20. ročník matematické olympiády

II. Prípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 20. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1970-1971. 13. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972. pp. 24–46.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404611

II. Prípravné úlohy I. kola

1. RIEŠENIA ÚLOH KATEGÓRIE A

1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n) + \frac{n-1}{x(x+n-1)},$$

kde $n \geqq 2$ je dané prirodzené číslo a x je neznáma.

RIEŠENIE. Pre každé $x \neq 0, -1, -2, \dots, -(n-1)$ platí

$$\frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x+i+1} \qquad (i = 0, 1, \dots, n-2),$$

takže

$$\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n-1} = \frac{n-1}{x(x+n-1)}.$$

Pre hľadané čísla x teda platí

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n) = 0.$$

Z koreňov tejto rovnice vyhovuje však danej rovnici len $x = -n$. Úloha má teda jediné riešenie $x = -n$.

POZNÁMKA. Uvedené riešenie zostane v platnosti dokonca i v obore komplexných čísel.

2. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, které splňují soustavu rovnic

$$\cos x + \cos y = \cos (x + y),$$
$$\sin x + \sin y = \sin (x + y).$$

ŘEŠENÍ. Druhou rovnici ekvivalentně upravíme

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

$$\sin \frac{x+y}{2}\left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2}\right) = 0,$$

$$\sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{y}{2} = 0.$$

Tato rovnice je splněna právě tehdy, nastane-li některý ze tří případů

$$\left.\begin{array}{lll} [1] & \dfrac{x+y}{2} = k\pi, & \text{tj. } x + y = 2k\pi; \\[2ex] [2] & \dfrac{x}{2} = k\pi, & \text{tj. } x = 2k\pi; \\[2ex] [3] & \dfrac{y}{2} = k\pi, & \text{tj. } y = 2k\pi. \end{array}\right\} \text{všude } k \text{ je celé číslo.}$$

Každou z těchto možností dosadíme do prvé rovnice.
[1] Je-li $y = -x + 2k\pi$, pak dostáváme

$$\cos x + \cos (-x + 2k\pi) = \cos 2k\pi,$$
$$2 \cos x = 1,$$
$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

Odtud nalézáme řešení (x_1, y_1) a (x_2, y_2), kde

$$x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad y_{1,2} = \mp\frac{\pi}{3} + 2l\pi\,,$$

přičemž k, l jsou libovolná celá čísla.

[2] Zde máme

$$\cos 2k\pi + \cos y = \cos(y + 2k\pi),$$

čili

$$1 = 0,$$

což však není možné. Podobně ani [3] nevede k řešení.

ZÁVĚR. Hledaná čísla x, y jsou právě tato:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad y = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$$

a

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad y = \frac{\pi}{3} + 2l\pi\,,$$

kde k, l jsou libovolná celá čísla.

3. Označme T těžiště ostroúhlého trojúhelníka ABC, r poloměr kružnice jemu opsané. Pak platí

$$AT^2 + BT^2 + CT^2 > \frac{8}{3}r^2\,.$$

Dokažte.

ŘEŠENÍ. Při obvyklém označení máme s použitím kosinové věty:

$$t_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2\,,$$

$$t_b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2) - \frac{1}{4}b^2\,,$$

$$t_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}\,a^2 .$$

Sečtením dostaneme

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) .$$

Poněvadž

$$\sigma = AT^2 + BT^2 + CT^2 = \frac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) ,$$

platí

$$\sigma = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) .$$

Jak známo $a = 2r \sin \alpha$ atd., tedy

$$\sigma = \frac{4}{3}\, r^2 \,(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) .$$

Nyní provedeme výpočet

$$\begin{aligned}
&2\,(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) = \\
&= 3 - (\cos 2\,\alpha + \cos 2\,\beta + \cos 2\,\gamma) = \\
&= 3 - [2 \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + \cos 2\,(\alpha + \beta)] = \\
&= 3 - [2 \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + 2 \cos^2 (\alpha + \beta) - 1] = \\
&= 4 - 2 \cos (\alpha + \beta)\,[\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)] = \\
&= 4 - 2 \cos (\alpha + \beta)\,.\,2 \cos \alpha\,.\,\cos \beta\,, \text{ tj.}
\end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha\,.\,\cos \beta\,.\,\cos \gamma\,.$$

Poněvadž trojúhelník je ostroúhlý, platí

$$\cos \alpha\,.\,\cos \beta\,.\,\cos \gamma > 0 ,$$

takže

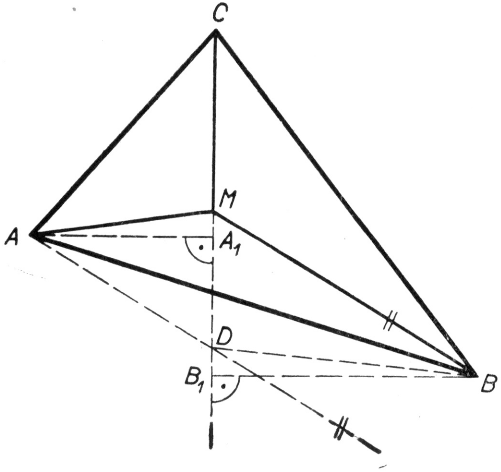
$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2 .$$

Nakonec vychází $\sigma > \frac{8}{3}\, r^2$, c. b. d.

4. Nech M je vnútorný bod trojuholníka ABC a p_A, p_B, p_C sú v uvedenom poradí plošné obsahy trojuholníkov BCM, CAM, ABM. Potom platí

$$p_A\overrightarrow{MA} + p_B\overrightarrow{MB} + p_C\overrightarrow{MC} = \vec{o},$$

kde $\vec{o}$ je nulový vektor. Dokážte!



Obr. 1

RIEŠENIE. Veďme bodom A rovnobežku s priamkou MB a označme D jej priesečník s priamkou MC. Potom zrejme platí (obr. 1)

$$\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}, \qquad \overrightarrow{DM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MC}\ ^{*})$$

a ďalej

*) Symbol $\uparrow\uparrow$ označuje súhlasnú rovnobežnosť vektorov (orientovaných úsečiek).

$$\frac{AD}{MB} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{\frac{1}{2}MC \,.\, AA_1}{\frac{1}{2}MC \,.\, BB_1} = \frac{p_B}{p_A},$$

kde A_1, resp. B_1 je päta kolmice spustenej z bodu A, resp. B na priamku CM. Máme teda

$$\overrightarrow{AD} = \frac{p_B}{p_A} \,.\, \overrightarrow{MB} \,. \tag{1}$$

Ďalej platí

$$\frac{DM}{MC} = \frac{\frac{1}{2}DM \,.\, BB_1}{\frac{1}{2}MC \,.\, BB_1} = \frac{\text{obsah } \triangle\ DBM}{\text{obsah } \triangle\ MBC} = \frac{p_C}{p_A}.$$

Vzhľadom na to, že $AD \parallel MB$, je totiž obsah $\triangle\ DBM = p_C$. Z poslednej rovnosti máme

$$\overrightarrow{DM} = \frac{p_C}{p_A} \cdot \overrightarrow{MC} \,. \tag{2}$$

Použitím výsledkov (1), (2) dostávame

$$p_A \,.\, \overrightarrow{MA} + p_B \,.\, \overrightarrow{MB} + p_C \,.\, \overrightarrow{MC} =$$
$$= p_A \left(\overrightarrow{MA} + \frac{p_B}{p_A}\overrightarrow{MB} + \frac{p_C}{p_A}\overrightarrow{MC} \right) =$$
$$= p_A \,(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) = p_A \,.\, \vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{o}},$$

čo sme mali dokázať.

2. *KOMENTÁŘE A ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE B*

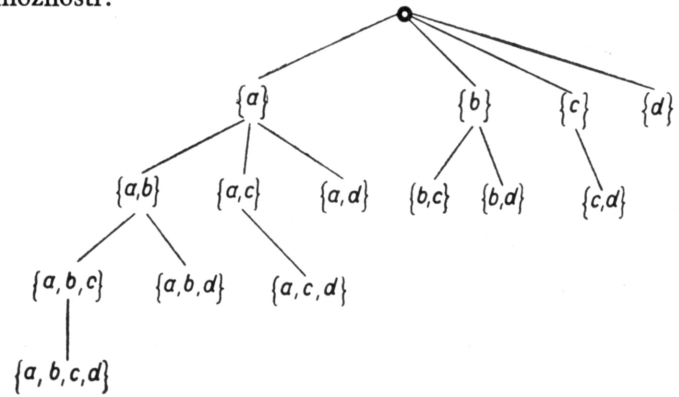
(Komentáře byly určeny hlavně pro žáky 1. ročníků gymnasií a středních odborných škol.)

1. Kolik neprázdných podmnožin má množina skládající se z deseti prvků?

KOMENTÁŘ. Je to vlastně úloha z kombinatoriky, kterou žáci 1. a 2. ročníků gymnasií neznají. Tuto úlohu by hravě rozřešili žáci pokusných ZDŠ, kde se kombinatorika probírá (v omezeném rozsahu) už v 7. ročníku. Úlohu lze nejpohodlněji rozřešit vtipným obratem, který souvisí s dvojkovou soustavou. Než však tento obrat prozradíme, necháme vás experimentovat: vyhledat všechny neprázdné podmnožiny tříprvkových, čtyřprvkových a pětiprvkových množin. Do vypsání podmnožin je třeba ovšem vnést určitý systém, opírající se třeba o uspořádání prvků. Tak např. při čtyřprvkové množině **M** $= \{a, b, c, d\}$ postupujeme takto: podmnožiny budeme zapisovat tak, aby prvky každé podmnožiny byly v abecedním pořádku. Dostaneme tak výčet:

$\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{b\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{c\}$, $\{c, d\}$, $\{d\}$.

Dobře se znázorní podmnožiny na tzv. stromu logických možností:



V grafu chybí podmnožina {b, c, d}. Doplňte ji.

Počty neprázdných množin se zapíší do tabulky:

Počet prvků v **M**	1	2	3	4	5
Počet jejích neprázdných podmnožin	1	3	7	15	31

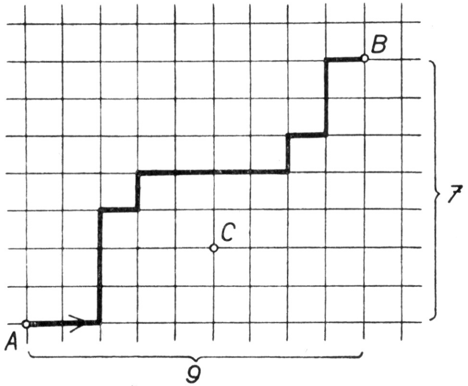
Nyní pravděpodobně vyslovíte domněnku, že hledaný počet podmnožin je $2^n - 1$, kde n je počet prvků množiny **M**.

A nyní „trik", který dovolí přehledně registrovat všechny podmnožiny množiny **M**. Zapíšeme prvky z **M**

$$a \ b \ c \ d$$

a pod každý z nich zapíšeme buď 0, jestliže tento prvek *nenáleží* dané podmnožině, nebo 1, *náleží-li* jí. Podle této úmluvy jsou např. podmnožiny $\{a, c\}$, $\{b, c, d\}$ charakterizovány čtveřicemi 1010 a 0111. Nyní už snadno sami vypočítáte počet všech n-tic složených z nul a jedniček; je jich $\underbrace{2.2.\ldots.2}_{n\text{-krát}} = 2^n$. Ale n-tice složená vesměs z nul je vyloučena (proč?).

Můžete rozřešit ještě nějakou úlohu, kde se uplatní obdobně dvojková soustava. Např. v čtvercové síti se má „projít" po stranách čtverců z vrcholu A do vrcholu B (viz obr. 2). Je dovoleno postupovat jen zleva doprava a zdola nahoru. Otázka zní: Kolik je možných různých cest z A do B? Postup o jednu stranu doprava zapíšeme znakem 0, postup o jednu stranu nahoru znakem 1. Tlustě vytažená cesta je registrována zápisem 001110100 0010110. Každý zápis musí obsahovat 16 znaků, z toho 9 nul a 7 jedniček (proč?). Tato úloha je ovšem podstatně těžší než daná úloha o podmnožinách, neboť je ještě třeba uvažovat všechna možná umístění nul a jedniček. Situace se zjednoduší, zvolíme-li místo čísel 9, 7 menší přirozená čísla, např. 4, 3 apod. „Cestám" můžeme pře-



Obr. 2

depsat další podmínku, např. aby procházely daným bodem C apod. Jak je vidět, nejde tu o jednotlivou úlohu, ale o celý komplex úloh, čili o tzv. *problémovou situaci*.

ŘEŠENÍ. Každou podmnožinu $\mathbf{A}$ dané množiny $\mathbf{M}$ můžeme jednoznačně určit tím, že každému jejímu prvku přiřadíme 1, zatímco ostatním prvkům z $\mathbf{M} \setminus \mathbf{A}$ přiřadíme 0. Počet všech podmnožin naší množiny je tedy $2^{10} = 1024$; neprázdných je o jednu méně, tj. 1023.

2. Najděte všechny trojčlenné aritmetické posloupnosti prvočísel s diferencí 1970.

KOMENTÁŘ. Tato úloha vyžaduje elementární znalosti z teorie čísel. Pravděpodobně bude třeba vysvětlit nejdříve název „trojčlenná aritmetická posloupnost“, což dává příležitost vyslovit obecnou definici aritmetické posloupnosti; je to věc zcela přístupná, ilustrujeme-li ji několika příklady.

První impuls pro řešení bude asi tento: Zapíšeme trojčlennou aritmetickou posloupnost

$$x,\ x + d,\ x + 2d$$

a budeme ji zkoumat (pokud jde o dělitelnost jejích členů), a to ve dvou případech:

a) diference *d* **e** násobkem tří;
b) diference *d* **není** násobkem tří.

Výsledky zkoumání se zapisují do tabulky tohoto tvaru:

				↓			↓
d	4	5	7	3	2	10	6
x	5	2	1	11	31	67	**3**
$x + d$	**9**	7	8	14	**33**	77	**9**
$x + 2d$	13	**12**	**15**	17	35	**87**	**15**

Co vypozorujeme a jakou domněnku vyslovíme? Je-li diference *d* násobek tří, pak posloupnost buď neobsahuje žádný násobek tří (sloupec 4), nebo obsahuje samé násobky tří (sloupec 7). **Není-li diference *d* násobkem tří, pak aspoň jeden člen posloupnosti je násobkem tří,** a tedy není prvočíslem, pokud je větší než 3.

Číslo 1970 = 3 . 656 + 2 **není násobkem tří.** Je-li správná výše vyslovená domněnka, pak hledaná posloupnost musí obsahovat číslo 3 a jediná možnost je

$$3, \quad 1973, \quad 3943.$$

Je ovšem ještě třeba:

a) zjistit z tabulek (nebo jinak), zda čísla 1973, 3943 jsou prvočísla;

b) dokázat vyslovenou domněnku.

Úkol b) splníme tak, že čísla d, x rozložíme vzhledem k číslu 3; je tedy

$$x = 3y, \text{ nebo } x = 3y + 1 \text{ nebo } x = 3y + 2,$$
$$d = 3k + 1 \text{ nebo } d = 3k + 2;$$

(d není násobek tří!). Ve všech čtyřech případech, kdy x není násobkem tří, vypočteme $x + d$ a $x + 2d$. Např. pro $x = 3y + 1$, $d = 3k + 2$ dostaneme

$$x + d = 3(y + k) + 3 = 3(y + k + 1),$$
$$x + 2d = 3(y + 2k) + 5.$$

Číslo $x + d$ je skutečně násobkem tří.

Za nejpodstatnější impuls zde pokládáme výzvu k experimentování, které vede po sestavení přehledné tabulky k vyslovení hypotézy.

ŘEŠENÍ. Snadno nahlédneme, že z čísel

$$p, \quad p + 1970, \quad p + 2 \,.\, 1970$$

je vždy jedno dělitelné třemi. Nutně tedy $p = 3$ a dostáváme jediné řešení: 3, 1973, 3943 (viz tabulky).

3. Nájdite množinu všetkých bodov, ktorých pravouhlé súradnice x, y splňujú sústavu nerovníc

$$|x| \leqq 2\pi, \quad |y| \leqq 2\pi,$$
$$\operatorname{tg} x \geqq 0, \ \operatorname{tg}\left(y - \frac{x^2}{4}\right) \geqq 0.$$

KOMENTÁŘ. Tato úloha je převážně počtářská; k jejímu řešení je třeba znát definici goniometrických funkcí pro všechna reálná čísla x.

Rada, kterou dáváme řešitelům, je tato: Vyšetřte odděleně každou z množin bodů s analytickým vyjádřením

a) $|x| \leqq 2\pi$, b) $|y| \leqq 2\pi$,

c) $\operatorname{tg} x \geqq 0$, d) $\operatorname{tg}\left(y - \frac{x^2}{4}\right) \geqq 0$

a pak stanovte průnik všech čtyř množin bodů.

Případy a) a b) jsou triviální, rovněž i případ c); případ d) je nejobtížnější. Zde je třeba zjistit, že daná nerovnice je ekvivalentní s nerovnicemi

$$k\pi \leqq y - \frac{x^2}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

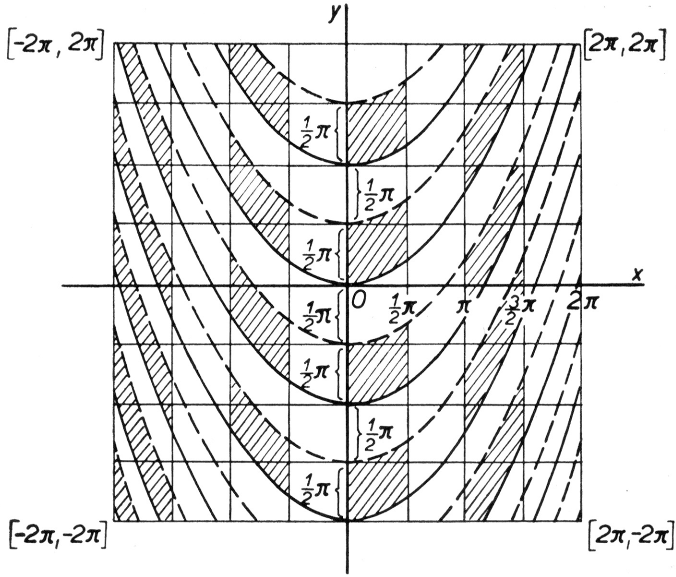
A pak je třeba probrat všechna celá čísla k, která přicházejí v úvahu; dostaneme tak zakřivené „pásy" omezené parabolami (pozor na hranici!). Výsledek se dostane jako průnik pásů roviny s těmito zakřivenými pásy. Celý graf leží ve čtverci, jehož vrcholy jsou $[\pm 2\pi, \pm 2\pi]$.

Úloha je pracná, vyžaduje pozornost, ale je v podstatě bez vtipu; je určena jako záchytná úloha. Lze ji však modifikovat: Nerovnici a) nahradíme nerovnicí $|x| \leqq \frac{\pi}{2}$, nerovnice b), c) vypustíme a nerovnici d) nahradíme nerovnicí

$$0 \leqq \operatorname{tg}\left(y - \frac{x^2}{4}\right) \leqq 1.$$

RIEŠENIE (obr. 3). Riešenie nerovnice $\operatorname{tg} x \geqq 0$ tvorí polopásy

$$k\pi \leqq x < k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \text{ celé číslo}). \qquad (1)$$



Obr. 3

Riešenie nerovnice tg $\left(y - \dfrac{x^2}{4}\right) \geqq 0$ tvorí polopásy s parabolickými hranami

$$\frac{x^2}{4} + k\pi \leqq y < \frac{x^2}{4} + k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \text{ celé číslo}). \qquad (2)$$

Hľadaná množina sa skladá práve z tých bodov štvorca

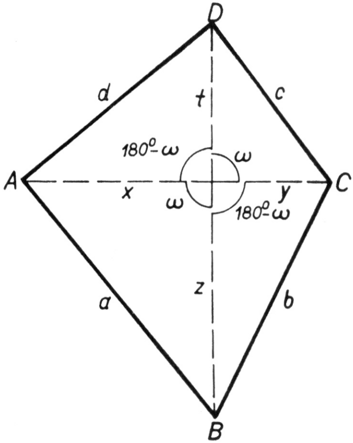
$$|x| \leqq 2\pi, \ |y| \leqq 2\pi,$$

ktoré ležia súčasne v (1) i (2); na obr. 3 je vyšrafovaná.

4. Uhlopriečky AC, BD konvexného štvoruholníka

ABCD sú navzájom kolmé práve vtedy, ak platí $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$; dokážte.

KOMENTÁŘ. Čtvrtá úloha je triviální, řešíme-li ji kosinovou větou. Kosinovou větu lze však snadno obejít. První část — důkaz nutné podmínky — záleží v prostém použití Pythagorovy věty. Označíme-li délky stran a úseček na úhlopříčkách podle obr. 4, platí pro $\omega = 90°$: $a^2 = x^2 + z^2$, $c^2 = y^2 + t^2$, $b^2 = y^2 + z^2$, $d^2 = x^2 + t^2$, a tedy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Postačitelnost této podmínky dokážeme takto: Je-li $\omega \neq 90°$, je $a^2 + c^2 \neq b^2 + d^2$. Zde je třeba provést jistou úvahu o tzv. kontraponovaných větách podle schématu:



Obr. 4

$$(A \Rightarrow B) \text{ právě když } (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A),$$
$$(B \Rightarrow A) \text{ právě když } (\text{non } A \Rightarrow \text{non } B).$$

Důkaz postačitelnosti podmínky je pak druhá z uvedených implikací. [*A* je výrok (výroková forma) $\omega = 90°$, *B* je výrok (výroková forma) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.]

Druhý impuls pro řešení implikace non $A \Rightarrow$ non B záleží v tom, že si připomeneme větu, která se dá jako úloha odvodit z Pythagorovy věty: Jsou-li x, y, z délky stran trojúhelníka a je-li vnitřní úhel proti straně z ostrý (pravý, tupý), pak platí $x^2 + y^2 > z^2$ ($= z^2$, $< z^2$).

Zvolíme označení tak, aby bylo $\omega < 90°$, je 180° —

$-\omega > 90°$ a užitím předchozí věty dostaneme

$$a^2 + c^2 < b^2 + d^2.$$

RIEŠENIE. Ak je $AC \perp BD$, vyplýva uvedená rovnosť zo štvornásobného použitia Pythagorovej vety. Pri dôkaze obrátenej vety môžeme použiť toto tvrdenie: Ak je v $\triangle AXB$ uhol $\sphericalangle AXB$ ostrý, platí $AB^2 < AX^2 + BX^2$ (a analogické tvrdenie pre tupouhlé trojuholníky); i tieto pomocné tvrdenia sa dajú dokázať bezprostredným použitím Pythagorovej vety. Je možné riešiť tiež kosínusovou vetou.

3. KOMENTÁŘE A ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE Z

1. Součet druhých mocnin tří po sobě jdoucích lichých čísel je čtyřciferné číslo, jehož všechny číslice jsou stejné. Najděte všechny takové trojice lichých čísel.

KOMENTÁŘ. Už při čtení textu narazíme na pojem liché číslo. Lichá čísla jsou celá čísla, liché číslo může být tedy i číslo *záporné*. Každému matematikovi je známý „trik", jak vyjádřit tři za sebou následující členy aritmetické posloupnosti. *Zpravidla* se osvědčuje vyjádření $a-d$, a, $a+d$. Kdybychom použili nesymetrického vyjádření b, $b+d$, $b+2d$, byl by výpočet asi složitější. Řešení úlohy je poloexperimentální, neboť situace nás přímo vybízí k tomu, abychom prozkoumali postupně všechna čísla s dekadickým zápisem $yyyy$ a čísla k nim opačná. Doporučujeme obměnit podmínku b) na trojciferná a pěticiferná čísla; zajímavé jsou tu důvody, proč je úloha neřešitelná. Mimoto je **cenná sama ta okolnost,** že se setkáváme s **neřešitelnou úlohou.**

ŘEŠENÍ. Je-li x prostřední číslo hledané trojice, máme $(x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 3x^2 + 8 = (yyyy)$, kde

$y \in \{1, \ldots, 9\}$. Poněvadž $3x^2 + 8$ je liché číslo, musí být y lichá číslice. Číslo $3x^2 + 8$ se tedy nutně rovná některému z čísel 1111, 3333, 5555, 7777, 9999, načež $3x^2$ se rovná některému z čísel 1103, 3325, 5547, 7769, 9991. Z nich pouze 5547 je dělitelné třemi, takže $3x^2 = 5547$, tedy $x^2 = 1849 = 43^2$. Poněvadž

$$41^2 + 43^2 + 45^2 = 1681 + 1849 + 2025 = 5555,$$

jsou právě dvě vyhovující trojice: 41, 43, 45 a -45, -43, -41.

2. Ozubené pedálové kolečko jízdního kola (bicyklu) má 48 převodních zubů: malé převodní kolečko na zadním kole má 20 zubů. Průměr zadního kola bicyklu je 72 cm. (Uvědomte si, že vzdálenost dvou sousedních zubů u obou koleček je táž.) Cyklista jede po vodorovné silnici stálou rychlostí 25 km za hodinu na plný záběr (šlape rovnoměrně).

a) Kolikrát musí šlápnout za jednu minutu, aby si udržel stálou rychlost 25 km za hodinu?

b) Kolikrát musí šlápnout na trati dlouhé 4,5 km?

KOMENTÁŘ. Úloha je značně idealizována; může být proti ní oprávněná námitka, že se takto na kole nejezdí. Úloha předpokládá jistou znalost o převodech. Pokud ji řešitel nemá, snadno si obstará příslušné názorné vysvětlení. Zde bychom doporučovali opustit numerické údaje a počítat algebraicky. Mají-li pedálové a převodní kolečko po řadě z_1, z_2 zubů a jsou-li po řadě n_1, n_2 počty jejich otáček, platí

$$n_1 z_1 = n_2 z_2 \,. \tag{V}$$

Měli bychom rozřešit několik úloh na využití vzorce (V). Tento vzorec je i klíčem k řešení dané úlohy. Vždy je třeba nejdříve odvodit vzorec, podle něhož budeme počítat. Např. má-li cyklista ujet v metrů a je-li poloměr jeho zadního kola r metrů (pozor na jednotky!), je počet potřebných otoček pedálového kola

$$n_1 = \frac{vz_2}{2\pi rz_1} \quad (v,\ r \text{ v metrech}). \qquad \text{(A)}$$

Vzorec (A) můžeme upravit pro situaci, že v je dáno v kilometrech a r v centimetrech: čitatele násobíme tisícem a jmenovatele dělíme stem; celkem tedy násobíme zlomek $10^3 \,.\, 10^2 = 10^5$ a dostaneme

$$n_1 = 10^5 \frac{vz_2}{2\pi rz_1} \quad (v \text{ v km},\ r \text{ v cm}). \qquad \text{(B)}$$

Takovouto úpravu, jako je vzorec (B), pokládáme za velmi účelnou pro aplikace.

Také bychom si měli vysvětlit, **proč** dáváme přednost algebraickému výpočtu před numerickým (např. možnost krácení, co největší využití tabulek apod.).

I při zodpovědění otázky a) je třeba správně a obratně manipulovat s jednotkami (minuty—hodiny).

Celkem je tento příklad jen obtížnější a rozsáhlejší školská úloha.

ŘEŠENÍ. Otočí-li se pedálové kolečko jednou, otočí se zadní kolo $\frac{48}{20} = 2{,}4$krát; na to, aby se pedálové kolečko otočilo jednou, musí cyklista šlápnout dvakrát.

Při jednom šlápnutí ujede zadní kolo dráhu délky (v cm)

$$\frac{\pi d \,.\, 2{,}4}{2} \doteq \frac{3{,}14 \,.\, 72 \,.\, 2{,}4}{2} = 271{,}296 \doteq 271\,,$$

kde d jsme označili průměr zadního kola bicyklu.

Na dráze 25 km = 2 500 000 cm cyklista šlápne tolikrát, kolik je 2 500 000 : 271; to je přibližně 9 225. Za jednu hodinu tedy šlápne 9225krát a za jednu minutu 9225 : 60 = 153,75 tj. přibližně 154krát.

Poměr drah 4,5 km a 25 km je $\frac{4,5}{25}$. V témže poměru se změní i počet šlápnutí, tj. číslo 9225; dostaneme

$$9225 \cdot \frac{4,5}{25} = 369 \,.\, 4,5 = 1660,5 \doteq 1660 \,.$$

Na dráze 4,5 km musí cyklista šlápnout asi 1660krát.

3. Je dán rovnostranný trojúhelník *ABC* o straně délky 8 cm. Dále je dán pravidelný šestiúhelník *KLMNOP* o straně délky 4 cm tak, že vrcholy *A* a *K* v základní poloze splývají a vrchol *L* leží na polopřímce *AB*. Oba útvary leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou *AB*. Šestiúhelník *KLMNOP* se kotálí po obvodu trojúhelníka *ABC*.

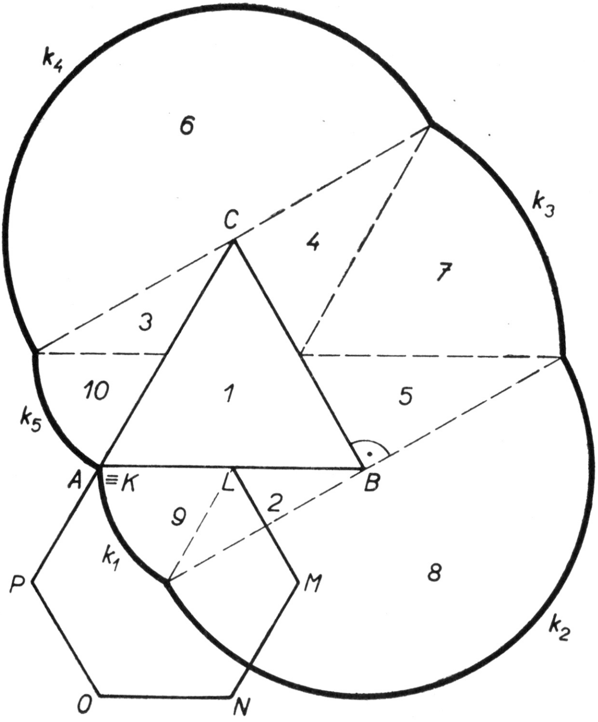
a) Vyšetřte dráhu vrcholu *K*.

b) Vypočtěte obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu *K*.

KOMENTÁŘ. Abychom dobře porozuměli textu úlohy, měli bychom si vystřihnout z lepenky trojúhelník i šestiúhelník a s modelem provést popsaný pohyb, experimentálně zjistit a zakreslit dráhu bodu *K*. Pak provedeme konstrukci přesně pravítkem a kružítkem. Při výpočtu jde a) o aplikaci vzorců pro délku oblouku kružnice a obsah výseče, když je dán poloměr a velikost středového úhlu; b) o vhodné rozdělení vzniklého obrazce na trojúhelníky a výseče. Úloha je zcela běžná, vyžaduje spíše čas a trpělivost při počítání než vtip.

I tato úloha může být ovšem východiskem k problémové situaci o kotálení jednoho obrazce po obvodě druhého. Zkuste např. v dané úloze nahradit buď pevný trojúhelník, nebo pohyblivý šestiúhelník čtvercem, který má stranu téže délky.

ŘEŠENÍ (obr. 5). Dráha bodu *K* se skládá z pěti kružnicových oblouků, jak je naznačeno na obrázku.



Obr. 5

Obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu K vypočteme jako součet obsahů celkem deseti obrazců, z nichž je pět trojúhelníků a pět kruhových výsečí (viz. obr. 5). Obsah obrazce označeného číslem i bude P_i v cm² ($i = 1, 2, \ldots, 10$). Obsah rovnostranného $\triangle ABC$ je

$$P_1 = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 16 \,.\, \sqrt{3} \doteq 27{,}68 \,. \qquad (1)$$

Dále platí $P_2 = P_3$, takže

$$P_2 + P_3 = 2\,.\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\,.\sqrt{3} \doteq 13{,}84\,. \qquad (2)$$

Podobně $P_4 = P_5$, takže

$$P_4 + P_5 = 2\left(\frac{1}{2}\cdot 4\,.\,4\,.\sqrt{3}\right) = 16\,.\sqrt{3} \doteq 27{,}68\,. \qquad (3)$$

Kruhová výseč označená na obr. 5 číslem 7 má poloměr roven $NK = 8$ cm a středový úhel 60°, její obsah tedy je

$$P_7 = \frac{1}{6}\cdot \pi\,.\,64 \doteq 33{,}60\,. \qquad (4)$$

Dále $P_6 = P_8 = \dfrac{1}{2}\pi(4\sqrt{3})^2 = 24\pi$, takže

$$P_6 + P_8 = 48\,\pi \doteq 150{,}72\,. \qquad (5)$$

Nakonec $P_9 = P_{10}$, takže

$$P_9 + P_{10} = 2\left(\frac{1}{6}\cdot \pi\,.\,4^2\right) = 16\cdot\frac{\pi}{3} \doteq 16{,}80\,. \qquad (6)$$

Sečtením výsledků (1), (2), (3), (4), (5), (6) dostaneme

$$P_1 + P_2 + \;\ldots + P_{10} \doteq 270 \text{ cm}^2,$$

což je hledaný obsah.

4. Je dána velikost s střední příčky a velikost v výšky lichoběžníka $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé. Průsečíky úhlopříček se střední příčkou lichoběžníka $ABCD$ dělí tuto střední příčku na tři shodné úsečky.

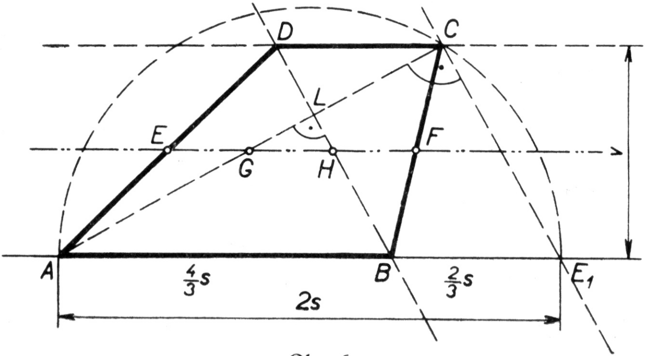
Sestrojte lichoběžník $ABCD$.

KOMENTÁŘ. Mezi impulsy pro řešení této úlohy patří bezesporu uvažování o tom, zda se mohou protínat úhlopříčky lichoběžníka na jeho střední příčce. (Zřejmě nemohou, neboť by se pak navzájem půlily a obrazec by byl rovnoběžník.)

Dále provedeme rozbor dané konstrukční úlohy. Je to úloha **nepolohová**; první otázka je vždy, jak tuto úlohu *„lokalizovat“*, tj. který z daných prvků pevně umístit. V našem případě to bude asi střední příčka EF lichoběžníka $ABCD$, neboť

a) známe její velikost;
b) známe její vzdálenost od přímek, v nichž leží základny;
c) víme, kterými jejími body procházejí úhlopříčky.

Vyjdeme-li ze střední příčky EF a jejích bodů G, H ($EG = GH = HF$), pak průsečík L obou úhlopříček zřejmě leží na kružnici k sestrojené nad průměrem GH



Obr. 6

(obr. 6). Mimoto víme, že vrcholy A, B a C, D leží na dvou rovnoběžkách s EF vedených ve vzdálenosti $\frac{1}{2}v$ (v je daná výška).

Zde se asi zarazíme: Nevíme ještě, který bod kružnice k

máme zvolit za průsečík L obou úhlopříček. Na první pohled situace vypadá tak, jako by úloha měla nekonečně mnoho řešení. Zvolíme tedy bod L na k, pak narýsujeme lichoběžník $ABCD$ a provedeme zkoušku; speciálně si ověříme (třeba grafickým sčítáním), zda platí

$$AB + CD = 2EF.$$

Tu se ukáže, že při libovolně zvoleném bodu L na k není podmínka b) splněna. To znamená, že vzdálenost bodu L od přímky EF není libovolná.

Další impuls je zkoumat tři podobné trojúhelníky ABL, GHL, CDL. Jejich vyšetřováním se zjistí, že vzdálenost bodu L od přímky EF je $\frac{1}{6}v$. Tím je vlastně teprve **dokončen rozbor úlohy** a zkouška pak vyjde. Zároveň je tím také otevřena **cesta k diskusi,** v níž je třeba rozlišit případy $v < s$, $v = s$, $v > s$ (kde s značí délku střední příčky EF).

Tato úloha je poměrně nejtěžší z přípravných úloh, ale je velmi instruktivní.

Když jsme se „potrápili" s předchozím poměrně složitým řešením, můžeme užít určitého triku: doplnit trojúhelník BCD na rovnoběžník $BDCE_1$. Tak vznikne pravoúhlý trojúhelník AE_1C, jehož přepona má délku $AE_1 = 2s$ a výška je v. Zůstane vám však ještě ledacos k dokázání a úvaze (vyjádřit délku CD a tedy i BE_1 pomocí s atd.).

Také z této úlohy bychom se mohli dopracovat k řadě variant, a tím k jisté problémové situaci. Např. místo dané výšky v můžeme požadovat, aby byl lichoběžník rovnoramenný, místo podmínky $EG = GH = HF$ můžeme požadovat $2EG = GH = 2HF$ apod.

ŘEŠENÍ (obr. 6). Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný lichoběžník, a na prodloužení jeho větší základny AB

za bod B sestrojme bod E_1 tak, aby $BE_1 = DC$. Pak bude $AE_1 = 2s$, přičemž $AB = \frac{4}{3}s$ (z $\triangle ABC$) a $BE_1 = DC = \frac{2}{3}s$ (z $\triangle BCD$). Poněvadž $E_1C \parallel BD$, je $\sphericalangle ACE_1 = 90°$. V pravoúhlém trojúhelníku ACE_1 známe tedy délku přepony $AE_1 = 2s$ a velikost příslušné výšky v.

Proto nejprve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ACE_1 s přeponou $AE_1 = 2s$ a s příslušnou výškou v. To provedeme užitím Thaletovy věty: Nad průměrem AE_1 opíšeme polokružnici (jejíž poloměr tedy bude s) a najdeme její společný bod C s přímkou vedenou v téže polorovině rovnoběžně s AE_1 ve vzdálenosti v. Na přeponě E_1A pak sestrojíme bod B tak, aby bylo $AB : BE_1 = 2 : 1$ (víme totiž, že musí být $AB = \frac{4}{3}s$, $BE_1 = \frac{2}{3}s$). Trojúhelník ABC nyní již snadno doplníme na hledaný lichoběžník $ABCD$ (bude $CD = BE_1$).

Proveditelnost celé konstrukce závisí pouze na existenci bodu C. V případě $v > s$ tento bod neexistuje, takže úloha nemá řešení. V případě $v \leqq s$ bod C existuje (jeden nebo dva), takže úloha má řešení (jedno nebo dvě) zřejmě souměrná podle osy úsečky AB.

Jedinou podmínkou řešitelnosti úlohy je tedy splnění nerovnosti $v \leqq s$.