12. ročník matematické olympiády

III. Přípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 12. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1962-1963. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1964. pp. 26–29.

III. Přípravné úlohy I. kola

1. Kategorie A

1. Určete všecka celá čísla x, y, která vyhovují rovnici

$$(3x+y)(x+y)=p\,,$$

kde p je dané prvočíslo.

2. Určete pět po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti, jejichž součet je $5a$ a součin b^5. Proveďte diskusi.

3. Určete oblast všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice vyhovují nerovnostem

$$2x+y \geqq 2{,}5, \quad \sin(y-x)<0\,.$$

4. Vyjádřete délky úhlopříček tětivového čtyřúhelníku pomocí délek jeho stran. (Použijte kosinové věty.)

5. V rovině je dán svou polohou čtverec $ABCD$ a pevný bod Q, který neleží na obvodu čtverce. Buď P libovolný bod obvodu čtverce. Nad úsečkou QP sestrojme rovnostranný trojúhelník PQR.

Vyšetřte, jaký útvar vyplní body R, když bod P probíhá obvod daného čtverce.

6. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Vyšetřte geometrické místo bodů této krychle, jejichž vzdálenosti od rovin ABC, ABA', ADA' mají součet AB.

2. Kategorie B

1. Vypočtěte kolika nulami končí dekadický zápis čísla 100! (100 faktoriál).

2. Vyšetřte průběh funkce

$$y = x + \sqrt{1 - x^2}$$

a načrtněte její graf. Dokažte, že platí $y \leqq \sqrt{2}$ pro všecka x, pro něž je funkce definována.

3. Určete koeficienty a, b, c, d dvojčlenů $ax + b$, $cx + d$ tak, aby byly splněny zároveň tyto podmínky:

a) $(ax + b)^2 + (cx + d)^2 = x^2 + 1$ pro všecka x;

b) $(ax + b)(cx + d) = 2$ pro $x = 2$.

4. Vyjádřete délky stran pravoúhlého trojúhelníku pomocí jeho obvodu $2x$ a obsahu y^2.

5. Je dán pevný bod A, přímka p a kladné číslo r. Kružnice k prochází bodem A, má poloměr r a tečna směru p se jí dotýká v bodě X. Vyšetřte geometrické místo bodů X.

6. Buďte m, n, p velikosti tří stěnových úhlopříček kvádru, které vycházejí z téhož vrcholu.

Vypočtěte jeho a) objem, b) obsahy stěn, c) rozměry. Diskuse vzhledem k m, n, p.

3. Kategorie C

1. Jestliže přirozené číslo n není dělitelné sedmi, pak jedno z čísel $n^3 + 1$ a $n^3 - 1$ je dělitelné sedmi.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{x + y}{2p + 4} + \frac{y + p^2 - 4}{p^2 - 4} = 1\,,$$

$$(p - 2)^2 x - 2py = 2p^2 x$$

o neznámých x, y, je-li dáno reálné číslo p.

3. Jestliže pro čísla a, b platí $a + b = -5$, potom výraz

$$\left[\frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + 2a^2b + ab^2} + \frac{1}{a + b} - \frac{a^2 - ab - 2b^2}{(a + b)^3}\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{a}{a - b} - \frac{2a}{a^2 - b^2}$$

má pro všechna a, b stále touž hodnotu; stanovte ji.

4. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a přímka p, jejíž vzdálenost od středu S je d. Sestrojte čtverec, jehož jedna strana leží v přímce p a jehož protější strana je tětivou kružnice k. Diskuse.

5. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky p a v něm dvě čtvrtkružnice o středech A, B (A, C jsou krajní body jedné, B, D krajní body druhé). Vypočtěte poloměr x kružnice k, která leží ve čtverci, dotýká se obou čtvrtkružnic a úsečky BC. Potom kružnici k sestrojte.

6. Jsou dány délky a, b odvěsen pravoúhlého trojúhelníku ABC. Osa jeho pravého úhlu protne přeponu v bodě M, kolem něhož opíšeme kružnici $k \equiv (M, x)$ tak, aby se dotýkala obou odvěsen.
Vypočtěte poloměr x této kružnice, délky úseček AM, BM a jejich poměr.

4. Kategorie D

1. Je-li n libovolné přirozené číslo liché, je číslo $(n^2 - 1)(n + 3)$ dělitelné číslem 24; dokažte.

2. Pěticiferné číslo *378*, kde hvězdičky znamenají neznámé cifry, je dělitelné číslem 72. Určete úsudkem a výpočtem chybějící cifry. (Návod: Rozložte 72 v součin dvou nesoudělných čísel.)

3. Dokažte, že hodnota výrazu

$$V = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$(a \neq b; \quad a \neq c; \quad b \neq c)$$

nezávisí na číslech a, b, c.

4. Nádražní chodba dlouhá 42,8 m a široká 9,2 m je vydlážděna čtvercovými dlaždicemi dvojího druhu: strana větší dlaždice je o 10 cm větší než strana menší dlaždice. Obrubu dlažby tvoří jedna řada menších dlaždic; celkem je jich 332. Ostatní část chodby je vydlážděna většími dlaždicemi. Vypočtěte rozměry dlaždic a počet větších dlaždic.

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r = 4 \text{ cm})$. Vepište do ní rovnoramenný lichoběžník tak, aby se z bodů S jevila jeho ramena pod úhlem 90° a aby prodloužená ramena svírala úhel 45°.

6. Jsou dány 3 různé body A, B, C. Narýsujte všecky takové přímky, z nichž každá má od bodů A, B, C stejné vzdálenosti.

Rozhodněte, za kterých podmínek je úloha řešitelná a kolik má řešení.