

Řešení. Řešení úlohy budou souměrná podle přímky AB, neboť $p \perp AB$. Hledaný bod X, pokud existuje, neleží na přímce AB, neboť pak by nevznikl dutý úhel $\sphericalangle\, AXB$. Stačí se tedy omezit na řešení v jedné polorovině ϱ vyťaté přímkou AB. Označme P průsečík přímky p s přímkou AB (P existuje, neboť $p \perp AB$); budiž $M \not\equiv P$ bod přímky p, který leží v ϱ. Rozlišujme tři případy:

[1] P je krajní bod úsečky AB, na př. $P \equiv B$. Ukážeme, že v ϱ (a tedy vůbec) neexistuje bod X uvedené vlastnosti. Platí totiž, že ke každému bodu Y polopřímky PM existuje bod Y' polopřímky PM, na př. střed úsečky YP, o němž platí, že

$$\sphericalangle\, AY'B > \sphericalangle\, AYB. \tag{1}$$

(Podle věty: Budiž B pata kolmice, spuštěné z bodu A na přímku $BY'Y$; potom platí vztah (1) — viz Matematika pro I. třídu gymnasií, str. 143.)

Tedy žádný bod poloroviny ϱ (a tedy vůbec) nevyhovuje podmínce pro bod X.

[2] P je uvnitř úsečky AB. Opět ke každému bodu Y přímky p, který leží v ϱ, existuje bod Y' tak, že jako v odst. [1] je jednak

$$\sphericalangle AY'P > \sphericalangle AYP, \text{ jednak}$$
$$\sphericalangle BY'P > \sphericalangle BYP, \text{ takže také}$$

$$\sphericalangle AY'B = \sphericalangle AY'P + \sphericalangle AY'B > \sphericalangle AYP + \sphericalangle PYB = \sphericalangle AYB.$$

Jako v [1] tedy opět neexistuje v ϱ (a tedy vůbec) bod X, požadované vlastnosti.

[3] Bod P leží vně úsečky AB, na př. na prodloužení úsečky AB za bod B (jinak vyměníme označení bodů A, B). Ukážeme, že v tomto případě existuje v ϱ bod X požadované vlastnosti, a to jediný. Existuje totiž kružnice k', která má střed v ϱ, prochází body A a B a dotýká se p: označíme-li Q střed úsečky AB, leží na ose q úsečky AB v polorovině ϱ právě jeden bod S tak, že $\overline{SB} = \overline{PQ}$, neboť $\overline{PQ} > \overline{BQ}$ a Q je pata kolmice spuštěné z bodu B na přímku q. Kružnice opsaná kolem bodu S poloměrem $\overline{PQ}$ má pak popsanou vlastnost, neboť p a q jsou rovnoběžky o vzdálenosti $\overline{PQ}$. Budiž X bod, v němž se k' dotýká přímky p. Poněvadž body P, Q, S, X tvoří obdélník, leží X v polorovině ϱ, neboť $PQ \equiv AB$. Všechny body Y přímky p, s výjimkou bodu X, leží vně kružnice k'. Podle cvičení 203, str. 202 v učebnici Matematika pro I. tř. gymnasií, platí pro všechny body X poloroviny ϱ, ležící vně kružnice k', že

$$\sphericalangle AYB < \sphericalangle AXB.$$

To tedy platí i pro všechny vnitřní body Y polopřímky PM s výjimkou bodu X. Tím je dokázáno, že X má pro tuto polopřímku hledanou vlastnost.

V opačné polopřímce má bod $X^\star$, souměrně sdružený k bodu X podle přímky AB, touž vlastnost a je

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AX^\star B.$$

Existují tedy v tomto případě na přímce p dva různé body požadované vlastnosti.

4. Budiž dán čtyrstěn $AA'BC$, jehož hrana AA' stojí kolmo na rovinu $A'BC$. Označme $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle BA'C = \alpha'$. Jestliže je $\alpha \geqq 90°$, je $\alpha' > 90°$. Dokažte.

Co lze tedy říci o velikosti pravoúhlého průmětu pravého nebo tupého úhlu do roviny, která protíná obě jeho ramena v bodech mimo jeho vrchol?

Řešení. Budiž P pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku BC; protože $\sphericalangle CAB \geqq 90°$, jsou oba úhly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ ostré a bod P odděluje body B, C. Podle předpokladu stojí přímka AA' kolmo k rovině $A'BC$, t. j. $AA' \perp BC$. Protože je též $AP \perp BC$ a $AP \not\equiv BC$, je rovina $AA'P$ kolmá k přímce BC, a tudíž $A'P \perp BC$. Trojúhelník APA' má při vrcholu A' pravý úhel, čili $\sphericalangle AA'P = 90°$; proto je

$$\overline{A'P} < \overline{AP}. \tag{1}$$

Určeme v polorovině BCA' bod A_0 tak, aby platilo $\triangle A_0BC \cong \triangle ABC$. Bod A_0 leží na polopřímce PA'; podle vztahu (1) leží na ní body P, A', A_0 v tomto pořádku. Protože bod P odděluje body B, C, platí:

a) Polopřímka A_0P dělí úhel $\sphericalangle BA_0C$ ve dva styčné úhly, t. j.

$$\sphericalangle BA_0C = \sphericalangle BA_0P + \sphericalangle PA_0C. \tag{2}$$

b) Polopřímka $A'P$ dělí úhel $\sphericalangle BA'C$ ve dva styčné úhly, t. j.

$$\sphericalangle BA'C = \sphericalangle BA'P + \sphericalangle PA'C. \tag{3}$$

Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníka platí vztahy

$$\sphericalangle BA_0P < \sphericalangle BA'P, \tag{4}$$

$$\sphericalangle CA_0P < \sphericalangle CA'P. \tag{5}$$

Spojením vztahů (3), (4), (5) dostaneme:

$$\sphericalangle BA'C > \sphericalangle BA_0P + \sphericalangle PA_0C,$$

čili podle (2)

$$\sphericalangle BA'C > \sphericalangle BA_0C.$$

Avšak podle předpokladu je $\sphericalangle BA_0C = \sphericalangle BAC \geqq 90°$, a tedy

$$\sphericalangle BA'C > 90°,$$

což jsme měli dokázat.

To znamená: Pravoúhlý průmět pravého nebo tupého úhlu do roviny, která protíná obě jeho ramena v bodech mimo jeho vrchol, je buď úhel tupý nebo úhel přímý.

Úhel přímý vznikne tehdy, leží-li průmět A' vrcholu A pravého úhlu $\sphericalangle BAC$ na přímce BC, t. j. uvnitř úsečky BC.

5. Dokažte: a) Jestliže $\frac{a}{b}$ je zlomek v základním tvaru, potom i zlomky $\frac{a \pm b}{ab}$ jsou v základním tvaru.

b) Součet tří zlomků v základním tvaru nemůže být číslem celým, jestliže není každý prvočinitel jednoho z daných jmenovatelů prvočinitelem alespoň jednoho ze zbývajících dvou jmenovatelů.

Řešení. a) Předpokládáme samozřejmě, že a, b jsou přirozená čísla. Máme-li zůstat v oboru přirozených čísel, pak při diskusi o čitateli a jmenovateli zlomku $\frac{a - b}{ab}$ je nutno připojit omezující předpoklad, že $a > b$; toto omezení neplatí ovšem o čitateli zlomku $\frac{a + b}{ab}$.

Důkaz úlohy provedeme nepřímo.

I. Nejprve řešme případ zlomku $\frac{a + b}{ab}$. Předpokládejme tedy, že existuje zlomek $\frac{a}{b}$ v základním tvaru takový, že zlomek

$$\frac{a + b}{ab} \tag{1}$$

není v základním tvaru, t. j. že existuje přirozené číslo $d > 1$, které dělí současně obě čísla $a + b$, ab. Budiž p jeden z prvočinitelů čísla d. Takový prvočinitel jistě existuje (viz učebnici Matematika pro I. tř. gymnasií, str. 24) a nedělí současně čísla a, b, neboť zlomek $\frac{a}{b}$ je podle předpokladu v základním tvaru. Podle základní vlastnosti prvočísel (viz Matematika pro I. tř. gymnasia, str. 23) dělí tedy číslo p jedno a jenom jedno z čísel a, b. Rozeznávejme dva případy:

[1] Nechť p dělí číslo a, t. j. existuje přirozené číslo k_1 takové, že platí

$$a = p \cdot k_1.$$

Protože podle učiněného předpokladu p dělí i číslo $a + b$, existuje přirozené číslo k takové, že platí

$$a + b = p \cdot k. \tag{2}$$

Protože $b > 0$, je $a + b > a$ čili $p \cdot k > pk_1$ čili $p(k - k_1) > 0$; je tedy $k - k_1$ přirozené číslo, které označíme s. Ze vztahu (2) plyne tedy, že

$$b = ps,$$

t. j. číslo p dělí číslo b, což je proti předpokladu, že zlomek $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru.

[2] Nechť p dělí číslo b. Potom dospějeme rovněž ke sporu podle úvahy z odstavce [1], ve kterém zaměníme všude čísla a a b.

Závěrem o zlomku (1) můžeme říci toto: Je-li $\frac{a}{b}$ zlomek v základním tvaru, pak zlomek (1) je též v základním tvaru.

II. Předpokládejme, že existuje zlomek $\frac{a}{b}$ v základním tvaru takový, že zlomek

$$\frac{a - b}{ab} \tag{3}$$

není v základním tvaru, při čemž $a > b$. Podobnou úvahou jako v odst. I se dojde ke sporu.

b) Máme vlastně dokázat tuto poučku: Jestliže součet tří zlomků

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3},$$

z nichž každý je v základním tvaru, je roven přirozenému číslu x a jestliže prvočíslo p dělí b_1, potom toho prvočíslo p dělí také součin b_2b_3. (Tím jsme jen jinak vyjádřili, že prvočíslo p dělí aspoň jedno z čísel b_2, b_3; viz Matematiku pro I. tř. gymnasií, str. 23.)

Důkaz. Uvedeme-li součet všech tří zlomků na společného jmenovatele, dostaneme

$$\frac{a_1b_2b_3 + a_2b_1b_3 + a_3b_1b_2}{b_1b_2b_3} = x$$

čili

$$a_1b_2b_3 + a_2b_1b_3 + a_3b_1b_2 = xb_1b_2b_3. \tag{4}$$

Protože p dělí b_1, dělí také členy $a_2b_1b_3$, $a_3b_1b_2$, $xb_1b_2b_3$ rovnosti (4) a tedy také výraz $xb_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2$, který je podle (4) roven číslu $a_1b_2b_3$ čili prvočíslo p dělí součin $a_1b_2b_3$. Číslo a_1 není však dělitelné číslem p; jinak by zlomek $\frac{a_1}{b_1}$ nebyl v základním tvaru. Podle základní vlastnosti prvočísel tedy p dělí číslo b_2b_3, což jsme měli dokázat.

Je zřejmé, že celá tato úvaha není na újmu obecnosti. Jestliže totiž určité prvočíslo p dělí na př. číslo b_2, dokážeme podobně, že číslo p dělí součin b_1b_3 (záměna indexů).

6. Označme

$$x = \frac{a}{b + c}, \quad y = \frac{b}{c + a}, \quad z = \frac{c}{a + b},$$

kde a, b, c sú dané racionálne čísla. Zistite, za akých predpokladov platí

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1. \tag{1}$$

Riešenie. Aby bolo možné uvažovať o vzťahu (1), musí platiť

$$b + c \neq 0, \quad c + a \neq 0, \quad a + b \neq 0.$$

Označme

$$xy + yz + zx + 2\,xyz = A,$$

čiže

$$A = \frac{ab}{(b + c)(c + a)} + \frac{bc}{(c + a)(a + b)} + \frac{ca}{(b + c)(a + b)} + \\ + \frac{2abc}{(b + c)(c + a)(a + b)}.$$

Po znásobení tejto rovnosti číslom $(a + b)(b + c)(c + a)$ dostaneme

$$(a + b)(b + c)(c + a)\,A = ab\,(a + b) + bc\,(b + c) + \\ + ca\,(c + a) + 2abc.$$

Pravá strana P tohoto výrazu sa dá postupne upravovať takto:

$$\begin{aligned} P &= ab\,(a + b + c) + bc\,(a + b + c) + ca\,(c + a) = \\ &= b(a + b + c)(c + a) + ca\,(c + a) = \\ &= (c + a)\,[b(a + b + c) + ca] = \\ &= (c + a)\,[ab + b\,(b + c) + ca] = \\ &= (c + a)\,[a(b + c) + b(b + c)] = \\ &= (c + a)(b + c)(a + b). \end{aligned}$$

Je teda

$$(a + b)(b + c)(c + a)A = (c + a)(b + c)(a + b).$$

Podľa predpokladu je číslo $(a + b)(b + c)(c + a)$ na ľavej strane tejto rovnosti rôzne od nuly; ak ním delíme našu rovnosť, obdržíme

$$A = 1.$$

Je teda výraz A rovný 1 pre všetky x, y, z, pre ktoré sú čísla $a + b$, $b + c$, $c + a$ rôzne od nuly.

7. Určete geometrické místo průsečíků V výšek v trojúhelnících ABC, jestliže je dána poloha strany BC, velikost úhlu $\sphericalangle CAB = \alpha$ a jestliže vrcholy A těchto trojúhelníků leží v jedné z obou opačných polorovin vyťatých přímkou BC. Proveďte diskusi pro $\alpha \lesseqqgtr 90°$.

Řešení. I. *Pomocná poučka* (známá z planimetrie): Budiž BC (viz obr. 1, 2) úsečka daná v rovině; označme ϱ', ϱ'' obě opačné poloroviny vyťaté přímkou BC. Dále budiž dán dutý úhel α svou velikostí. Tu platí: Geometrické místo bodů X, ležících uvnitř ϱ', o kterých platí $\sphericalangle BXC = \alpha$, je kruhový oblouk k, jehož krajními body jsou B, C. Střed S kružnice, jejíž částí je oblouk k, je průsečíkem přímek o, u, kde o je osa úsečky BC a u je kolmice vztyčená v bodě B k přímce BU, při čemž je $\sphericalangle CBU = \alpha$, kde U je bod ležící uvnitř ϱ''. Oblouk k je polohou úsečky BC, polorovinou ϱ' a dutým úhlem α jednoznačně určen. Bod S padne:

[1] dovnitř ϱ', je-li $\alpha < 90°$,

[2] do středu úsečky BC, je-li $\alpha = 90°$,

[3] dovnitř ϱ'', je-li $\alpha > 90°$. (Tohoto označení budeme užívat i v dalších úvahách.)

Podle pomocné poučky je kterýkoli vnitřní bod A oblouku k vrcholem jednoho z trojúhelníků ABC, které vyhovují úloze. Výškou trojúhelníka ABC rozumíme kolmici spuštěnou z jeho vrcholu na protější stranu. Buďte po řadě A_1, B_1, C_1 paty výšek trojúhelníka ABC spuštěných z bodů A, B, C a α, β, γ po řadě jeho úhly při vrcholech A, B, C. Z existence trojúhelníků ABC plyne i existence bodů V; úhel α má konstantní hodnotu.

II. Obraťme se nyní k řešení úlohy. Rozeznávejme tři případy: [1] $\alpha > 90°$; [2] $\alpha = 90°$; [3] $\alpha < 90°$.

Případ [1]. Protože je $\alpha > 90°$, je (obr. 1)

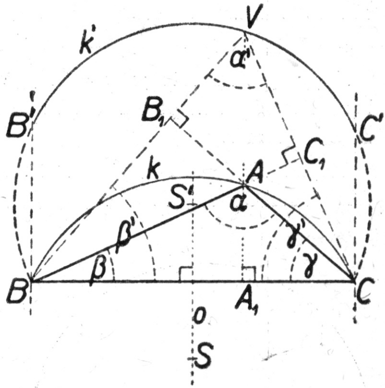
$$\beta < 90°, \gamma < 90°, \quad (1)$$

takže platí

$$\beta' = 90° - \gamma < 90°, \ \gamma' = 90° - \beta < 90°. \quad (2)$$

Proto paty B_1, C_1 padnou dovnitř polopřímek CA, BA (obr. 1) a tedy dovnitř ϱ'; proto polopřímky BB_1, CC_1 existují a jejich vnitřní body leží uvnitř ϱ'. Existují tedy trojúhelníky BCB_1, CBC_1, v nichž je $\sphericalangle BB_1C = \sphericalangle CC_1B = 90°$ a podle vztahů (2) platí

$$\sphericalangle CBB_1 = \beta', \quad \sphericalangle BCC_1 = \gamma'. \quad (3)$$



Obr. 1.

Tu vzhledem k (2) a (3) platí

$$\beta' + \gamma' = 180° - (\beta + \gamma) = \alpha < 180° \quad (4)$$

a proto se podle Eukleidova axiomu polopřímky BB_1, CC_1 protnou v bodě V, který padne dovnitř ϱ'. Proto existuje $\triangle BCV$, jehož úhly při vrcholech B, C jsou β', γ' a o jehož třetím úhlu $\alpha' = \sphericalangle CVB$ vzhledem ke (3), (4) platí

$$\alpha' = 180° - (\beta' + \gamma') = 180° - \alpha < 90°.$$

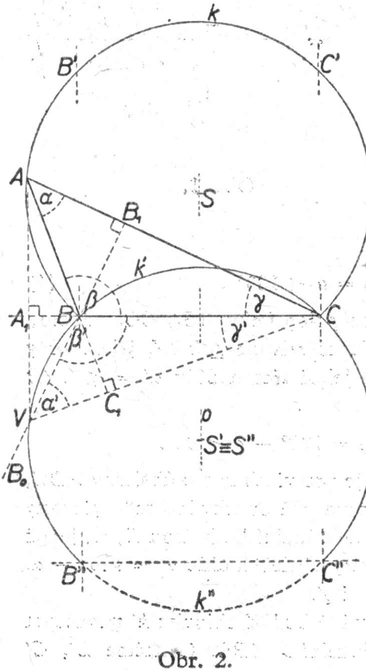
Je tedy α' ostrý úhel a jeho velikost je pro všechny trojúhelníky ABC, vyhovující úloze, konstantní. Podle pomocné poučky leží tedy všechny body V na kruhovém oblouku k', jehož krajní body jsou B, C, jehož body X leží až na B, C uvnitř ϱ' a který přísluší k úhlu $\alpha' = 180° - \alpha$. Střed S tohoto oblouku padne dovnitř ϱ'.

Vzhledem ke vztahům (1) nelze každý bod X oblouku k' považovat za průsečík V výšek určitého trojúhelníka ABC. Označme B', C'

průsečíky kolmic vztyčených v bodech B, C k přímce BC s obloukem k'; protože bod S leží uvnitř ϱ', leží body B', C' rovněž uvnitř ϱ'. Vzhledem k (1) jen ty body X_0 oblouku k', které leží zároveň uvnitř pravých úhlů $\sphericalangle B'BC$, $\sphericalangle C'CB$, jsou body V dané úlohy, jak se snadno obrácením postupu dokáže; každý z bodů X_0 vede právě k jedinému bodu A, ležícímu uvnitř ϱ' tak, že $\sphericalangle CAB = \alpha$.

Případ [2]. Protože je $\alpha = 90°$, je $V \equiv A$. Podle pomocné věty leží body V uvnitř polokružnice k', která leží v ϱ' a která má úsečku BC za průměr.

Případ [3]. Je-li $\alpha < 90°$, je třeba diskutovat tři případy: v trojúhelníku ABC a) jsou oba úhly β, γ ostré, b) je jeden z úhlů β, γ pravý, c) je jeden z úhlů β, γ tupý (viz obr. 2).



Obr. 2.

a) Je-li

$$\beta < 90°, \quad \gamma < 90°, \tag{5}$$

je příslušná úvaha jen obrácením postupu v případě [1], při čemž je třeba označení A, V, α, β, γ, α', β', γ' po řadě zaměnit označením V, A, α', β', γ', α, β, γ a oblouky k, k' (pokud se ovšem body oblouku k' v případě [1] uplatnily — viz vztahy (5)).

b) Nechť je na př. $\beta = 90°$, takže $\gamma = 90° - \alpha < 90°$. Pak je $V \equiv B$. Je-li $\gamma = 90°$, je $V \equiv C$.

c) Nechť je na př. $\beta > 90°$, takže $\gamma < 90°$, $\alpha < 90°$. Pak bod B_1 padne dovnitř úsečky CA a tedy dovnitř ϱ' (obr. 2). Naproti tomu bod C_1 padne na prodloužení úsečky AB za bod B a tedy dovnitř ϱ''.

Budiž BB_0 polopřímka opačná k polopřímce BB_1, takže B_0 leží uvnitř ϱ''. Označme

$$\sphericalangle\, CBB_0 = \beta', \quad \sphericalangle\, BCC_1 = \gamma'.$$

Z trojúhelníka BCB_1, kde $\sphericalangle\, BB_1C = 90°$, plyne

$$\beta' = 90° + \gamma > 90° \text{ (vnější úhel v } \triangle BCC_1). \tag{6}$$

Z trojúhelníka BCC_1, kde $\sphericalangle\, CC_1B = 90°$, plyne

$$\gamma' = \beta - 90° < 90° \text{ (úhel } \beta \text{ je vnější v } \triangle BCC_1). \tag{7}$$

Podle (6), (7) obdržíme

$$\beta' + \gamma' = \beta + \gamma < 180°, \tag{8}$$

takže podle Eukleidova axiomu se polopřímky CC_1, BB_0 protnou v bodě V, který leží uvnitř ϱ''. Z $\triangle VBC$ podle (8) dostaneme

$$\alpha' = \sphericalangle\, CVB = 180° - (\beta' + \gamma') = \alpha.$$

Podle pomocné poučky leží bod V uvnitř kruhového oblouku k'' (jehož krajní body jsou B, C), který leží v ϱ'' a který přísluší k úhlu $\alpha' = \alpha < 90°$. Protože musí platit pro úhly β', γ' vztahy (6), (7), nelze každý vnitřní bod X oblouku k'' považovat za bod V. Uplatní se jen ty body X_0 oblouku k'', které padnou dovnitř poloroviny opačné k polorovině $BB''C$, kde $B'' \not\equiv B$, je průsečík kolmice vztyčené v bodě B k přímce BC s obloukem k''. Bod B'' padne dovnitř ϱ'', neboť střed S'' oblouku k'' leží uvnitř ϱ'' (je $\alpha' < 90°$).

Obráceným postupem snadno odvodíme, že každý zmíněný bod X_0 oblouku k'' lze považovat za bod V, k němuž uvnitř ϱ' přísluší jediný bod A, o němž platí $\sphericalangle\, BAC = \alpha$.

Stejnou úvahu provedeme i v případě, že $\beta < 90°$, $\gamma > 90°$. Označíme-li $C'' \not\equiv C$ průsečík oblouku k'' s kolmicí vztyčenou v bodě C k přímce BC, patří body X_0 oblouku k'', ležící uvnitř poloroviny opačné k polorovině $CC''B$, k hledanému geometrickému místu.

Geometrické místo bodu V v případě, že $\alpha < 90°$ se skládá z těch bodů kruhového oblouku kružnice $(S'', \overline{S''B})$, které leží uvnitř poloroviny $B''C''S''$ (tedy včetně bodů B, C). (Viz obr. 2.)

Snadno se dokáže, že geometrické místo bodů V obdržíme z geometrického místa bodů A posunutím ve směru kolmém k přímce

BC o úsečku SS' ve smyslu SS' (kde S je střed oblouku k příslušného bodům A a S' střed oblouku k', po případě k'', příslušných bodům V).

8. Budiž V průsečík výšek trojúhelníka ABC. Jestliže platí $\overline{CA} < \overline{AB}$ potom je:

a) $\overline{VC} < \overline{VB}$,

b) vzdálenost bodu V od strany CA menší než od strany AB s výjimkou případu, kdy $\sphericalangle\, CAB = 90°$; jak je tomu v tomto výjimečném případě? (Proveďte diskusi pro trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý.)

Řešení. Úloha a). Označme po řadě A_1, B_1, C_1 paty kolmic spuštěných s vrcholů A, B, C trojúhelníka ABC na protější strany. Víme, že bod V leží v případě trojúhelníka ABC:

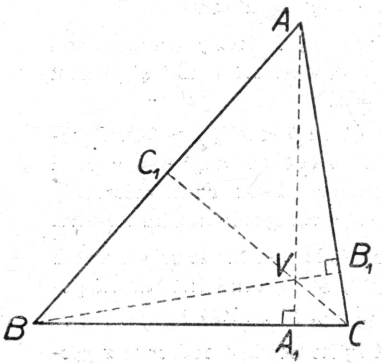
[1] ostroúhlého uvnitř trojúhelníka;

[2] pravoúhlého ve vrcholu pravého úhlu;

[3] tupoúhlého vně trojúhelníka.

Diskusi provedeme pro každý z těchto případů zvlášť.

Případ [1]. Bod A_1 zřejmě odděluje body B, C. Z předpokladu $\overline{AB} > \overline{AC}$ plyne, že $\overline{A_1B} > \overline{A_1C}$ (podle obrácení známé poučky o monotonním vzrůstání vzdálenosti AX bodu A od bodu X polopřímky A_1B při vzrůstu velikosti úsečky A_1X; viz Geometrii pro II. tř. středních škol, str. 37, poučka P°_{5}). Odtud plyne (podle téže poučky), že $\overline{VB} > \overline{VC}$ (obr. 3).



Obr. 3.

Bod V je tedy blíže k tomu vrcholu trojúhelníka, který leží proti jeho větší straně (neboli který je vrcholem většího úhlu trojúhelníka). Jestliže je $\overline{AB} = \overline{AC}$, jsou zmíněné vzdálenosti zřejmě sobě rovny.

Tento výsledek platí i v případech [2], [3], jak ihned dokážeme.

Případ [2]. Tu je buď $V \equiv A$ nebo $V \equiv C$ (obr. 4, 5).

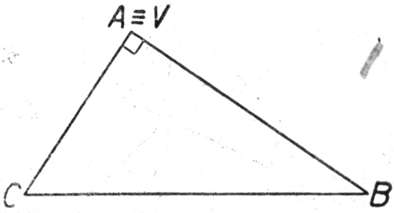
α) Je-li $V \equiv A$, je $\overline{VB} = \overline{AB}$, $\overline{VC} = \overline{AC}$, t. j. $\overline{VC} < \overline{VB}$.

β) Je-li $V \equiv C$, je $\overline{VC} = 0$, $\overline{VB} = \overline{CB} \neq 0$ a tedy $\overline{VC} < \overline{VB}$.

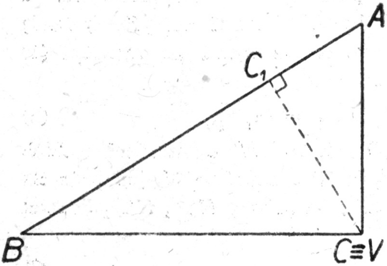
Případ [3]. Buď je α) $\sphericalangle BCA > 90°$ nebo je β) $\sphericalangle CAB > 90°$.

α) Pořádek bodů na přímce BC je nutně A_1CB, takže (podle citované poučky) je $\overline{VB} > \overline{VC}$ (obr. 6).

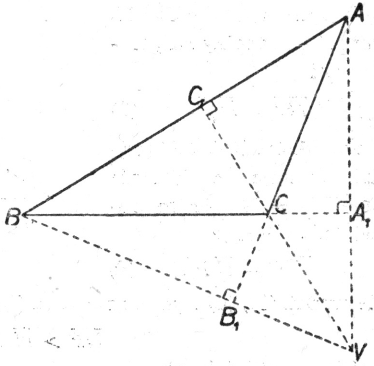
β) Pořádek bodů na přímkách CA, BA je nutně CAB_1, BAC_1 (obr. 7), při čemž úhly $\sphericalangle CBB_1$, $\sphericalangle BCC_1$ jsou ostré a jejich součet je proto menší než 180°. Proto se podle Eukleidova axiomu protnou polopřímky BB_1, CC_1 uvnitř poloroviny BCA. Polopřímka BA prochází tedy vnitřkem úhlu $\sphericalangle CBB_1$, a polopřímka CA vnitřkem úhlu $\sphericalangle BCC_1$, takže bod A padne dovnitř trojúhelníka VCB. Bod A_1 odděluje body B, C (úhly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ jsou ostré) a pořádek bodů na polopřímce A_1A je A_1AV. Podle předpokladu je $\overline{CA} < \overline{AB}$ a podle citované poučky je tedy též $\overline{CA_1} < \overline{A_1B}$; podle téže



Obr. 4.



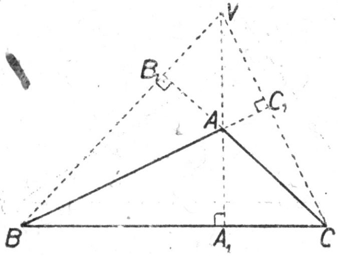
Obr. 5.



Obr. 6.

poučky je proto i $\overline{VC} < \overline{VB}$. Tím je tvrzení úlohy a) dokázáno.

Úloha b). Diskusi provedeme na základě výsledku úlohy a); přitom užijeme této *pomocné poučky:* Buďte MNP, $M_1N_1P_1$ dva trojúhelníky, o kterých platí (obr. 8):



Obr. 7.

$$\sphericalangle PMN = \sphericalangle P_1M_1N_1,$$
$$\sphericalangle MPN = \sphericalangle M_1P_1N_1 = 90°,$$
$$\overline{MN} > \overline{M_1N_1}. \qquad (1)$$

Potom platí

$$\overline{NP} > \overline{N_1P_1}.$$

Důkaz. Sestrojme $\triangle MN'P' \cong \triangle M_1N_1P_1$ tak, aby bod P' padl dovnitř polopřímky MP a bod N' dovnitř polopřímky MN; to lze vzhledem ke vztahům (1) učinit jediným způsobem. Přitom tedy platí

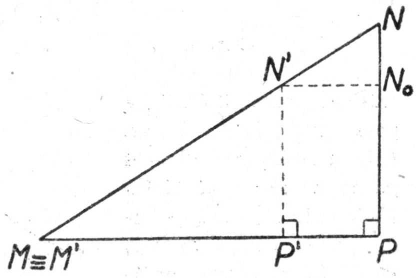
$$\overline{N'P'} = \overline{N_1P_1}, \quad \overline{MN} = \overline{M_1N_1}. \qquad (2)$$

Vzhledem k druhému vztahu (2) leží bod N' uvnitř úsečky MN. Veďme bodem N' přímku $N'N_0 \parallel MP$ a označme N_0 její průsečík s přímkou NP. Užijme na $\triangle MNP$ a na přímky $N'P'$, $N'N_0$ dvakrát věty Paschovy; odtud snadno usoudíme, že P' je vnitřní bod úsečky MP a bod N_0 vnitřní bod úsečky NP, takže platí

$$\overline{NP} > \overline{N_0P}. \qquad (3)$$

Rovnoběžník $PN_0N'P'$ zřejmě existuje a protože $\sphericalangle NPM = 90°$, je to obdélník, v němž je

$$\overline{N_0P} = \overline{NP'}. \qquad (4)$$



Obr. 8.

Ze vztahů (3), (4) a prvního vztahu (2) ihned plyne

$$\overline{NP} > \overline{N_1P_1},$$

což jsme měli dokázat.

Přejdeme *k vlastnímu řešení* úlohy b). Stejně jako v úloze a) rozeznávejme *případy*: Trojúhelník ABC je [1] ostroúhlý, [2] pravoúhlý, [3] tupoúhlý.

Případ [1]. V $\triangle ABB_1$ a $\triangle ACC_1$ je úhel $\sphericalangle CAB$ společný, $\sphericalangle AB_1B = \sphericalangle AC_1C = 90°$, takže $\sphericalangle ABB_1 = 90° - \sphericalangle CAB = \sphericalangle ACC_1$. Trojúhelníky VBC_1, VCB_1 existují a podle výsledku úlohy a) je $\overline{VB} > \overline{VC}$; přitom je $\sphericalangle VBC_1 = \sphericalangle VCB_1$, $\sphericalangle VC_1B = \sphericalangle CB_1V = 90°$. Podle pomocné poučky je tedy $\overline{VC_1} > \overline{VB_1}$.

Případ [2]. α) $V \equiv A$ (t. j. $\sphericalangle BAC = 90°$); tu je $V \equiv B_1 \equiv C_1$ a tím $\overline{VB_1} = \overline{VC_1} = 0$. To je právě zmíněný výjimečný případ. β) $V \equiv C$; tu je $V \equiv B_1$, C_1 leží uvnitř úsečky AB, takže $\overline{VC_1} \neq 0$, $\overline{VB_1} = 0$ a tedy $\overline{VC_1} > \overline{VB_1}$.

Případ [3]. α) $\sphericalangle BCA > 90°$, takže trojúhelníky VBC_1, VCB_1 existují. Pořádek bodů na polopřímce C_1C [podle diskuse úlohy a) případ [3] β)] je C_1CV, na přímce BV je pořádek bodů BB_1V; v $\triangle VBC_1$ je $\sphericalangle BC_1V = 90°$, v $\triangle CVB_1$ je $\sphericalangle CB_1V = 90°$. Je tedy $\overline{VC_1} > \overline{VC}$, $\overline{VC} > \overline{VB_1}$ a tím $\overline{VC_1} > \overline{VB_1}$.

β) $\sphericalangle CAB > 90°$; trojúhelníky VBC_1, VCB_1 mají společný úhel $\sphericalangle BVC$; dále je $\sphericalangle BC_1V = \sphericalangle CB_1V = 90°$, takže $\sphericalangle C_1BV = \sphericalangle B_1CV < 90°$. Podle úlohy a) je $\overline{VB} > \overline{VC}$ a podle pomocné poučky o trojúhelnících VBC_1, VCB_1 platí $\overline{VC_1} > \overline{VB_1}$.

Tím je tvrzení úlohy b) dokázáno.

Závěr. Průsečík výšek V trojúhelníka je blíže k té ze dvou nerovných stran, která je menší. Výjimku činí případ, kdy úhel těmito stranami sevřený je pravý; v tomto případě jsou obě zmíněné vzdálenosti nulové.

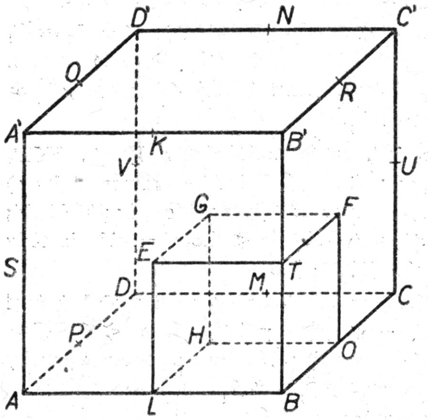
9. Buďte $ABCD$, $A'B'C'D'$ protilehlé stěny krychle, při čemž AA', BB', CC', DD' jsou hrany krychle. Jestliže bod X, ležící uvnitř krychle, je blíže k vrcholu B než ke kterémukoli z ostatních vrcholů krychle, potom je bod X od bodu D' dále než od kteréhokoli z ostatních vrcholů krychle. (Poučku na str. 147, odst. 2 z učebnice Matematika pro I. tř. gymnasií rozšiřte pro prostor.)

Řešení. I. *Pomocná poučka* [1]. Označme ω rovinu souměrnosti úsečky HH' a ωH, $\omega H'$ oba opačné poloprostory, které vytíná.

Leží-li bod X uvnitř poloprostoru ωH, potom platí $\overline{HX} < \overline{H'X}$ a obráceně.

Tato poučka vyplývá bezprostředně ze známé podobné poučky planimetrické.

II. *Poučka* [2]. Rovina σ souměrnosti tělesové úhlopříčky BD' krychle $ABCDA'B'C'D'$ prochází středem G krychle a protíná povrch krychle v pravidelném šestiúhelníku $KRUMPS$ (viz obr. 9).



Obr. 9.

To je známá stereometrická poučka.

Důsledek. Krychle $LBQHETFG$ v obr. 9 má s rovinou σ z poučky [2] společný pouze bod G, takže celý vnitřek této krychle je rovinou σ oddělen od bodu D'.

III. V dalším budeme označovat $UVWM$ ten z obou opačných poloprostorů vyťatých rovinou UVW, jehož vnitřním bodem je daný bod M. Nyní přejdeme k řešení dané úlohy. Označme středy hran dané krychle tak, jak je uvedeno v obr. 9; dále budiž G střed této krychle.

Podle obrácené poučky [1] bod X, který je blíže k bodu B než k bodu:

1. C' musí ležet uvnitř poloprostoru $A'B'CB$.
2. B' musí ležet uvnitř poloprostoru $STUB$.
3. A' musí ležet uvnitř poloprostoru $AB'C'B$.
4. D' musí ležet uvnitř poloprostoru σB, kde σ je rovina souměrnosti úsečky BD' (viz důsledek poučky [2]).
5. A musí ležet uvnitř poloprostoru $KLMB$.

6. C musí ležet uvnitř poloprostoru $PQRB$.
7. D musí ležet uvnitř poloprostoru $AA'C'B$.

Proto bod X ležící uvnitř dané krychle a splňující podmínky předpokladu úlohy musí ležet uvnitř krychle $LBQHETFG$ (viz důsledek poučky [2]). Podle poučky [1] každý vnitřní bod X této krychle splňuje podmínky předpokladu úlohy.

Jestliže však bod X leží uvnitř poloprostoru:

1. $A'B'CB$, pak $\overline{XA} < \overline{XD'}$.
2. $STUB$, pak $\overline{XD} < \overline{XD'}$.
3. $AB'C'B$, pak $\overline{XC} < \overline{XD'}$.
4. σB, pak $\overline{XB} < \overline{XD'}$.
5. $KLMB$, pak $\overline{XC'} < \overline{XD'}$.
6. $PQRB$, pak $\overline{XA'} < \overline{XD'}$.
7. $AA'C'B$, pak $XB' < \overline{XD'}$.

Tím je závěr dané úlohy dokázán.

(Řešil s. Jaromír Janko, 1. tř. Akademického G, Praha II.)

10. K očíslování všech svazků určité knihovny bylo třeba na hřbety knih natisknout třikrát tolik cifer, co je svazků. Kolik svazků měla knihovna?

Řešení. Budiž $x > 0$ hledaný počet svazků. Dokážeme, že x je čtyrciferné číslo (v desítkové soustavě). Nemůže být jednociferné, neboť pro $x > 0$ je $x \neq 3x$, ani dvojciferné, neboť rovnice

$$9 + 2(x - 9) = 3x$$

nemá za kořen dvojciferné číslo, ani trojciferné, neboť pro žádné trojciferné číslo není

$$9 + 2 \cdot 90 + 3(x - 99) = 3x.$$

Předpokládejme, že x je čtyrciferné číslo, pak jde o řešení rovnice

$$3x = 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4(x - 999).$$

Odtud $x = 1107$, což je skutečně čtyrciferné.

Ukážeme konečně, že toto řešení je jediné. Neboť kdyby počet svazků byl $1107 + y$ (y přirozené číslo), pak je třeba použít cifer alespoň v počtu $N = 3 \cdot 1107 + 4y$. Avšak číslo N je zřejmě větší než $3(1107 + y)$, t. j. než trojnásobek počtu svazků.

Hledaný počet svazků je tedy 1107.

11. Stanovte geometrické místo bodů, pro něž rozdíl vzdáleností od dvou daných různoběžek a, b je roven dané úsečce velikosti d.

Řešení. Označme P průsečík obou různoběžek a, b a o_1, o_2 jejich osy; každá z obou navzájem kolmých os o_1, o_2 půlí jeden pár vrcholových úhlů, ve které různoběžky a, b dělí rovinu. Smysl úlohy vyžaduje, aby $d \geqq 0$. Jestliže bod Q roviny různoběžek a, b vyhovuje úloze, označme po řadě $x_Q \geqq 0$, $y_Q \geqq 0$ jeho vzdálenosti od přímek a, b; podle textu úlohy pro bod Q platí

$$|x_Q - y_Q| = d. \tag{1}$$

Rozeznávejme *dva případy*: [1] $d = 0$; [2] $d > 0$.

Případ [1]. Je-li $d = 0$, pak ze vztahu (1) plyne $x_Q = y_Q$. Je známo, že geometrickým místem bodů Q, které vyhovují úloze a právě napsané podmínce, jsou dvě osy o_1, o_2 různoběžek a, b (viz učebnice Matematika pro I. tř. gymnasií, str. 150).

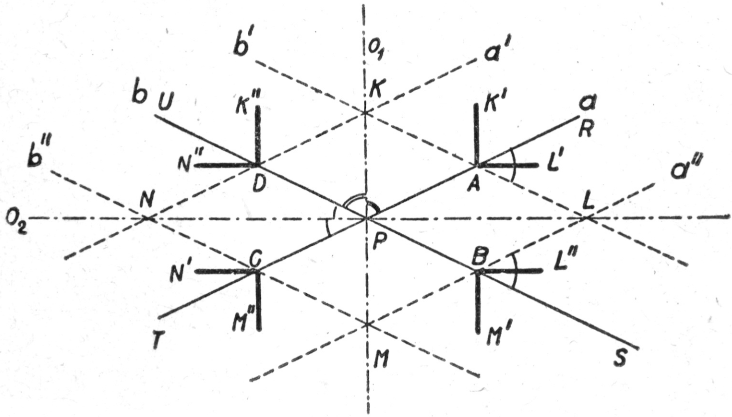
Případ [2]. Sestrojme přímky $a' \not\equiv a''$ rovnoběžné s přímkou a ve vzdálenosti d od této přímky a přímky $b' \not\equiv b''$ rovnoběžné s přímkou b ve vzdálenosti d od této přímky (obr. 10). Označme po řadě K, L, M, N průsečíky těchto dvojic přímek (a', b'), (a'', b'), (a'', b''), (a', b''), takže $o_1 \equiv KPM$, $o_2 \equiv LPN$. Čtyrúhelník $KLMN$ je kosočtverec; označme po řadě A, B, C, D středy jeho stran. Dále označme po řadě AR, BS, CT, DU polopřímky opačné k polopřímkám AP, BP, CP, DP.

Vyšetřujme tu část geometrického místa, která náleží úhlu APB (vyšetřování částí, které náležejí úhlům BPC, CPD, DPA, je zcela obdobné).

Rozeznávejme nyní dva případy:

a) Je-li $x_Q < y_Q$, je $y_Q - x_Q = d$; pak je $y_Q \geqq d$, takže $y_Q - d = x_Q$. Protože $y_Q \geqq d$, leží Q v polorovině KLR a číslo $y_Q - d$ značí vzdálenost bodu Q od přímky b'. Každý bod V, který patří zároveň polorovině KLR a úhlu APB, patří také úhlu RAL (a obráceně), takže jde o geometrické místo bodů Q, které mají stejné vzdálenosti od přímek a, b' a leží v úhlu RAL. Tímto geometrickým místem je polopřímka $AL' \uparrow\uparrow PL$.

b) Je-li $x_Q > y_Q$, je $x_Q - y_Q = d$; pak je $x_Q \geqq d$, takže $x_Q - d = y_Q$. Protože $x_Q \geqq d$, leží Q v polorovině MLS a $x_Q - d$ značí



Obr. 10.

vzdálenost bodu Q od přímky a''. Každý bod W, který patří zároveň polorovině MLS a úhlu APB, patří také úhlu LBS (a obráceně), takže jde o geometrické místo bodů Q, které mají stejné vzdálenosti od přímek a'', b a leží v úhlu LBS. Tímto geometrickým místem je polopřímka $BL'' \uparrow\uparrow PL$.

Podobná tvrzení platí rovněž o ostatních úhlech BPC, CPD, DPA, takže hledaným geometrickým místem jsou čtyři dvojice polopřímek: $AL' \uparrow\uparrow BL''$, $BM' \uparrow\uparrow CM''$, $CN' \uparrow\uparrow DN''$, $DK'' \uparrow\uparrow AK'$; tyto dvojice jsou pořadě souhlasně rovnoběžné s polopřímkami PL, PM, PN, PK.

12. Jsou-li a, b, c kladná čísla, pak

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqq 3.$$

Dokažte! Proveďte diskusi, kdy nastane rovnost.

Řešení. Výraz $V = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ se nezmění cyklickou permutací písmen. (Cyklické permutace k permutaci abc jsou bca, cab. Při permutaci bca nahradíme prvek a prvkem b, prvek b prvkem c a prvek c prvkem a.) Vzhledem k tomu stačí uvažovat případy $0 < a \leqq b \leqq \leqq c$, $0 < c \leqq b \leqq a$.

V obou případech je $\frac{a-c}{b} \geqq \frac{a-c}{a}$ čili

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} + \frac{c}{a} \geqq 1. \tag{1}$$

Mimo to je

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqq 2 \tag{2}$$

(viz učebnici Matematika pro I. tř. gymnasií, str. 53, cv. 160) a sečtením vztahů (1), (2) dostaneme

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqq 3. \tag{3}$$

Má-li nastat rovnost ve vztahu (3), musí nastat rovnost i v obou vztazích (1) a (2); z rovnice (2) pak vyplývá $b = c$, z rovnice (1) vyplývá $a = b$. Obráceně, je-li $a = b = c$, platí (3) se znaménkem rovnosti.

13. Je-li n přirozené číslo, potom platí

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1)} < 1.$$

Řešení. Je-li n libovolné přirozené číslo, potom zřejmě platí

$$0 < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n(n+1)}, \tag{1}$$

a tedy také

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}. \qquad (2)$$

k-tý člen levé strany vztahu (2) (pro $k = 1, 2, \ldots, n$) rozšíříme číslem $(k + 1)$; tím vztah (2) nabude tvaru

$$\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{n+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} +$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}.$$

Nyní převeďme všechny členy pravé strany této nerovnosti až na člen první na levou stranu a zlomky o stejném jmenovateli sečtěme; tím dostaneme

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)} < 1,$$

což je vztah, který jsme měli dokázat.

(Řešil s. Vladimír Jezdinský, II.a tř., Vrchlického G, Klatovy.)

14. Buďte a, b, c racionální čísla. Dokažte, že potom platí

$$(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 \geqq ab + bc + ca. \quad (1)$$

Proveďte diskusi, pro které případy nastane rovnost.

Řešení. Levou stranu vztahu (1) označme L, pravou P.

Je $L = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$, takže
$$L - P = 3[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)] = 3V.$$

Máme dokázat, že výraz V je nezáporný. Avšak

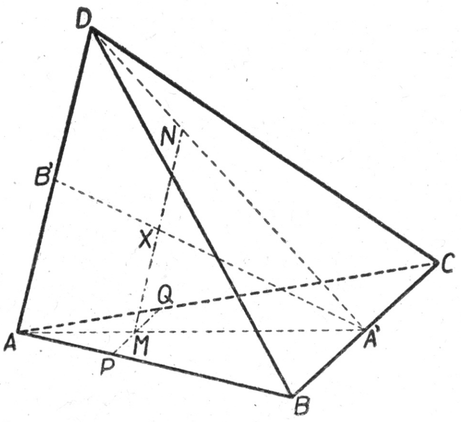
$$2V = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) =$$
$$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2,$$

takže $2V \geqq 0$ neboli $V \geqq 0$; rovnost nastane zřejmě právě tehdy, je-li $a = b = c$. To platí i pro výraz (1).

15. Určete, co vyplňují středy rovnoběžníků, které jsou rovinnými řezy daného čtyrstěnu.

Při důkazu můžete vyjít od některé z těchto *pouček:* Pomocná věta (1). Budiž S střed strany AB v trojúhelníku ABC a A', B' po řadě body ležící uvnitř stran CA, CB takové, že $A'B' \parallel AB$. Označme S' průsečík přímek $A'B'$, CS. Potom je $\overline{A'S'} = \overline{B'S'}$. Pomocná věta (2). Buďtež $\alpha \parallel \alpha'$ dvě různé roviny. Budiž dále A libovolný bod roviny α a A' libovolný bod roviny α'; označme S střed úsečky AA'. Potom všechny body S takto určené vyplní určitou rovinu $\sigma \parallel \alpha$.

Riešenie. Najprv určíme vlastnosti rovin, ktorých rezmi budú rovnobežníky (obr. 11). Napr. rovina ϱ má pretať roviny ABD, ACD v protiľahlých stranách rovnobežníka. Avšak rovina ϱ, ktorá pretne dve rôznobežné roviny v rovnobežkách, musí byť rovnobežná s ich priesečnicou AD. A opačne, ak je $\varrho \parallel AD$, pretne rovina ϱ roviny ABD, ACD (pokiaľ je od nich odlišná) v rovnobežkách. To isté môžeme povedať o zostávajúcich protiľahlých stranách rovnobežníka, priesečniciach roviny ϱ so stenami ABC, DBC, totiž, že rovina ϱ musí byť rovnobežná s priamkou BC. Tedy roviny ϱ rovnobežné s dvoma protiľahlými hranami AD, BC, pokiaľ protínajú všetkysteny štvorstena, pretínajú ho v rovnobežníku.



Obr. 11.

Zistíme, čo vyplňujú stredy N tých strán týchto rovnobežníkov, ktoré ležia v stene BCD a ktoré sú rovnobežné s priamkou BC. Je to ťažnica DA' trojuholníka BCD, kde A' je stred hrany BC. Podobne stredy M tých strán týchto rovnobežníkov, ktoré ležia v rovine ABC a ktoré sú rovnobežné s priamkou BC, vyplnia ťažnicu AA' trojuholníka

ABC. Stredné priečky MN týchto rovnobežníkov budú ležať v rovine ADA' a sú navzájom rovnobežné a ich stredy ležia na ťažnici $A'B'$ trojuholníka $A'AD$, kde B' je stred hrany AD.

Treba ešte dokázať, že každý vnútorný bod úsečky $A'B'$ je stredom nášho rovnobežníka, ktorého rovina ϱ je rovnobežná s protiľahlými hranami AD, BC nášho štvorstena. Bodom X veďme rovnobežku s priamkou AD. Táto priamka zrejme leží v rovine $A'AD$ a pretne úsečky $A'A$, $A'D$ v ich vnútorných bodoch M, N. Pretože bod X leží na ťažnici trojuholníka $A'AD$, je stredom tejto úsečky MN. Ale teraz napr. bodom M vedieme úsečku $PQ \parallel BC$ (kde P je vnútorným bodom úsečky AB a Q vnútorným bodom úsečky AC), zas podľa predošlej úvahy je bod M stredom úsečky PQ. Avšak rovina PQX je rovnobežná aj s priamkou BC a AD a podľa poučky najprv vyslovenej vieme, že priesek tejto roviny so štvorstenom je rovnobežník; pritom z našej konštrukcie je úsečka MN jeho strednou priečkou a bod X stredom tohto rovnobežníka. Teda môžeme povedať, že úsečka $A'B'$, spájajúca stredy protiľahlých hrán AD, BC štvorstenu, je geometrickým miestom stredov rovnobežníkov, ktorých roviny sú rovnobežné s protiľahlými hranami AD, BC daného štvorstena $ABCD$.

To isté môžeme povedať aj o obidvoch zostávajúcich dvojiciach AB, CD a AC, BD protiľahlých hrán daného štvorstenu.

(Riešil s. Juraj Virsík, 2 tr. II.G, Bratislava.)

16. Budiž dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně velikosti a. Buďte M, N, P body zvolené po řadě uvnitř úseček BC, CA, AB. Dokažte nejprve, že je možné zvolit body M, N, P (různé od středů stran) tak, že MNP je rovnostranný trojúhelník. Potom sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky MNP takové, aby jejich strany měly danou velikost m. Diskutujte, pro která m má úloha řešení.

Řešení. I. Označme středy stran BC, CA, AB po řadě M_0, N_0, P_0; $\triangle M_0N_0P_0$ je rovnostranný, velikost jeho stran je $\frac{1}{2}a$.

Existuje-li $\triangle MNP$ o vlastnostech požadovaných úlohou, potom je

$$\sphericalangle NPB = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ANP \tag{1}$$

(vnější úhel v $\triangle APN$ je roven součtu vnitřních úhlů při ostatních vrcholech). Dále je

$$\sphericalangle NPB = \sphericalangle NPM + \sphericalangle BPM. \tag{2}$$

Ale $\sphericalangle CAB = \sphericalangle NPM = \frac{1}{3}\pi$, takže z (1), (2) plyne

$$\sphericalangle ANP = \sphericalangle BPM. \tag{3}$$

Je $\triangle ANP \cong \triangle BPM$ (usu), neboť $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC$, dále platí (3) a $\overline{NP} = \overline{PM}$. Odtud plyne

$$\overline{AP} = \overline{BM}, \quad \overline{AN} = \overline{BP}. \tag{4}$$

Z $\triangle BPM$, $\triangle CMN$ stejně dokážeme, že

$$\overline{BM} = \overline{CN}, \quad \overline{BP} = \overline{CM};$$

odtud vzhledem ke (4) platí

$$\overline{AP} = \overline{BM} = \overline{CN}, \quad \overline{AN} = \overline{BP} = \overline{CM}. \tag{5}$$

První rovnosti (5) již zaručují platnost druhých a obráceně; jsou to podmínky nutné pro existenci $\triangle MNP$. Obráceně, jsou-li podmínky (5) splněny, je $\triangle ANP \cong \triangle BPM \cong \triangle CMN$ (sus), neboť úhly při vrcholech A, B, C jsou vesměs $\frac{1}{3}\pi$; proto platí $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PM}$, při čemž body M, N, P neleží v jedné přímce (viz Paschův axiom) a $\triangle MNP$ je proto rovnostranný.

II. Vzhledem k požadavku úlohy $M \not\equiv M_0$ lze předpokládat, že platí $\overline{CM} > \overline{MB}$. Z $\triangle MCN$ plyne, že $\overline{CN} + \overline{CM} > \overline{MN}$ neboli $\overline{MN} < a$. Budiž O střed v $\triangle ABC$, takže je $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ a dále $\sphericalangle OAP = \sphericalangle OBM = \sphericalangle OCN = \frac{1}{6}\pi$. Proto vzhledem k (5) je $\triangle OAP \cong \triangle OBM \cong \triangle OCN$(sus) a odtud $\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OP}$. Protože však v rovině trojúhelníka existuje jediný bod, který má od jeho vrcholů vesměs stejné vzdálenosti (střed opsané kružnice), je bod O zároveň střed rovnostranného trojúhelníka MNP.

III. Odtud dostáváme konstrukci $\triangle MNP$, jestliže je dána velikost m jeho stran:

Sestrojíme pomocný rovnostranný trojúhelník o straně velikosti m a vyšetříme poloměr r kružnice jemu opsané. Opišme kružnici (O, r); ta protne úsečku BC v bodech $M \not\equiv M'$ tehdy, jestliže platí

$$\varrho < r < \overline{OB}, \qquad (6)$$

kde ϱ je vzdálenost bodu O od přímky BC (pro $r = \varrho$ dospíváme k bodu M_0); každý z bodů M, M' vede k jednomu trojúhelníku požadované vlastnosti. Oba trojúhelníky jsou zřejmě shodné (splynou po otočení jednoho z nich kolem bodu O o úhel $\frac{2}{3}\pi$).

Vztah (6) lze psát vzhledem k tomu, že výška v rovnostranném trojúhelníku je i těžnicí, ve tvaru

$$\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} a\sqrt{3} < \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} m\sqrt{3} < \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} a\sqrt{3};$$

po úpravě dostáváme podmínku řešitelnosti naší úlohy ve tvaru

$$\tfrac{1}{2} a < m < a$$

(s vyloučením případu $\triangle M_0 N_0 P_0$).

C. ÚLOHY II. KOLA, KATEGORIE A.

1. Číslo $a_n = 2^{n+1} + 5^n$ nemůže být prvočíslem pro žádné přirozené číslo n. Dokažte!

Riešenie. I. Pomocná veta: Ak a, b, u sú prirodzené čísla a ak a, $a + b$ sú deliteľné číslom u, potom aj b je deliteľné číslom u.

II. Číslo a_n je pre každé prirodzené n väčšie ako číslo 3; dokážeme, že číslo a_n je deliteľné troma pre každé prirodzené n a že nie je teda prvočíslom. Dôkaz prevedieme matematickou indukciou.

a) Pre $n = 1$ je $a_1 = 2^2 + 5 = 9$, čo je deliteľné troma.

b) Teraz dokážeme, že ak a_n pre dané prirodzené n je deliteľné troma, musí byť aj a_{n+1} deliteľné troma. Je

$$a_n + a_{n+1} = 2^{n+1}(2 + 1) + 5^n(5 + 1) = 3 \cdot 2(2^n + 5^n),$$

t. j. číslo $u = a_n + a_{n+1}$ je deliteľné troma. Keďže a_n, u sú deliteľné troma, podľa pomocnej vety musí byť aj a_{n+1} deliteľné troma.

Tým sme urobili oba kroky matematickej indukcie a veta je dokázaná.

(Riešil s. Pavol Brunovský, 4.d tr. II. G, Bratislava.)

2. Dané sú kladné čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, b_1, b_2, \ldots, b_5$ všetky menšie než 7; žiadne z nich nie je celým číslom. Dokážte, že medzi päťdesiatimi bodmi $[a_i, b_k]$ (kde $i = 1, 2, \ldots, 10$, $k = 1, 2, \ldots, 5$) existujú aspoň dva také, že ich vzdialenosť je menšia než $\sqrt{2}$.

Řešení. I. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že indexy čísel a_k (pro $k = 1, 2, \ldots, 10$) jsou zvoleny tak, že platí

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_9 \leqq a_{10}.$$

II. Pak existuje index k takový, že

$$a_{k+1} - a_k < \tfrac{7}{9} \quad (\text{kde } k = 1, 2, \ldots, 9). \tag{1}$$

Důkaz. Předpokládejme, že takový index k neexistuje, pak platí nerovnosti (v celkovém počtu devět)

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &\geqq \tfrac{7}{9}, \\ a_3 - a_2 &\geqq \tfrac{7}{9}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{10} - a_9 &\geqq \tfrac{7}{9}. \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme $a_{10} - a_1 \geqq \frac{7}{9} \cdot 9$ neboli $a_{10} - a_1 \geqq 7$.

Jelikož je $a_1 > 0$, plyne z poslední nerovnosti, že je $a_{10} > 7$, což odporuje předpokladu. Tím je tvrzení týkající se vztahu (1) dokázáno.

III. Uvažujme body $X \equiv [a_k, b_l]$, $Y \equiv [a_{k+1}, b_l]$, kde k je číslo z odst. II. splňující vztah (1), takže platí

$$a_{k+1} - a_k < \tfrac{7}{9}. \tag{2}$$

Vzdálenost d bodů X, Y je $d = \sqrt{(a_{k+1} - a_k)^2 + (b_l - b_l)^2} = a_{k+1} - a_k$, neboť je $a_{k+1} - a_k \geqq 0$; je tedy

$$d = a_{k+1} - a_k. \tag{3}$$

Ze vztahů (2), (3) plyne, že $d < \frac{7}{9}$, takže je $d < \sqrt{2}$, což jsme měli dokázat.

(Řešil s. Otto Reimer, 2. tř. G, Ivančice.)

3. Zjistěte, který útvar je analyticky vyjádřen vztahem

$$|ax + by| + |y| \leqq c,$$

kde x, y jsou pravoúhlé souřadnice bodu v rovině a a, b, c daná kladná čísla.

Řešení. [1] Je-li $ax + by \geqq 0$, $y \geqq 0$, je příslušná část útvaru trojúhelník, který je průnikem polorovin

$$ax + (b + 1)\,y \leqq c, \quad ax + by \geqq 0, \quad y \geqq 0.$$

Jeho vrcholy jsou body $[0,0]$, $\left[\frac{c}{a}, 0\right]$, $\left[-\frac{bc}{a}, c\right]$.

[2] Podobně pro $ax + by \geqq 0$, $y \leqq 0$ je příslušná část útvaru trojúhelník, který je průnikem polorovin

$$ax + (b - 1)\,y \leqq c, \quad ax + by \geqq 0, \quad y \leqq 0.$$

Jeho vrcholy jsou body $[0,0]$, $\left[\frac{c}{a}, 0\right]$, $\left[\frac{bc}{a}, -c\right]$.

[3] Je-li $ax + by \leqq 0$, $y \geqq 0$, dostaneme příslušnou část útvaru jako útvar souměrný podle počátku souřadnic k trojúhelníku z odst. [2]; vyjde tedy trojúhelník s vrcholy

$$[0,0], \left[-\frac{c}{a}, 0\right], \left[-\frac{bc}{a}, c\right].$$

[4] Je-li konečně $ax + by \leqq 0$, $y \leqq 0$, je příslušná část útvaru trojúhelník souměrný podle počátku souřadnic k trojúhelníku z odst. [1]; jeho vrcholy jsou body $[0,0]$, $\left[-\frac{c}{a}, 0\right]$, $\left[\frac{bc}{a}, -c\right]$.

Celkem tedy dostáváme rovnoběžník s vrcholy

$$\left[\varepsilon\frac{bc}{a}, -\varepsilon c\right], \left[\varepsilon\frac{c}{a}, 0\right], \text{ kde } \varepsilon = \pm 1,$$

souměrný podle počátku souřadnic, neboť žádné dva z trojúhelníků se nepřekrývají, jak vyplývá z jejich analytického vyjádření. Rovnoběžníkem přitom rozumíme všecky body jeho obvodu i vnitřku.

4. Je dán čtyrstěn $VABC$. Označme ϱ rovinu jeho stěny ABC. Uvnitř hran VA, VB, VC zvolme po řadě body X, Y, Z tak, aby rovina σ určená těmito body byla rovnoběžná s rovinou ϱ. Označme dále X_1, Y_1, Z_1 po řadě středy úseček YZ, ZX, XY.

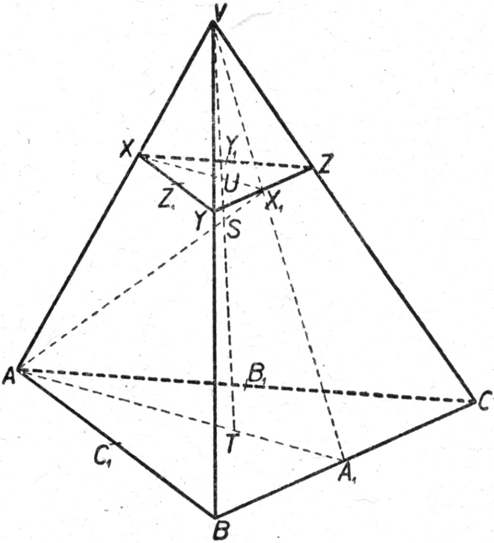
a) Dokažte, že úsečky AX_1, BY_1, CZ_1 mají společný bod S.

b) Co vyplní všechny body S, když bod X probíhá vnitřek úsečky VA?

Řešení (obr. 12). I. Trojúhelníky VYZ, VBC jsou stejnolehlé vzhledem ke středu V stejnolehlosti; konstanta stejnolehlosti je

$$k = \frac{\overline{VY}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{VZ}}{\overline{VC}} = \frac{\overline{VX}}{\overline{VA}} > 0. \tag{1}$$

Proto obrazem bodu X_1 v této stejnolehlosti je střed A_1 úsečky BC, takže body V, X_1, A_1 leží v téže přímce. Úsečka AA_1 prochází těžištěm T trojúhelníka ABC a také úsečka XX_1 prochází těžištěm U trojúhelníka XYZ. Bod U zřejmě leží uvnitř úsečky VT. Úsečky XX_1, AA_1 jsou rovnoběžné a leží v rovině VAA_1, při čemž jsou stejnolehlé vzhledem ke středu V stejnolehlosti. Konstanta stejnolehlosti vzhledem k (1) je $\frac{\overline{VX}}{\overline{VA}} = k$. Obrazem bodu U v této stejnolehlosti je bod T, neboť oba rozdělují po řadě úsečky XX_1, AA_1 v poměru $2:1$; je tedy



Obr. 12.

$$\overline{AA_1} = k \cdot \overline{XX_1}. \tag{2}$$

Polopřímky UX_1, TA jsou zřejmě nesouhlasně rovnoběžné, takže úsečky UT, AX_1 mají společný jediný bod S, který leží uvnitř každé z nich. Úsečky UX_1, TA jsou stejnolehlé ve stejnolehlosti o středu S. Konstanta této stejnolehlosti vzhledem ke (2) je

$$k' = -\frac{\overline{UX_1}}{\overline{TA}} = -\frac{\frac{1}{3}\overline{XX_1}}{\frac{2}{3}\overline{AA_1}} = -\frac{\overline{XX_1}}{2k\overline{XX_1}} = -\frac{1}{2k}.$$

Bod S dělí úsečku UT v úsečky SU, ST, které jsou v poměru $1 : 2k$; takový bod je uvnitř úsečky UT jediný.

Záměnou bodů A, A_1, X_1, Y, Z po řadě za body B, B_1, Y_1, Z, X a dále za body C, C_1, Z_1, X, Y dospějeme k výsledku, že týmž bodem S procházejí také úsečky BY_1, CZ_1. Tím je část a) úlohy dokázána.

II. Obráceně, ke každému bodu S, ležícímu uvnitř úsečky VT (kde T je těžištěm trojúhelníka ABC), dovedeme určit rovinu $\sigma \parallel \varrho$ tak, že její řez s daným čtyrstěnem je podobně jako v textu úlohy trojúhelník XYZ; středy X_1, Y_1, Z_1 jeho stran určují úsečky AX_1, BY_1, CZ_1, které se protínají právě ve zvoleném bodě S.

Důkaz. Zvolme uvnitř úsečky VT bod S a určeme průsečík X_1 polopřímky AS se stranou VA_1 trojúhelníka VAA_1. Bod X_1 leží uvnitř úsečky VA_1, neboť bod S leží uvnitř trojúhelníka VAA_1. Bodem X_1 položme rovinu $\sigma \parallel \varrho$ a označme XYZ řez roviny σ s daným čtyrstěnem stejně jako v textu úlohy. Bod X_1 je středem úsečky YZ, jak plyne ze stejnolehlosti úseček YZ, BC při středu V stejnolehlosti a z toho, že A_1 je střed úsečky BC. Užijeme-li na $\triangle XYZ$ postupu uvedeného v odst. I, při témž významu bodů X_1, Y_1, Z_1 pro trojúhelník XYZ, pak dospějeme právě k danému bodu S jako průsečíku úseček VT, AX_1, BY_1, CZ_1. Tím je konstrukce roviny σ a příslušného trojúhelníka XYZ ke zvolenému bodu S provedena.

D. ÚLOHY II. KOLA, KATEGORIE B.

1. Je dané $n + 1$ kladných čísel nie väčších než jedna. Dokážte, že medzi nimi existujú aspoň dve také, že ich rozdiel má absolútnu hodnotu menšiu než $\frac{1}{n}$, kde n je dané prirodzené číslo.

Řešení. Uvažujme dvě možnosti:

a) Alespoň dvě z daných čísel jsou si rovna. Potom rozdíl těchto dvou čísel je nula a závěr v úloze vyslovený je správný.

b) Nechť žádná dvě z daných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ nejsou sobě rovna. Seřaďme je podle velikosti od nejmenšího k největšímu, takže platí (nejvýše je třeba vhodně zaměnit označení těchto čísel)

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1}.$$

Důkaz provedeme nepřímo. Předpokládejme, že platí

$$a_{k+1} - a_k \geqq \frac{1}{n} \text{ pro } k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

takže potom absolutní hodnota rozdílu kterýchkoli dvou z našich čísel (s různými indexy) jistě nebude menší než $\frac{1}{n}$. Ukážeme, že předpoklad (1) vede ke sporu.

Sečtením všech n vztahů (1) obdržíme $a_{n+1} - a_1 \geqq n \cdot \frac{1}{n}$, neboli $a_{n+1} - a_1 \geqq 1$, t. j.

$$a_{n+1} \geqq 1 + a_1. \tag{2}$$

Podle předpokladu je $a_1 > 0$, takže podle vztahu (2) je $a_{n+1} > 1$. To je spor, neboť podle předpokladu je $a_{n+1} \leqq 1$.

Tím je nepřímý důkaz proveden.

Z výsledku a), b) plyne, že závěr dané úlohy je správný.

(Řešil s. J. Kolář, 2. tř. G, Brno, Křenová ul.)

2. Buďte dány dvě sobě rovné a kolmé úsečky AB, AC. Označme X bod ležící uvnitř úsečky AB a Y bod ležící uvnitř úsečky AC; střed úsečky XY označme Z.

Probíhá-li bod X vnitřek úsečky AB, bod Y vnitřek úsečky AC, patří bod Z určitému geometrickému útvaru, jehož každý bod je střed některé z úseček XY; určete tento útvar.

Řešení. Dokážeme, že [1] všechny body Z (obr. 13) vyhovující úloze leží uvnitř čtverce $ARTS$, kde R, T, S jsou po řadě středy úseček AB, BC, CA a dále, že [2] každý vnitřní bod tohoto čtverce je středem nějaké úsečky XY, kde X je určitý vnitřní bod úsečky AB a Y určitý vnitřní bod úsečky AC.

[1] Zvolíme-li body X, Y po řadě uvnitř úseček AB, AC, potom platí $\overline{AX} < \overline{AB}$, $\overline{AY} < \overline{AC}$. Z toho plyne, že střed M strany AX

trojúhelníka AXY leží uvnitř úsečky AR a že osa strany AX padne celá dovnitř poloroviny RTA (je to střední příčka trojúhelníka AXY příslušná ke straně AY, takže je rovnoběžná s přímkou AY a tím i s přímkou RT). Podobně zjistíme, že osa strany AY leží uvnitř poloroviny STA. Označíme-li Z střed úsečky XY, procházejí jím zřejmě osy stran AX, AY trojúhelníka AXY. Proto bod Z padne dovnitř obou polorovin RTA, STA a dovnitř pravého úhlu CAB (neboť vnitřní body úsečky XY leží uvnitř tohoto úhlu) a tím dovnitř čtverce $ARTS$.

[2] Mějme libovolný vnitřní bod Z čtverce $ARTS$. Protože bod Z má být středem přepony určitého trojúhelníka AXY (kde $\sphericalangle YAX = 90°$), budou bodem Z procházet osy odvěsen AX, AY tohoto trojúhelníka. Veďme bodem Z po řadě kolmice ZM, ZN k přímkám AB, AC a označme po řadě M, N jejich paty. Bod M zřejmě padne dovnitř úsečky AR, neboť bod Z jako bod vnitřku čtverce $ARTS$ leží uvnitř přímého pásu určeného rovnoběžkami AN, RT. Stejně se dokáže, že bod N leží uvnitř úsečky AS. Je tedy

$$\overline{AM} < \overline{AR},\ \overline{AN} < \overline{AS}, \quad \text{kde} \quad \overline{AR} = \overline{AS} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}. \qquad (1)$$

Na polopřímce AB určeme bod X tak, aby bylo $\overline{AX} = 2\overline{AM}$, dále na polopřímce AC bod Y tak, aby bylo $\overline{AY} = 2\overline{AN}$, při čemž vzhledem k vztahům (1) platí

$$\overline{AX} < \overline{AB},\quad \overline{AY} < \overline{AB}.$$

Body X, Y vyhovují tedy podmínkám úlohy, a protože podle odst. [1] osy odvěsen trojúhelníka AXY (kde $\sphericalangle YAX = 90°$) procházejí po řadě body M, N a tím i bodem Z, je Z střed úsečky XY.

Tím je dokázáno, že libovolný vnitřní bod Z čtverce $ARTS$ je středem úsečky XY vyhovující podmínkám úlohy.
(Řešil s. Jiří Vaníček, 1.a tř. G, Praha XI.)

3. Dokážte: Ak pre reálne čísla a, b, c, d platí

$$ac + bd > ad + bc,$$

potom je buď $a > b$, $c > d$ alebo $a < b$, $c < d$. Možno túto vetu obrátiť?

Riešenie. Nerovnosť postupne upravíme:

$$ac + bd > ad + bc, \tag{1}$$
$$ac - ad + bd - bc > 0,$$
$$a(c - d) - b(c - d) > 0,$$
$$(a - b)(c - d) > 0. \tag{2}$$

Výraz (2) má byť kladný. Vznikol ako súčin dvoch činiteľov $a - b$, $c - d$. Ak má byť súčin dvoch činiteľov kladný, je potrebné, aby boly obidva činitele buď kladné alebo obidva záporné. Musí teda platiť naraz buď

$$a - b > 0,\ c - d > 0, \quad \text{t. j.} \quad a > b,\ c > d \tag{3}$$

alebo

$$a - b < 0,\ c - d < 0, \quad \text{t. j.} \quad a < b, \quad c < d,$$

čo sme mali dokázať.

Obrátená veta by znela: Ak platí $a > b$, $c > d$ alebo $a < b$, $c < d$, platí aj $ac + bd > ad + bc$.

Dôkaz prevedieme len pre prípad $a > b$, $c > d$, druhý prípad sa dokáže podobne. Zo vzťahov $a > b$, $c > d$ dostaneme $a - b > 0$, $c - d > 0$, takže tiež $(a - b)(c - d) > 0$, čo je nerovnosť (2), ktorou zpätným postupom k tomu, ktorý je uvedený na začiatku riešenia, upravíme ľahko na tvar (1). Tým je obrátená veta dokázaná.

(Riešil Emil Kovalski, 1.c tr. II.G, Bratislava.)

4. Jsou dány dvě různé rovnoběžky m, n; uvnitř přímého pásu jimi určeného jsou dány dva různé body K, L.

Sestrojte kosočtverec $ABCD$ mající tyto vlastnosti: Body A, B leží na přímce m, body C, D na přímce n, bod K na přímce AD a bod L na přímce BC. Proveďte diskusi.

Řešení. I. *Pomocná poučka*: Jestliže obě dvojice rovnoběžek $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ určených rovnoběžníkem $ABCD$ mají rovné vzdálenosti (velikosti $v > 0$), potom $ABCD$ je kosočtverec (do toho zahrnujeme i čtverec).

II. Předpokládejme, že jsme určili kosočtverec $ABCD$, který má vlastnosti požadované úlohou. Označme v vzdálenost přímek

m, n; ze souměrnosti kosočtverce podle jedné z jeho úhlopříček je i vzdálenost rovnoběžek AD, BC rovna v. Proto kružnice k opsaná kolem bodu K poloměrem v se dotýká přímky BC. Přímka BC je tedy tečnou vedenou bodem L ke kružnici k.

III. *Obráceně*, existuje-li tečna t vedená bodem L ke kružnici k, opsané kolem bodu K poloměrem v (což je vzdálenost daných přímek m, n), pak protíná přímka t přímky m, n po řadě v bodech B, C, které jsou vrcholy hledaného kosočtverce $ABCD$.

Důkaz. Budiž t tečna vedená bodem L ke kružnici k. Nejprve dokážeme, že neplatí $t \parallel m$ (a tím ani $t \parallel n$). Nechť je $t \parallel m$; protože bod L leží uvnitř přímého pásu určeného přímkami m, n, leží přímka t uvnitř tohoto pásu. Pak však vzdálenost bodu K (který také leží uvnitř zmíněného pásu) od přímky t je menší než v (vzdálenost rovnoběžek m, n). To však odporuje předpokladu, že t je tečna kružnice k opsané kolem bodu K poloměrem v. Proto případ $t \parallel m$ nenastane a přímka t protíná obě rovnoběžky m, n po řadě v bodech B, C. Přímka $t' \parallel t$ vedená bodem K protne přímky m, n po řadě v bodech A, D. Je $m \nparallel\!\!= n$, $t \nparallel\!\!= t'$ (tečna t nemůže splynout s přímkou t', která prochází středem kružnice k), takže existuje rovnoběžník $ABCD$. Ale přímky $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ mají rovné vzdálenosti velikosti v, a proto podle pomocné poučky je $ABCD$ kosočtverec.

Odtud plyne bezprostředně řešení úlohy.

Řešitelnost úlohy závisí na existenci tečny t. Řešení je jediné, když bod L padne na kružnici k neboli když $\overline{KL} = v$ (vzdálenosti rovnoběžek m, n); řešení jsou dvě různá, jestliže bod L leží vně kružnice k neboli když $\overline{KL} > v$. Úloha je neřešitelná, jestliže bod L padne dovnitř kružnice k neboli když $\overline{KL} < v$.

E. ÚLOHY III. KOLA, KATEGORIE A.

1. V rovině komplexních čísel určete útvar, který vyplní obrazy čísel Z vyhovujících vztahu

$$Z + \overline{Z} = a \cdot |Z|, \tag{1}$$

kde $\overline{Z}$ je komplexní číslo sdružené s číslem Z a kde a je dané reálné číslo. Proveďte diskusi pro všechny hodnoty čísla a.

Řešení. Obraz čísla Z označme $[Z]$. Položme $|Z| = r$, takže je $Z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $\overline{Z} = r(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$; přitom se omezíme na φ vyhovující vztahu $-\pi < \varphi \leqq \pi$. Vztah (1) lze potom uvést na tvar $2r\cdot\cos\varphi = ar$ neboli

$$r(2\cos\varphi - a) = 0.$$

Odtud plyne: Buď $r = 0$, t. j. $Z = 0$ při každém a. Obráceně pro $Z = 0$ je vztah (1) splněn při každém a. Obrazem je bod $[0]$.

Nebo je $2\cos\varphi - a = 0$ neboli

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}a. \tag{2}$$

Proveďme diskusi pro různé hodnoty a:

[1] Pro $|a| > 2$ nemá vztah (2) reálné řešení, takže vztah (1) je splněn v tomto případě pouze pro $Z = 0$; obrazem tohoto řešení je bod $[0]$.

[2] Pro $|a| = 2$ je řešení vztahu (2) buď $\varphi = 0$ (při $a = 2$) nebo $\varphi = \pi$ (při $a = -2$). Obrazy těchto řešení leží na poloose reálných čísel (včetně bodu $[0]$), a to na kladné poloose pro $a = 2$, na záporné poloose pro $a = -2$. Obráceně se snadno zjistí, že každý bod každé z těchto poloos včetně bodu $[0]$ splňuje vztah (1).

[3] Pro $0 \leqq |a| < 2$ dostáváme ze vztahu (2) dvě různá řešení φ, $-\varphi$, takže včetně bodu $[0]$ má každé řešení vztahu (2) za obraz bod na jedné z obou různých polopřímek OS_1, OS_2, kde O je bod $[0]$ a $S_1 \equiv [\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}]$, $S_2 \equiv [\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}]$; obě polopřímky jsou souměrně sdružené vzhledem k ose reálných čísel.

Obráceně ke každému bodu jedné z těchto polopřímek přísluší komplexní číslo tvaru $Z = [\frac{1}{2}ak, \pm\frac{1}{2}k\sqrt{4 - a^2}]$ pro $k \geqq 0$ a zřejmě splňuje nejen vztah (2), ale i (1).

Shrnutí. Obrazy $[Z]$ komplexních čísel Z, které vyhovují vztahu (1), vyplní v případě, když je

[1] $|a| > 2$ bod $[0]$,

[2] $|a| = 2$ celou poloosu reálných čísel, a to kladnou pro $a = 2$ a zápornou pro $a = -2$.

[3] $0 \leqq |a| < 2$ dvě (celé) různé polopřímky o počátku [0], souměrně sdružené vzhledem k ose reálných čísel; kladná poloosa reálných čísel tvoří s těmito polopřímkami úhly φ, $-\varphi$, kde $\cos(\pm\varphi) = \frac{1}{2}a$. Pro $a = 0$ jsou to obě opačné poloosy imaginárních čísel o společném počátku [0].

2. α, β, γ sú uhly trojuholníka. Dva z nich sú vyjadrené pomocným uhlom φ, takže

$$\alpha = \varphi + \tfrac{1}{4}\pi, \quad \beta = \pi - 3\varphi.$$

Dokážte, že potom platí $\alpha > \gamma$.

Riešenie. I. Je $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) = 2\varphi - \frac{1}{4}\pi$.

Súčasne musí platiť $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, $0 < \gamma < \pi$, t. j. $0 < \varphi + \frac{1}{4}\pi < \pi$, $0 < \pi - 3\varphi < \pi$, $0 < 2\varphi - \frac{1}{4}\pi < \pi$ čiže $-\frac{1}{4}\pi < \varphi < \frac{3}{4}\pi$, $0 < \varphi < \frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{8}\pi < \varphi < \frac{5}{8}\pi$, t. j.

$$\tfrac{1}{8}\pi < \varphi < \tfrac{1}{3}\pi. \tag{1}$$

Pripusťme, že je $\alpha \leqq \gamma$, t. j. $\varphi + \frac{1}{4}\pi \leqq 2\varphi - \frac{1}{4}\pi$. Potom je $\frac{1}{2}\pi \leqq \varphi$, čo je ale spor so vzťahom (1).

(Riešil s. Jozef Gruska, 4.b tr. G, Prievidza.)

Riešenie II. Nech je $\alpha \leqq \gamma$, t. j. $\varphi + \frac{1}{4}\pi \leqq 2\varphi - \frac{1}{4}\pi$, čiže $\frac{1}{2}\pi \leqq \varphi$. Potom je $\alpha \geqq \frac{3}{4}\pi$, $\gamma \geqq \alpha$ čiže $\gamma \geqq \frac{3}{4}\alpha$ a teda $\alpha + \gamma \geqq \frac{3}{2}\pi$, čo je ale spor (súčet uhlov v trojuholníku je π).

(Riešil s. Jiří Lexa, 4. tr. II. G, Bratislava.)

3. Jsou-li čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kladná, platí

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2. \tag{1}$$

Dokažte.

Kdy nastane rovnost?

Řešení. Víme, že pro kladná čísla a_i, a_j platí $\dfrac{a_i}{a_j} + \dfrac{a_j}{a_i} \geqq 2$; rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když $a_i = a_j$.

1. Pro $n = 2$ je $(a_1 + a_2)\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}\right) = 1 + \dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_1} + 1 \geqq 4$.
Rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když $a_1 = a_2$.

2. Platí-li (1) pro nějaké přirozené n, při čemž rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, označme $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = t$ a vztah (1) tedy zní $st \geqq n^2$. Pak

$$(s + a_{n+1})\left(t + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = st + \frac{s}{a_{n+1}} + a_{n+1}\,t + 1 =$$

$$= st + \left(\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1}\right) + \left(\frac{a_2}{a_{n+2}} + \frac{a_{n+1}}{a_2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + 1 \geqq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

neboť každý z výrazů v závorkách je buď větší nebo roven dvěma, při čemž na všech místech nastanou rovnosti, je-li $a_i = a_{n+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah (1) tedy platí pro každé přirozené číslo n a rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Jiné řešení. Provedeme-li násobení na levé straně vztahu (1), dostaneme jednak členy tvaru $\frac{a_i}{a_i} = 1$, jichž je n, jednak členy tvaru $\frac{a_i}{a_j}$ (kde $i \neq j$), jichž je $n^2 - n$. Vzhledem k tomu, že sčítání se řídí zákonem komutativním a asociativním, můžeme psát

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= n + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) + \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}\right) + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}}\right);$$

každý z výrazů v závorkách, jichž je $\frac{1}{2}(n^2 - n)$, není menší než 2, při čemž rovnost na všech místech nastane tehdy a jen tehdy, je-li $a_i = a_j$ pro každé i a každé j. Odtud plyne

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq$$

$$\geqq n + \tfrac{1}{2}(n^2 - n) \cdot 2 = n^2,$$

při čemž rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Jiné řešení. Užitím nerovnosti

$$(b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n)^2 \leqq$$
$$\leqq (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)(c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2),$$

ktorou nejprve dokázal, a potom položil $b_i = \sqrt{a_i}$, $c_i = \dfrac{1}{\sqrt{a_i}}$, úlohu řešil s. Karol Bocek, IV. tř. Polského G, Český Těšín.

4. Sú dané mimobežky a, b, z ktorých je každá rôznobežná s danou rovinou ϱ. Zvoľme bod X na priamke a a bod Y na priamke b tak, aby bolo $XY \parallel \varrho$. Aký geometrický útvar vyplní stred S úsečky XY, ak bod X prebieha priamku a?

Riešenie. Priesečíky priamok a, b s rovinou ϱ označme radom X_0, Y_0, stred úsečky X_0Y_0 označme S_0. Bodom Y_0 veďme priamku $c \parallel a$ a bodom X rovinu $\xi \parallel \varrho$; priesečík roviny ξ s priamkou c označme Z. Ak je $\xi \not\equiv \varrho$, neležia body X, Y, Z na priamke; keby ležaly na priamke, ležaly by body X, Y, Z v rovine rovnobežiek a, c, priamky a, b ležaly by tiež v tejto rovine a neboly by mimobežné. Označme v prípade $\xi \not\equiv \varrho$ stredy úsečiek XZ, YZ radom Q, R a ďalej označme m priesečnicu rovín ϱ, $\sigma \equiv bc$. Obidve roviny majú spoločný bod Y_0, ale nesplynú; preto sú rôznobežné. Podľa známej vlastnosti trojuholníka je $QS \parallel YZ$, $RS \parallel XZ$, podľa vety zo stereometrie je $XZ \parallel X_0Y_0$, $YZ \parallel m$; preto platí $QS \parallel m$, $RS \parallel X_0Y_0$.

Všetky body Q ležia na priamke $d \parallel a$, ktorá patrí rovine rovnobežiek a, c a delí na dve polovice pás roviny nimi obmedzený. Všetky body R patria podľa istej vety z planimetrie priamke e roviny σ, ktorá prechádza bodom Y_0. Bod S teda patrí jednak rovine τ, ktorá obsahuje priamku d a je rovnobežná s priamkou m, a jednak rovine ω, ktorá obsahuje priamku e a je rovnobežná s priamkou X_0Y_0. Roviny τ, ω majú spoločný bod S_0, ale nesplynú, pretože $m \not\equiv X_0Y_0$. Pretnú sa teda v istej priamke s, ktorá prechádza bodom S_0. Je $s \parallel e$, pretože $\tau \parallel \sigma$, a rovina ω pretne teda τ, σ vo dvoch rovnobežkách. Všetky stredy S ležia na priamke s. Priamka s je rôznobežná s rovinou ϱ, pretože má s ňou spoločný bod S_0 a neleží v nej $[m \not\equiv X_0Y_0]$.

Naopak, ak je $S' \not\equiv S_0$ ľubovoľný bod priamky s, vedieme ním rovinu $\xi \parallel \varrho$. Zrejme je $\xi \not\equiv \varrho$ a rovina ϱ pretne priamky a, b radom v bodoch X, Y a podľa odst. a) leží stred S úsečky XY na priamke

s. Priamka s je rôznobežná s rovinou ϱ a teda s rovinou ξ; preto je $S \equiv S'$, čiže každý bod $S' \not\equiv S_0$ priamky s je stredom niektorej úsečky $XY \parallel \varrho$.

Máme výsledok: Hľadaný geometrický útvar je priamka s rôznobežná s rovinou ϱ a zrejme mimobežná s každou z priamok a, b.

Poznámka. Niektorí riešitelia zvolili rovinu ϱ za prvú priemetňu a volili vhodne druhú a tretiu priemetňu. Odtiaľ potom ľahko dokázali, že hľadaný geometrický útvar je priamka.