III. Súťažné úlohy I. kola

1. KATEGÓRIA A

1. Je daná úsečka AB. Množina bodov $\boldsymbol{M}$ je definovaná takto:

a) obsahuje body A, B;

b) ak obsahuje X, Y, obsahuje aj bod Z úsečky XY, pre ktorý platí $YZ = 3 \, . \, XZ$.

Dokážte, že každá úsečka ležiaca v úsečke AB obsahuje aspoň jeden bod množiny $\boldsymbol{M}$.

RIEŠENIE. Z vlastností a) a b) je zrejmé, že množina $\boldsymbol{M}$ obsahuje všetky množiny $\boldsymbol{M}_0$, $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, ..., $\boldsymbol{M}_n$, ... týchto vlastností:

$\boldsymbol{M}_0$ obsahuje len body A, B.

$\boldsymbol{M}_1$ obsahuje okrem bodov A, B také body C, D, pre ktoré platí: $AC = DB = \frac{1}{4} AB$, $CD = \frac{1}{2} AB$.

$\boldsymbol{M}_2$ vytvoríme rovnakým spôsobom z úsečiek AC, DB, CD a patrí do nej desať bodov.

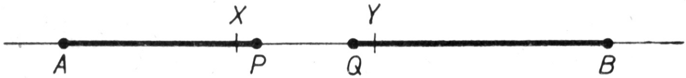
Z $\boldsymbol{M}_2$ vytvoríme analogicky množinu $\boldsymbol{M}_3$, z nej $\boldsymbol{M}_4$, atď.

Dĺžka úsečky s koncovými bodmi z $\boldsymbol{M}_0$ je AB. Najdlhšia z úsečiek s koncovými bodmi z $\boldsymbol{M}_1$, ktorá neobsahuje iné body z tejto množiny, má dĺžku $CD = \frac{1}{2} AB$. Najdlhšia z úsečiek s koncovými bodmi z $\boldsymbol{M}_2$, ktorá nemá iných bodov z $\boldsymbol{M}_2$, má dĺžku $\frac{1}{2} CD = \frac{1}{2^2} AB$. Matematickou indukciou ľahko dokážeme, že najdlhšia z úsečiek, ktorá má s množinou $\boldsymbol{M}_n$ spoločné len koncové body, má dĺžku $\frac{1}{2^n} AB$.

Nech je teraz daná úsečka PQ s dĺžkou $d < 1$ ležiaca v úsečke AB. Predpokladajme, že PQ neobsahuje žiadny bod množiny $\boldsymbol{M}$. Zvoľme n tak, aby platilo

$$\frac{1}{2^n} \cdot AB < d. \tag{1}$$

Keďže PQ podľa predpokladu neobsahuje žiaden bod množiny $\boldsymbol{M}$, neobsahuje ani žiaden bod množiny $\boldsymbol{M}_n$, ktorá je časťou množiny $\boldsymbol{M}$. To znamená, že každý bod množiny $\boldsymbol{M}_n$ patrí buď úsečke AP alebo úsečke BQ (obr. 21).



Obr. 21

Nech je X bod množiny $\boldsymbol{M}_n$ najbližší k bodu P a ležiaci v úsečke AP, Y bod množiny $\boldsymbol{M}_n$ najbližší k bodu Q a ležiaci v úsečke BQ. Body X, Y sú teda dva susedné body množiny $\boldsymbol{M}_n$ a platí pre ne jednak

$$XY \leqq \frac{1}{2^n} AB\ , \tag{2}$$

jednak

$$XY \geqq d. \tag{3}$$

Z nerovností (2), (3) na základe tranzitívnosti relácie usporiadania dostaneme nerovnosť $d \leqq \frac{1}{2^n} \cdot AB$, ktorá je však v spore s nerovnosťou (1).

Tým je tvrdenie dokázané.

2. Dokažte, že všechny nerovnosti

$$\sin x \leqq \sin 2x \leqq \sin 3x \leqq \ldots \tag{1}$$

platí jen pro čísla tvaru $x = k \,.\, \pi$, kde k je celé číslo.

ŘEŠENÍ. a) Pro všechna $x = k\pi$, k celé, jsou všechny nerovnosti zřejmě splněny.

Nechť x je nyní číslo, které není tvaru $k\pi$, k celé, a nechť x vyhovuje všem nerovnostem (1). Potom platí podle (1) pro všechna přirozená n

$$\sin (n + 2)\, x \geqq \sin nx,$$

tj.

$$\sin (n + 2)\, x - \sin nx \geqq 0$$

neboli po úpravě podle vzorce pro rozdíl sinů

$$2 \sin x \cos (n + 1)\, x \geqq 0. \tag{2}$$

b) Dokážeme, že pro každé z, $0 < z < \pi$, existují celá čísla $m_1 \geqq 2$, $m_2 \geqq 2$ tak, že

$$\cos m_1 z > 0, \quad \cos m_2 z < 0. \tag{3}$$

Intervaly $\left(\frac{3\pi}{2z}, \frac{5\pi}{2z}\right)$ a $\left(\frac{5\pi}{2z}, \frac{7\pi}{2z}\right)$ mají oba délku $\frac{\pi}{z} > 1$ a každý z nich tedy obsahuje aspoň jedno přirozené číslo: první z těchto čísel označíme m_1, druhé m_2. Protože je $\frac{\pi}{z} > 1$, je $\frac{3\pi}{2z} > \frac{3}{2}$, $\frac{5\pi}{2z} > \frac{5}{2}$, tj. $m_1 \geqq 2$, $m_2 \geqq 2$. Je tedy

$$\frac{3}{2}\pi < m_1 z < \frac{5}{2}\pi,$$

$$\frac{5}{2}\pi < m_2 z < \frac{7}{2}\pi,$$

takže nerovnosti (3) jsou splněny.

c) Vraťme se k nerovnosti (2). Rozlišujeme dva případy:

A. Je $\sin x > 0$. Potom existuje číslo z, $0 < z < \pi$, tak, že $x = z + 2m\pi$, m celé. Nechť m_2 je celé číslo z nerovnosti (3), pro které je $\cos m_2 z < 0$. Potom je i $\cos m_2 x < 0$ a (2) neplatí pro přirozené $n = m_2 - 1$, což je spor.

B. Je $\sin x < 0$. Potom existuje číslo z, $0 < z < \pi$, tak, že $x = -z + 2m\pi$, m celé. Nechť m_1 je celé číslo z (3), pro které $\cos m_1 z > 0$. Potom je i $\cos m_1 x > 0$ a (2) neplatí pro přirozené $n = m_1 - 1$, což je opět spor.

Tím je dokázáno, že žádné číslo, které není tvaru $k\pi$, k celé, není řešením.

Uvedené řešení je řešení autorské a je dosti umělé, zejména v části b), kde se dokazují pomocné nerovnosti (3). Řešitelé žáci by jistě dovedli nalézt řešení myšlenkově jednodušší, i když třeba delší.

3. Vyšetřte množinu $\boldsymbol{M}$ všech bodů roviny komplexních čísel, jež jsou obrazy komplexních čísel z splňujících nerovnosti:

$$1 < \left| \frac{z}{|z|} + |z| \right| < a\,|z|\,, \tag{1}$$

kde a je kladné číslo. Zjistěte, pro která čísla a je množina $\boldsymbol{M}$ prázdná.

ŘEŠENÍ. Nerovnosti (1) uvedeme násobením kladným číslem $|z|$ (platí totiž $z \neq 0$) na tvar

$$|z| < \left| z + |z|^2 \right| < a\,|z|^2. \tag{2}$$

Dosaďme $z = x + yi$ (x, y reálná); (2) nabude tvaru

$$\sqrt{x^2 + y^2} < |(x + x^2 + y^2) + yi| < a(x^2 + y^2),$$

neboli (po umocnění dvěma)

$$x^2 + y^2 < x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) < \\ < a^2(x^2 + y^2)^2. \tag{3}$$

Levou nerovnost (3) dělíme kladným číslem $x^2 + y^2$ (platí totiž $z \neq 0$) a dostaneme

$$(x + 1)^2 + y^2 > 1. \tag{4}$$

Nerovnost (4) vyjadřuje vnějšek V_1 kružnice k_1 se středem $S_1 \equiv [-1, 0]$ a poloměrem $r_1 = 1$.

Také pravou nerovnost (4) dělíme kladným číslem $x^2 + y^2$; po úpravě vyjde

$$(1 - a^2)(x^2 + y^2) + 2x + 1 < 0. \tag{5}$$

Při vyšetřování nerovnosti (5) rozlišíme tři případy:

1. $a > 1$; 2. $a = 1$; 3. $a < 1$. Jestliže $a > 1$ nebo $a < 1$, vyjadřuje rovnice příslušná k nerovnosti (5) kružnici k_2, která protíná osu x v bodech A, B (AB je průměr), jejichž souřadnice jsou kořeny rovnice

$$(1 - a^2)\,x^2 + 2x + 1 = 0, \tag{6}$$

tj. $A \equiv \left[-\dfrac{1}{1+a};\ 0\right]$, $B \equiv \left[-\dfrac{1}{1-a};\ 0\right]$.

Nerovnost (5) pak vyjadřuje v případě 3 vnitřek $\boldsymbol{V}_2$ kružnice k_2 a v případě 1 vnějšek $\boldsymbol{V}_2'$ kružnice k_2.

Jestliže $a = 1$, vyjadřuje nerovnost (5) vnitřek $\boldsymbol{P}$ poloroviny s hranicí $x = -\dfrac{1}{2}$.

Vyšetřovaná množina je průnik $\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2$ nebo $\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2'$ nebo $\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{P}$.

Zjistíme ještě, pro která a platí, že množina $\boldsymbol{M}$ je prázdná. To může nastat jen v případě 3 a to tehdy, padnou-li oba body A, B na průměr kružnice k_1, omezený body $[-2;\ 0]$, $[0,\ 0]$.

Jestliže $a < 1$, pak $1 + a > 1 - a > 0$, tj.

$$0 > -\frac{1}{1+a} > -\frac{1}{1-a}.$$

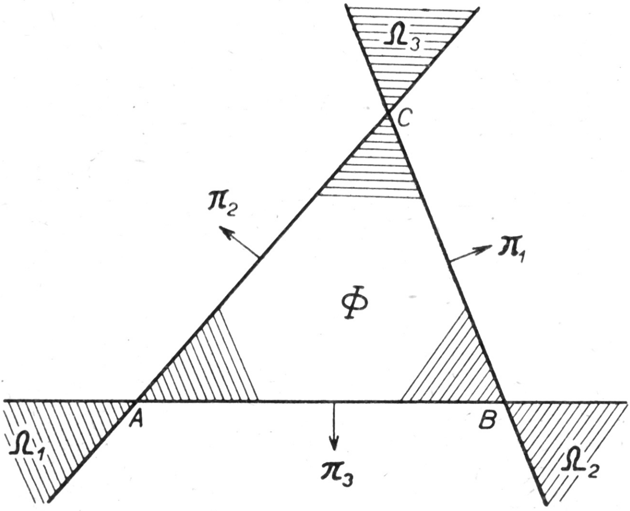
Stačí tedy vyšetřovat podmínku $-\dfrac{1}{1-a} \geqq -2$.

Z této nerovnosti plyne $a \leqq \dfrac{1}{2}$ a naopak.

Výsledek. Vyšetřovaná množina **M** je prázdná právě tehdy, když platí $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$.

4. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Vyšetřte a popište množinu všech přímek x, které procházejí vrcholem D a mají tuto vlastnost: rovnoběžka s přímkou x vedená vhodným vrcholem čtyřstěnu $ABCD$ protne jeho protější stěnu v jejím vnitřním bodě.

ŘEŠENÍ. Obr. 22 znázorňuje situaci v rovině ABC.



Obr. 22

Přímky AB, BC, CA dělí rovinu ABC v sedm částí; jejich vnitřky jsou označeny podle obr. 22: Φ je vnitřek $\triangle\ ABC$, Ω_1, Ω_2, Ω_3 jsou vnitřky úhlů vrcholových k úhlům trojúhelníka ABC, Π_1, Π_2, Π_3 jsou vnitřky zbývajících tří částí (např. Π_1 je průnik vnitřků polorovin ABC, ACB a vnitřku poloroviny opačné k BCA).

Množinu všech přímek DX, které mají požadovanou vlastnost, označme $\mathbf{M}$. Do množiny $\mathbf{M}$ nenáleží žádná z přímek DX, kde X je bod některé z přímek AB, BC, CA, neboť tyto přímky jsou rovnoběžné s některou stěnou čtyřstěnu, a proto rovnoběžka se žádnou z nich vedená vrcholem čtyřstěnu neprotne protější stěnu v bodě jejího vnitřku.

Do $\mathbf{M}$ nenáleží z téhož důvodu žádná přímka procházející vrcholem D a rovnoběžná s rovinou ABC.

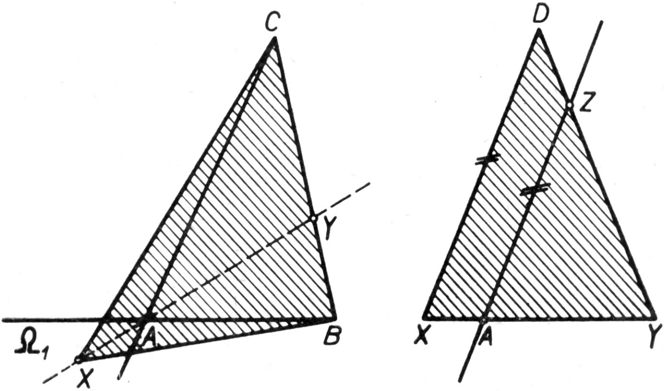
Do množiny $\mathbf{M}$ náleží však každá přímka DX, kde $X \in \Phi$. Zbývá zkoumat přímky DX, kde $X \in \Omega_i$ nebo $X \in \Pi_i$ (i = 1, 2, 3).

a) Budiž nejprve $X \in \Omega_1$. Pak bod A je bodem vnitřku $\triangle\ BCX$, neboť přímka AX protíná vnitřek úsečky BC v bodě Y (obr. 23a). Přímka DX obsahuje hranu DX tetraedru $BCXD$. Rovina DXA protne tetraeder $BCXD$ v trojúhelníku XYD (obr. 23b). Rovnoběžka s přímkou DX vedená bodem A protne stranu DY v bodě Z jejího vnitřku. Bod Z zřejmě náleží vnitřku stěny BCD a bod X náleží tedy množině $\mathbf{M}$.

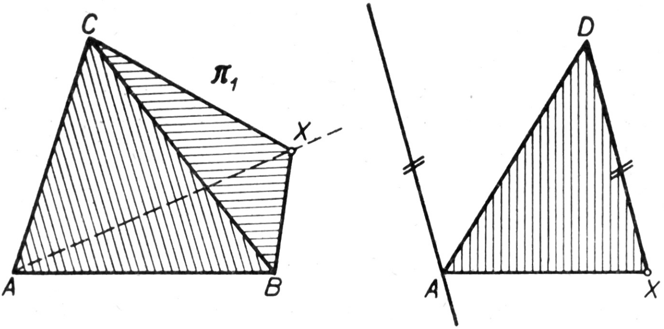
b) Budiž za druhé $X \in \Pi_1$. Pak lze snadno dokázat, že sjednocení trojúhelníků BCA, BCX je konvexní čtyřúhelník $ABXC$ (obr. 24a) a $ABXCD$ je tedy (konvexní) jehlan čtyřboký.

Každá z rovin DXA, DXB, DXC protne tento jehlan v trojúhelníku; na obr. 24b je trojúhelník DXA. Rovnoběžka s přímkou DX vedená bodem A je styčnou přímkou $\triangle\ DXA$ a nemá s ním mimo vrchol A žádný další společný bod. Obdobně tomu je s přímkami, které jsou rovnoběžné s DX a procházejí vrcholy B, C.

Závěr odst. b): Přímka DX nenáleží množině **M**.



a Obr. 23 *b*



a Obr. 24 *b*

Shrnutí: Množina **M** se skládá ze všech přímek DX, kde X náleží sjednocení oblastí Φ, Ω_1, Ω_2 a Ω_3.

1. Pěticiferné číslo N, jehož zápis v desítkové soustavě obsahuje jednu nulu a končí číslicí 1, dává při dělení číslem 43 trojciferný podíl a třikrát za sebou se při algoritmu dělení opakuje týž zbytek. Určete N.

ŘEŠENÍ. Budiž

$$N = 10\,000\,x + 1\,000\,y + 100\,z + 10\,t + 1; \quad (1)$$

zápis čísla N v dekadické soustavě je

$$N = xyzt1.$$

Protože podíl je trojciferný, začínáme při algoritmu dělit od prvního trojčíslí; je tedy

$$100\,x + 10\,y + z = 43\,a + r, \quad (2)$$

kde $1 \leqq a \leqq 9$ (a celé) a $0 \leqq r \leqq 42$ (r celé). Pokračujeme-li v algoritmu dělení, dostaneme podle textu úlohy

$$10r + t = 43b + r, \quad (3)$$

kde $0 \leqq b \leqq 9$ (b celé). Při třetím kroku vyjde

$$10r + 1 = 43c + r, \quad (4)$$

kde platí opět $0 \leqq c \leqq 9$. Odečtením rovnic (3), (4) dostaneme

$$t - 1 = 43(b - c)$$

a odtud plyne (levá strana je násobek čísla 43)

$$t = 1, \qquad b = c. \quad (5)$$

Vypišme násobky čísla 43:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$43\,b$	43	86	129	172	215	258	301	344	387	0
$43b-1$	42	85	128	**171**	214	257	300	343	386	-1

Podle rovností (3) a (5) je číslo $43b - 1$ násobkem devíti, neboť

$$43b - 1 = 9r. \tag{3'}$$

Ježto $0 \leqq b \leqq 9$, vyhledáváme v třetím řádku tabulky násobky devíti; je to jediné číslo $171 = 43 \,.\, 4 - 1$. Platí tedy podle (3′)

$$b = 4, \qquad r = 19. \tag{6}$$

Vypočteme nyní $43a + 19 = 100x + 10y + z$ pro $a = 1, 2, \ldots, 9$; dostaneme tabulku

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$43a$	43	86	129	172	215	258	301	344	387
$43a+19$	62	**105**	148	191	234	277	**320**	363	**406**

Čísla v třetím řádku (počínaje číslem 105, neboť N je pěticiferné) určují cifry x, y, z. Podmínce o nule vyhovují tři čísla 105, 320, 406. Úloha má tedy tři řešení

$$N_1 = 10\,511, \qquad N_2 = 32\,011, \qquad N_3 = 40\,611.$$

O správnosti se přesvědčíme zkouškou.

2. Ak sú α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov ľubovoľného trojuholníka ABC, potom platí

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \leqq \frac{1}{8};$$

dokážte.

RIEŠENIE. Pre tupouhlý alebo pravouhlý trojuholník platí zrejme ostrá nerovnosť v danom vzťahu, pretože súčin na ľavej strane je buď záporný alebo nula.

Uvažujme preto ďalej len o ostrouhlom trojuholníku.

Môžeme predpokladať, že je

$$0^\circ < \gamma \leqq \beta \leqq \alpha < 90^\circ. \qquad (1)$$

V tomto prípade sú všetky čísla $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kladné a menšie než jedna. Špeciálne máme

$$0 < \cos\gamma < 1.$$

Vieme, že pre ľubovoľné α, β platí

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Ak sú α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka (t. j. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$), platí $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$. Teda v trojuholníku platí

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha - \beta) - \cos\gamma]. \qquad (2)$$

Zo vzťahu (1) ľahko usúdime, že platí $0^\circ \leqq \alpha - \beta < 90^\circ$, teda $0 < \cos(\alpha - \beta) \leqq 1$. Z (2) potom vyplýva

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta \leqq \frac{1}{2}\,(1 - \cos\gamma).$$

Pretože $\cos\gamma > 0$, dostaneme stadiaľ $\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \leqq$

$$\leqq \frac{1}{2}\,(\cos\gamma - \cos^2\gamma) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} - \left(\cos\gamma - \frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Platí teda

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \leqq \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(\cos\gamma - \frac{1}{2}\right)^2$$

a teda tým skôr

$$\cos.\ \alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \leqq \frac{1}{8}.$$

Tým je daná nerovnosť dokázaná aj pre ostrouhlý trojuholník.

Rovnosť môže nastať len pre nejaký ostrouhlý trojuholník, a to taký, pre ktorý podľa vzťahu (3) musí byť $\frac{1}{2}\left(\cos\gamma - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, t. j. $\cos\gamma = \frac{1}{2}$ čiže $\gamma = 60°$. Podľa vzťahu (1) však potom v tomto trojuholníku musí byť $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Rovnosť nastane teda len pre rovnostranný trojuholník. Tým je úloha vyriešená.

3. Trojúhelník ABC má tu vlastnost, že kružnice procházející středy jeho stran se dotýká kružnice opsané.

Dokažte, že bod dotyku je jedním vrcholem trojúhelníka ABC a že vnitřní úhel při tomto vrcholu je pravý.

ŘEŠENÍ. Stejnolehlost, která má střed v těžišti T trojúhelníku ABC a koeficient $-\frac{1}{2}$, převede vrcholy trojúhelníka ve středy protějších stran; proto převede výšky trojúhelníku (přímky) v osy stran s nimi rovnoběžné, průsečík výšek V ve střed S kružnice k opsané trojúhelníku ABC. Mimoto převede ovšem střed S kružnice k ve střed S' kružnice k', která prochází středy všech tří stran trojúhelníku ABC.

Dokážeme, že $S \not\equiv T$. Kdyby totiž platilo $S \equiv T$, pak by platilo $S \equiv T \equiv V$, splynuly by osy stran a výšky, trojúhelník ABC by byl rovnostranný, kružnice k' by byla kružnicí jemu vepsanou a kružnice k, k' by neměly dotyk.

Protože $S \not\equiv T$, pak $V \not\equiv T$, $V \not\equiv S$ a také $S' \not\equiv T$, $S' \not\equiv S$. Bod T odděluje jak body V, S, tak body S', S a platí

$$TS = \frac{1}{2} VT, \quad TS = \frac{1}{3} VS, \quad TS' = \frac{1}{2} TS = \frac{1}{6} VS,$$

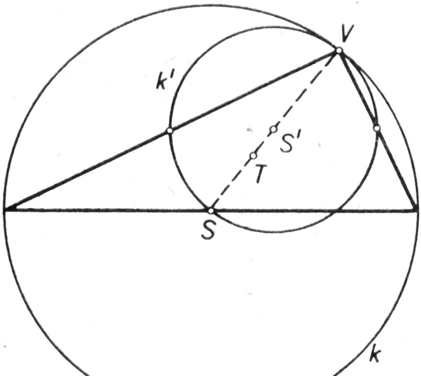
tj.

$$SS' = TS + TS' = \frac{1}{3} VS + \frac{1}{6} VS = \frac{1}{2} VS. \quad (1)$$

Je-li r poloměr kružnice k, je poloměr kružnice k' roven $\frac{1}{2}r$. Protože dotyk kružnic k, k' je zřejmě vnitřní, prochází kružnice k' bodem S, tj. podle (1) $\frac{1}{2}r = SS' = \frac{1}{2}VS$, neboli

$$r = VS.$$

Opsaná kružnice k prochází tedy průsečíkem výšek V. Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu $V \equiv C$. Bodem V zřejmě prochází také kružnice k'; bod V je tedy bodem dotyku obou kružnic k, k' (viz obr. 25).



Obr. 25

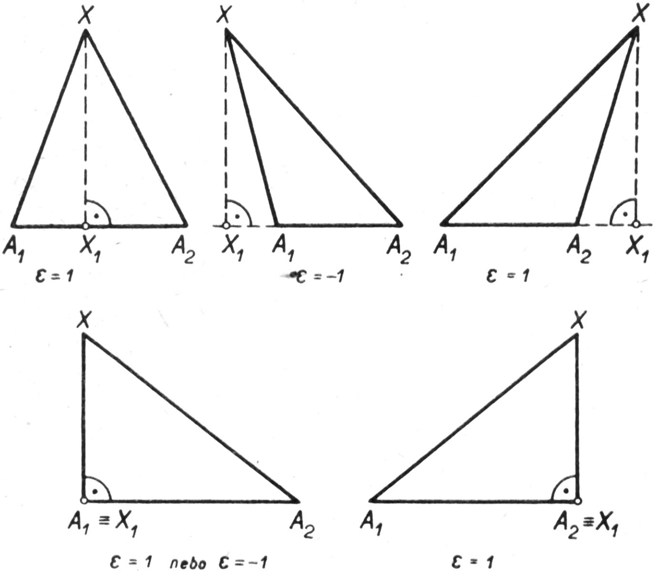
4. V prostoru jsou dány čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4, které neleží v rovině. Je-li X libovolný bod prostoru, označme X_1 patu kolmice spuštěné z X na přímku A_1A_2, X_2 patu kolmice z X na A_2A_3, X_3 patu kolmice z X na A_3A_4, X_4 patu kolmice z X na A_4A_1.

Dokažte, že mezi všemi body X prostoru má střed kulové plochy procházející body A_1, A_2, A_3, A_4 tu vlastnost, že součet

$$(A_1X_1)^2 + (A_2X_2)^2 + (A_3X_3)^2 + (A_4X_4)^2$$

je minimální.

ŘEŠENÍ. Dokažme nejprve *větu*: Je-li X_1 pata kolmice z X na A_1A_2, platí (viz obr. 26 a, b, c, d, e).



Obr. 26

$$(X_1A_1)^2 = \frac{1}{4}(A_1A_2)^2 + \frac{1}{2}[(A_1X)^2 - (A_2X)^2] +$$
$$+ \frac{1}{4(A_1A_2)^2}[(A_1X)^2 - (A_2X)^2]^2. \qquad (1)$$

Důkaz. Podle obr. 26 a, b, c, d, e platí totiž (i když $X \equiv X_1$)

$$(A_1X_1)^2 = (A_1X)^2 - (XX_1)^2,$$
$$(A_2X_1)^2 = (A_2X)^2 - (XX_1)^2.$$

Vhodnými úpravami eliminujeme XX_1, A_1X_1 a A_2X_1; nejprve dostaneme

$$(A_1X_1)^2 - (A_2X_1)^2 = (A_1X)^2 - (A_2X)^2.$$

Dále je pro $\varepsilon = 1$ anebo -1

$$A_2X_1 = |A_1A_2 - \varepsilon A_1X_1|, \text{ tj.}$$
$$(A_2X_1)^2 = (A_1A_2 - \varepsilon A_1X_1)^2, \text{ takže}$$
$$(A_1X_1)^2 - (A_1A_2 - \varepsilon A_1X_1)^2 = (A_1X)^2 - (A_2X)^2,$$
$$2\,\varepsilon\, A_1A_2 \,.\, A_1X_1 - (A_1A_2)^2 = (A_1X)^2 - (A_2X)^2.$$

Odtud ($A_1 \neq A_2$)

$$(A_1X_1)^2 = \frac{1}{4(A_1A_2)^2}\,[(A_1X)^2 - (A_2X)^2 + (A_1A_2)^2]^2,$$

$$(A_1X_1)^2 = \frac{1}{4(A_1A_2)^2}\,\{(A_1A_2)^4 + 2(A_1A_2)^2\,[(A_1X)^2 - {}$$
$${} - (A_2X)^2] + [(A_1X)^2 - (A_2X)^2]^2\}$$

neboli po roznásobení dostaneme vztah (1).

Obdobně platí

$$(X_2A_2)^2 = \frac{1}{4}\,(A_2A_3)^2 + \frac{1}{2}\,[(A_2X)^2 - (A_3X)^2] + {}$$
$${} + \frac{1}{4(A_2A_3)^2}\,[(A_2X)^2 - (A_3X)^2]^2\,,$$

. . . .

$$(X_4A_4)^2 = \frac{1}{4}\,(A_4A_1)^2 + \frac{1}{2}\,[(A_4X)^2 - (A_1X)^2] + {}$$
$${} + \frac{1}{4(A_4A_1)^2}\,[(A_4X)^2 - (A_1X)^2]^2\,.$$

Sečteme-li tyto rovnosti, dostaneme rovnost, kterou označíme (2):

$$(X_1A_1)^2 + (X_2A_2)^2 + (X_3A_3)^2 + (X_4A_4)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}[(A_1A_2)^2 + (A_2A_3)^2 + (A_3A_4)^2 + (A_4A_1)^2] +$$
$$+ \frac{1}{4(A_1A_2)^2}[(A_1X)^2 - (A_2X)^2]^2 + \frac{1}{4(A_2A_3)^2}[(A_2X)^2 -$$
$$- (A_3X)^2]^2 + \frac{1}{4(A_3A_4)^2}[(A_3X)^2 - (A_4X)^2]^2 +$$
$$+ \frac{1}{4(A_4A_1)^2}[(A_4X)^2 - (A_1X)^2]^2.$$

Odtud ihned plyne, že je-li X střed kulové plochy obsahující všecky čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4, je $A_1X = A_2X = A_3X = A_4X$, tj. uvedený součet je roven prvnímu členu na pravé straně (2); pro každý jiný bod je součet vpravo větší.

3. *KATEGÓRIA C*

1. Vyšetrite a načrtnite množinu všetkých bodov v rovine, ktorých pravouhlé súradnice vyhovujú nerovnosti

$$\frac{(x^5 - 13x^3 + 36x)(x^4 - 17x^2 + 16)}{(y^5 - 13y^3 + 36y)(y^4 - 17y^2 + 16)} \geqq 0.$$

RIEŠENIE. Hľadanú množinu označme písmenom $\boldsymbol{M}$. Čitateľa zlomku upravíme na tvar

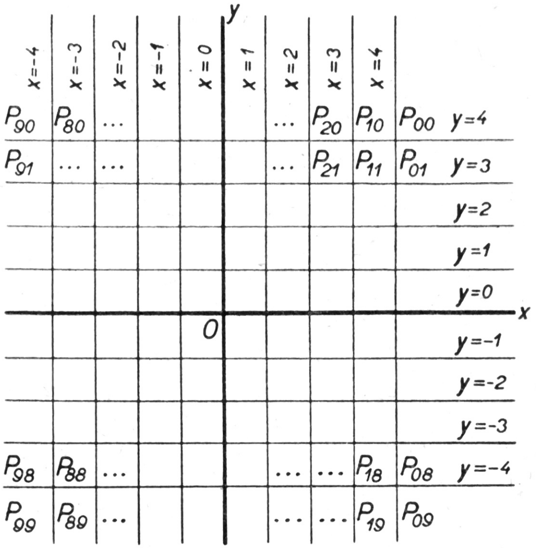
$$x(x^2 - 4)(x^2 - 9)(x^2 - 1)(x^2 - 16) =$$
$$= (x+4)(x+3)(x+2)(x+1)\,x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Dosadením y namiesto x dostaneme tvar menovateľa. Daná nerovnosť je teda ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{f(x)}{f(y)} \geqq 0, \qquad (1)$$

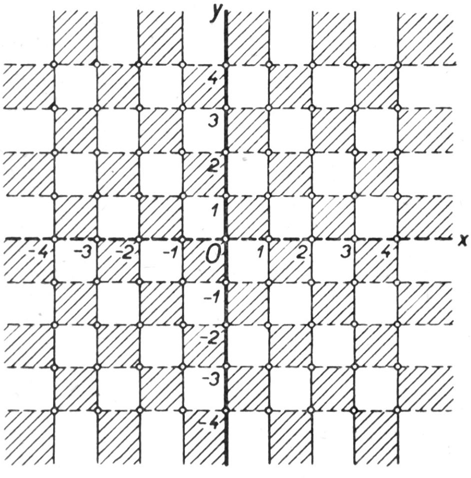
kde $f(x) = (x + 4)(x + 3)(x + 2)(x + 1)x(x - 1) \,.$ $. \,(x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Body priamok $y = q$ ($q = 0$, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4) do množiny $\boldsymbol{M}$ zrejme nepatria, ale body priamok $x = p$ ($p = 0$, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4) okrem bodov prv vylúčených do $\boldsymbol{M}$ patria, ako to vyplýva priamo z tvaru (1).

Spomínané priamky rozdelia rovinu na 100 obrazcov (ohraničených i neohraničených), ktorých vnútra nazveme oblasťami a označíme ich $\boldsymbol{P}_{ab}$ ($a, b = 0, 1, 2, \ldots, 9$) podľa schémy na obr. 27. Vezmime ľubovoľný bod $[x, y] \in \boldsymbol{P}_{ab}$. Potom a je zrejme počet čísel n z množiny $\boldsymbol{N} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, pre ktoré $x - n < 0$ a b je počet čísel m z množiny $\boldsymbol{N}$, pre ktoré $y - m < 0$. Ak je



Obr. 27

$a+b$ párne číslo, je zrejme $\dfrac{f(x)}{f(y)} > 0$ a ak $a+b$ je nepárne číslo, je $\dfrac{f(x)}{f(y)} < 0$. Z toho vyplýva, že **M** je množina bodov $[x, y]$, ktoré sú na obr. 28 vyznačené vyšrafovaním, pričom body vodorovných hraničných čiar do **M** nepatria a body zvislých hraničných priamok okrem priesečníkov s vodorovnými hraničnými priamkami do **M** patria.



Obr. 28

2. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna má střed D a délku 2.

a) Dokažte, že pro každý bod M výšky CD platí

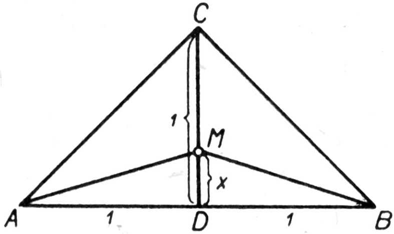
$$AM + BM + CM \geqq 1 + \sqrt{3}. \qquad (1)$$

b) Sestrojte ten bod M výšky CD, pro který je součet $AM + BM + CM$ nejmenší.

ŘEŠENÍ.

a) Označme $DM = x$; pak $CM = 1 - x$ a dále (viz obr. 29)

$$AM + BM + CM = 2\sqrt{1 + x^2} + 1 - x. \qquad (1')$$



Obr. 29

Vzhledem k (1′) stačí dokázat, že platí

$$2\sqrt{1 + x^2} + 1 - x \geqq 1 + \sqrt{3} \qquad (2)$$

pro všecka čísla x, pro něž platí $0 \leqq x \leqq 1$. Z (2) plyne

$$2\sqrt{1 + x^2} \geqq \sqrt{3} + x \qquad (2a)$$

a po umocnění

$$4(1 + x^2) \geqq 3 + 2x\sqrt{3} + x^2, \qquad (2b)$$

neboli

$$3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 \geqq 0, \qquad (2c)$$

neboli

$$3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \geqq 0. \qquad (3)$$

Nerovnost (3) platí pro každé x. Z ní plyne obráceně (2c), z (2c) plyne (2b), z (2b) plyne (2a) — neboť na obou stranách (2a) jsou kladná čísla. Z nerovnosti (2a) plyne (2) a vzhledem k (1′) je tím dokázána nerovnost (1).

b) Jako nejmenší hodnota pro $AM + BM + CM$ přichází podle (1) v úvahu číslo $1 + \sqrt{3}$. Nastane-li tento případ, pak v (3) platí vztah rovnosti, tj.

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{4}$$

V případě, že platí (4), je $AM = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} =$ $= 2DM$. Je tedy $\sphericalangle\, MAD = 30°$. Odtud plyne konstrukce bodu M.

3. Určete délky stran všech pravoúhlých trojúhelníků, které mají tyto vlastnosti:

a) délky stran v centimetrech jsou celá čísla;

b) obvod trojúhelníku v cm je roven obsahu trojúhelníku v cm^2.

ŘEŠENÍ. Označme délky odvěsen hledaného pravoúhlého trojúhelníku v centimetrech a, b a délku jeho přepony v centimetrech c. Podle textu úlohy (podmínka b)

$$\frac{1}{2}\,ab = a + b + c,$$

tj.

$$c = \frac{1}{2}\,ab - a - b. \tag{1}$$

Rovnost (1) umocníme dvěma a dosadíme podle Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$; po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{4}\,a^2b^2 + 2\,ab - a^2b - ab^2 = 0,$$

tj.

$$ab(ab - 4a - 4b + 8) = 0.$$

Protože $a > 0$, $b > 0$, dostaneme po dělení součinem ab

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0,$$

tj.

$$(a - 4)(b - 4) = 8. \qquad (2)$$

Každé z čísel $a - 4$, $b - 4$ je podle (2) dělitelem čísla 8. Sestavíme tabulku:

$a - 4$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$b - 4$	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1
a	5	6	8	12	3	2	0	-4
b	12	8	6	5	-4	0	2	3
c	13	10	10	13	—	—	—	—

Úloha má tedy v podstatě dvě řešení 5 cm, 12 cm, 13 cm, a 6 cm, 8 cm, 10 cm.

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že oba tyto trojúhelníky úloze vyhovují.

JINÉ ŘEŠENÍ. Úlohu lze také řešit *pomocí věty*: Jestliže a, b jsou délky odvěsen a c délka přepony pravoúhlého trojúhelníku, přičemž a, b, c jsou celá čísla, potom existují taková přirozená čísla k, m, n, $m > n$, že platí

$$a = k(m^2 - n^2), \quad b = 2\,kmn, \quad c = k(m^2 + n^2).$$

Zřejmě platí i věta obrácená.

Podle podmínky b) v textu úlohy

$$\frac{1}{2}\,ab = a + b + c.$$

Po dosazení dostáváme

$$k^2mn(m^2 - n^2) = 2km(m + n).$$

Čísla m, k, $m + n$ nemohou být rovna nule, a proto

$$kn(m - n) = 2.$$

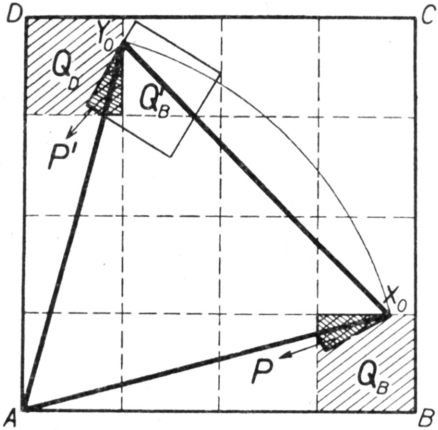
Čísla k, n, $m-n$ jsou přirozená, takže z poslední rovnice plynou tyto tři možnosti:

a) $k = 1$, $n = 1$, $m - n = 2$, tj. $a = 8$, $b = 6$, $c = 10$;

b) $k = 1$, $n = 2$, $m - n = 1$, tj. $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$;

c) $k = 2$, $n = 1$, $m - n = 1$, tj. $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$.

Řešením úlohy jsou tedy trojúhelníky o stranách 5 cm, 12 cm, 13 cm a 6 cm, 8 cm, 10 cm.



Obr. 30

4. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 8 cm, ktorý je rozdelený na spôsob šachovnice na 16 zhodných polí. Zostrojte rovnostranný trojuholník AXY tak, aby vrchol X ležal v rohovom poli pri vrchole B, vrchol Y v rohovom poli pri vrchole D a aby dĺžka jeho strán $AX = XY = YA$ bola čo najväčšia.

RIEŠENIE (obr. 30). Nech je trojuholník AXY taký rovnostranný trojuholník, ktorého vrchol X leží v rohovom poli pri vrchole B a vrchol Y v rohovom poli pri vrchole D. Otočenie $\mathcal{O}$ okolo stredu A o $60°$ v kladnom zmysle prevedie bod X do bodu Y. Otočenie $\mathcal{O}$ prevedie rohový štvorec $\mathbf{Q}_B$ (pozri obr. 30) do rohového štvorca $\mathbf{Q}'_B$. Bod Y patrí do prieniku $\mathbf{P}'$ štvorca $\mathbf{Q}'_B$ a rohového štvorca $\mathbf{Q}_D$.

Prienik $\mathbf{P}'$ je konvexný štvoruholník (na obr. 30 husto vyšrafovaný), ktorého každý bod Y dáva jeden rovnostranný trojuholník AXY. Príslušný vrchol X trojuholníka AXY vznikne otočením bodu Y okolo bodu A o $60°$ v zápornom zmysle a leží teda v konvexnom štvoruholníku $\mathbf{P}$, ktorý vznikne otočením $\mathbf{P}'$ okolo A o $60°$ v zápornom zmysle.

Riešenie úlohy dostaneme, ak za vrchol Y zvolíme ten bod štvoruholníka $\mathbf{P}'$, pre ktorý je vzdialenosť AY maximálna. Je to zrejme jeho vrchol Y_0 (pozri obr. 30).

4. *KATEGORIE D*

1. Mirek dostal za domácí cvičení známou úlohu o nádržce a čtyřech kohoutech, ale marně se snažil ji rozřešit. Úloha zněla:

Prvním a druhým kohoutem nateče dohromady za hodinu p hektolitrů vody; druhým a třetím nateče za hodinu o 30 hl více. Třetím a čtvrtým nateče za hodinu dvakrát více než druhým a třetím dohromady. Prvním a čtvrtým kohoutem nateče za hodinu o 20 hl více než prvním a druhým.

Kolik hl nateče za hodinu každým kohoutem zvlášť? Vyložte, proč Mirek nenašel řešení úlohy.

ŘEŠENÍ. Označíme x, y, z, t počet hektolitrů, který nateče za hodinu po řadě prvním, druhým, třetím a čtvrtým kohoutem; dále označíme p počet hektolitrů, který nateče za hodinu prvním a druhým kohoutem dohromady. Dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= p, \\ y + z &= p + 30, \\ z + t &= 2(p + 30), \\ t + x &= p + 20. \end{aligned} \tag{1}$$

Z prvních dvou rovnic vyloučíme y odečtením; vyjde

$$x - z = -30. \tag{2}$$

Z třetí rovnice (1) a rovnice (2) vyplývá

$$x + t = -30 + 2(p + 30),$$

neboli

$$x + t = 2p + 30. \tag{3}$$

Čísla x a t musí splňovat jak rovnici (3), tak i čtvrtou rovnici (1); to je možné jen tak, že platí

$$2p + 30 = p + 20.$$

Odtud plyne $p = -10$, což je nemožné podle významu čísla p (nemůže být $p < 0$).

INÉ RIEŠENIE (bez použitia sústavy rovníc). Podľa textu úlohy platí:

(1) 1. a 2. kohútikom spolu natečie za 1 hodinu p hektolitrov vody,

(2) 2. a 3. kohútikom spolu natečie za 1 hodinu $p + 30$ hektolitrov vody,

(3) 3. a 4. kohútikom spolu natečie za 1 hodinu $2(p + 30)$ hektolitrov vody,

(4) 1. a 4. kohútikom spolu natečie za 1 hodinu $p + 20$ hektolitrov vody.

Všetkými štyrmi kohútikmi spolu natečie za 1 hodinu

(a) vzhľadom na podmienky (1) a (3) $p + 2(p + 30)$ hektolitrov vody,

(b) vzhľadom na podmienky (2) a (4) $(p + 30) + (p + 20)$ hektolitrov vody.

Ak má úloha riešenie, potom musí teda platiť

$$p + 2(p + 30) = (p + 30) + (p + 20) \text{ čiže}$$

$$3p + 60 = 2p + 50,$$

skadiaľ vyplýva

$$p = -10.$$

Úlohe však môže vyhovovať len $p > 0$. Úloha teda nemá riešenie.

2. Určete čísla a, b tak, aby pro každé libovolně zvolené číslo x platilo

$$\frac{a-b}{a+b}[a(x-a) + b(x-b)] = \frac{x - 2ab(b-a)}{a+b} - \\ - \frac{2}{b-a}. \qquad (1)$$

ŘEŠENÍ. Zlomky v rovnosti (1) mají smysl, jestliže

$$a + b \neq 0, \qquad (2a)$$

$$a - b \neq 0. \qquad (2b)$$

Obě strany rovnosti (1) vynásobme výrazem $(a + b)(a - b)$. Dostáváme

$$(a-b)^2 . [a(x-a) + b(x-b)] = x(a-b) + \\ + 2ab(a-b)^2 + 2(a+b).$$

Po další úpravě

$$(a-b)^2 . [(a+b) . x - (a+b)^2] = x(a-b) + 2(a+b).$$

Výrazy s x převedeme na levou stranu, ostatní na pravou stranu rovnosti

$$x . (a-b) . [(a+b)(a-b) - 1] = \\ = (a+b) . [(a-b)^2 . (a+b) + 2]. \qquad (3)$$

Rovnost (3) bude splněna pro každé x právě tehdy, když bude zároveň platit

$$(a + b) \,.\, [(a + b)(a - b) - 1] = 0, \tag{4}$$

$$(a + b) \,.\, [(a - b)^2 \,.\, (a + b) + 2] = 0. \tag{5}$$

Uvážíme-li platnost vztahů (2a) a (2b), plyne ze (4) a (5)

$$(a + b) \,.\, (a - b) = 1, \tag{4a}$$

$$(a - b)^2 \,.\, (a + b) = -2. \tag{5a}$$

Dosadíme-li (4a) do (5a), máme

$$a - b = -2, \tag{6}$$

což zase dosadíme do (4a) a dostáváme

$$a + b = -\frac{1}{2}. \tag{7}$$

Řešením soustavy rovnic (6) a (7) nalezneme

$$a = -\frac{5}{4}, \quad b = \frac{3}{4}.$$

Zkouška:

$$L = \frac{\frac{-8}{4}}{\frac{-2}{4}} \cdot \left[-\frac{5}{4}\left(x + \frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{4}\right)\right] =$$

$$= 4 \,.\, \left[-\frac{5}{4}x - \frac{25}{16} + \frac{3}{4}x - \frac{9}{16}\right] = -2x - \frac{17}{2},$$

$$P = \frac{x + 2 \,.\, \frac{15}{16} \cdot \frac{8}{4}}{-\frac{2}{4}} - \frac{2}{\frac{8}{4}} = -2 \,.\, \left(x + \frac{15}{4}\right) - 1 =$$

$$= -2x - \frac{17}{2},$$

tedy $L = P$ pro každé x.

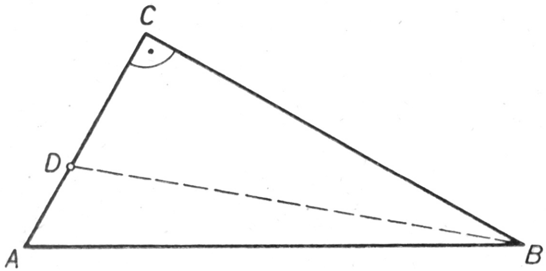
3. Trojuholník ABC je pravouhlý s preponou AB, D je bod vo vnútri odvesny AC.

a) Ak platí $BD^2 = AD \,.\, CD$, potom platí $AD^2 = AB^2 - 3BD^2$. Dokážte.

b) Zistite, či možno vetu a) obrátiť.

RIEŠENIE. a) Nech bod D je vnútorným bodom odvesny AC pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB (obr. 31) a nech platí

$$BD^2 = AD \,.\, CD. \tag{1}$$



Obr. 31

Podľa Pythagorovej vety pre trojuholník ABC platí

$$AB^2 = (AD + CD)^2 + BC^2. \tag{2}$$

Podobne pre trojuholník BCD platí

$$BD^2 = CD^2 + BC^2. \tag{3}$$

Ak upravíme vzťah (2), dostaneme $AB^2 = AD^2 + 2AD \,.\, CD + (CD^2 + BC^2)$. Ak dosadíme do poslednej rovnosti za $AD \,.\, CD$ podľa vzťahu (1) a za $(CD^2 + BC^2)$ podľa vzťahu (3), dostaneme $AB^2 = AD^2 + 2BD^2 + BD^2$, skadiaľ už vyplýva $AD^2 = AB^2 - 3BD^2$. Tým je veta a) dokázaná.

b) Nech D je taký vnútorný bod odvesny AC pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB, že preň platí $AD^2 = AB^2 - 3BD^2$ čiže $3BD^2 = AB^2 - AD^2$.

Z poslednej rovnosti po dosadení za AB^2 zo vzťahu (2) vyplýva

$$3BD^2 = (AD + CD)^2 + BC^2 - AD^2,$$

skadiaľ po úprave

$$3BD^2 = 2AD \cdot CD + (CD^2 + BC^2)$$

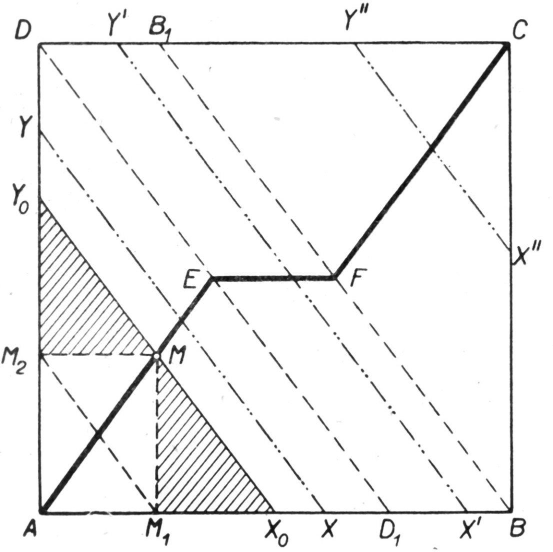
a vzhľadom na vzťah (3) z poslednej rovnosti dostaneme

$$BD^2 = AD \cdot CD.$$

Vetu a) je teda možno obrátiť.

4. Je dán čtverec, jehož strana má délku 6 cm. Bod M má od dvou sousedních stran čtverce vzdálenosti 15 mm a 20 mm.

Sestrojte lomenou čáru procházející bodem M, která se



Obr. 32

skládá ze středů všech úseček XY navzájem rovnoběžných, jejichž krajní body leží na obvodu daného čtverce. Vypočtěte její délku.

ŘEŠENÍ. Sestrojme čtverec $ABCD$ o straně 6 cm. Nechť bod M má vzdálenost 20 mm od strany AB a 15 mm od strany AD (viz obr. 32).

Bod M sám musí být středem jedné takové úsečky XY, o nichž mluví text úlohy, a proto bod M musí být vnitřním bodem čtverce $ABCD$.

Nejdříve budeme řešit *dílčí úlohu*:

Na obvodu čtverce $ABCD$ sestrojte body X_0, Y_0 tak, aby bod M byl středem úsečky X_0Y_0.

Jsou-li X_0, Y_0 takové body, potom

a) neleží na téže straně čtverce $ABCD$, neboť bod M je vnitřním bodem čtverce $ABCD$;

b) neleží na rovnoběžných stranách čtverce $ABCD$, neboť bod M neleží ani na jedné ze středních příček čtverce $ABCD$;

c) neleží na stranách AB a BC, BC a CD, neboť M je vnějším bodem trojúhelníku ABC a trojúhelníku BCD.

Zbývají tedy dvě možnosti: X_0 a Y_0 leží po řadě na stranách AB a AD nebo AD a DC.

Uvažujme případ, že X_0 je bodem strany AB a Y_0 je bodem strany AD. Označme M_1 patu kolmice spuštěné z bodu M na AB a M_2 patu kolmice spuštěné z bodu M na AD. Potom zřejmě X_0 je bodem úsečky M_1B a Y_0 je bodem úsečky M_2D. Platí

$$\triangle M_1X_0M \cong \triangle M_2MY_0, \qquad (1)$$

neboť oba trojúhelníky jsou pravoúhlé, $\sphericalangle M_1X_0M = \sphericalangle M_2MY_0$ a $X_0M = MY_0$. Tudíž platí

$$M_1X_0 = 15 \text{ mm}, M_2Y_0 = 20 \text{ mm}. \qquad (2)$$

Vzhledem k tomu, že strana čtverce $ABCD$ má délku

6 cm, body X_0, Y_0 splňující podmínky (2) leží uvnitř úseček M_1B a M_2D, tj. na obvodu čtverce $ABCD$.

Jsou-li X_0 a Y_0 body ležící po řadě na úsečkách M_1B, M_2D, přičemž splňují podmínky (2), pak platí (1) a tudíž M je středem úsečky X_0Y_0.

Uvažujeme-li možnost, že X_0, Y_0 leží po řadě na stranách AD, DC, potom stejnou úvahou, jaká byla právě užita pro strany AB a AD se zjistí, že takové body X_0 a Y_0 na obvodu čtverce $ABCD$ neexistují.

Řešením dílčí úlohy máme určen směr úseček XY.

Veďme rovnoběžky s úsečkou X_0Y_0 vrcholy D a B. Označme body D_1 a B_1 dle obrázku. Nechť E je střed úsečky DD_1 a F je střed úsečky BB_1. Hledaná lomená čára je $AEFC$, neboť

1. AE je těžnice $\triangle AD_1D$, tj. je množinou středů všech úseček $XY \parallel D_1D$, jejichž krajní body leží na straně AD_1 a na straně AD (dokáže se z podobnosti $\triangle AD_1D \sim \triangle AXY$);
2. EF je střední příčka rovnoběžníku D_1BB_1D, a je tedy množinou středů všech úseček $XY \parallel DD_1$, jejichž krajní body leží na stranách D_1B a DB_1;
3. FC je těžnice $\triangle BCB_1$ a je tedy množinou středů všech úseček $XY \parallel BB_1$, jejichž krajní body leží na stranách BC a B_1C.

Zbývá určit délku lomené čáry $AEFC$. Bod F leží na střední příčce čtverce $ABCD$, a proto $FC = FB$. Čtyřúhelník D_1BFE je rovnoběžník, tj. $FC = FB = ED_1$. Trojúhelník AD_1D je pravoúhlý, E je střed jeho přepony, a proto $DE = AE$. Z předchozích úvah plyne, že

$$AE + FC = DD_1.$$

Délku úsečky DD_1 určíme pomocí podobnosti $\triangle M_1X_0M \sim \triangle AD_1D$.

Platí

$$DD_1 = MX_0 \, . \, \frac{DA}{MM_1} = 3 \, . \, MX_0 \, .$$

Užijeme-li Pythagorovy věty pro $\triangle\ M_1X_0M$, dostáváme, že $MX_0 = 2{,}5$ cm, tj.

$$DD_1 = AE + FC = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Čtyřúhelník D_1BFE je rovnoběžník, tj.

$$EF = D_1B;$$

dále platí

$$D_1B = AB - AD_1.$$

Z podobnosti trojúhelníků M_1X_0M a AD_1D plyne, že

$$AD_1 = 1{,}5 \, . \, \frac{6}{2} \text{ cm} = 4{,}5 \text{ cm},$$

tj.

$$EF = 1{,}5 \text{ cm}.$$

Délka lomené čáry $AEFC$ je $(7{,}5 + 1{,}5)$ cm $= 9$ cm.