20. ročník matematické olympiády

VI. Správa o XIII. medzinárodnej matematickej olympiáde

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 20. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1970/1971. 13. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972. pp. 143–165.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404615

VI. Správa o XIII. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

XIII. medzinárodná matematická olympiáda (MMO) sa konala v ČSSR pri príležitosti XX. ročníka domácej matematickej olympiády. Jej usporiadateľom bolo *Ministerstvo školstva SSR*, a to predovšetkým preto, že IV. MMO, ktorá bola r. 1962 v Československu, sa konala celá na území dnešnej ČSR. *Prípravný výbor XIII. MMO*, ktorý začal svoju činnosť v júni 1970, pracoval v zložení: akad. *Štefan Schwarz*, predseda; akad. *Josef Novák*, podpredseda; ústr. škol. inšpektor *Michal Zöldy*, zástupca MŠ SSR; ústr. škol. inšpektor *Jaroslav Láník*, zástupca MŠ ČSR; *Valéria Baračková* (ÚV SZM), prof. dr. *Miroslav Fiedler*, DrSc., dr. *Ján Gatial*, CSc., prof. dr. *Michal Greguš*, DrSc., doc. dr. *Milan Hejný*, CSc., prof. dr. *Milan Kolibiar*, DrSc., dr. *Jozef Moravčík*, CSc., doc. *Jan Vyšín*, CSc., dr. *František Zítek*, CSc. a dr. *Ladislav Berger*, ktorý bol tajomníkom prípravného výboru.

MŠ SSR pozvalo na XIII. MMO celkom 16 štátov, z ktorých sa Belgicko a Taliansko ospravedlnili, takže sa súťaže zúčastnil spolu s ČSSR rekordný počet 15 krajín.

Za miesto konania súťaže bola prípravným výborom po zrelej úvahe vybraná *Žilina* s tým, že miestom príchodu i odchodu zahraničných hostí bude hlavné mesto Slovenska — *Bratislava*. Vedúci delegácií, ktorí spolu s predsedom a podpredsedom prípravného výboru tvorili medzinárodnú jury súťaže, sa schádzali do Bratislavy v priebehu stredy 7. 7. Vedúci delegácií *Bulharska*, *NDR* a *Rumunska* sa o jeden deň oneskorili a vedúci delegácie *Francúzska* pricestoval vlastným autom až 10. 7. a na prvej časti práce jury sa nezúčastnil.

Prvým oficiálnym podujatím XIII. MMO bola slávnostná večera, ktorú poriadal 7. 7. minister školstva SSR s. prof. Ing. *Štefan Chochol*, CSc., na privítanie vedúcich delegácií v hoteli Carlton. Okrem s. ministra na večeri prehovorili *akad. Schwarz* a zo zahraničných hostí vedúci sovietskej delegácie *doc. Skvorcov*. Vo štvrtok 8. 7. popoludní odcestovali členovia jury a členovia komisie pre výber úloh: prof. dr. *Fiedler*, DrSc., doc. dr. *Hejný*, CSc., doc. *Vyšín*, CSc., dr. *Zítek*, CSc. do hotela *Partizán* na Táloch, ktorý bol určený za miesto pobytu jury počas prvej etapy jej práce. Cestou se zastavili v *Banskej Bystrici*, kde si so záujmom prezreli expozíciu pamätníka SNP.

Na prvom zasadnutí jury, ktoré sa konalo hneď po príchode na Tále, oboznámil predseda jury vedúcich delegácií s programom XIII. MMO a členovia komisie pre úlohy im rozdali pripravené a rozmnožené materiály. Komisia spracovala celkom 55 úloh z 11 krajín (*Mongolsko* a *Francúzsko* úlohy neposlali, zástupca *Rumunska* ich priniesol so sebou a *ČSSR* ako usporiadateľ úlohy nenavrhovala). Z nich vybrala 17, ktorých texty dostali delegáti s upravenými autorskými riešeniami v niektorej z rokovacích rečí (angličtina, francúzština, nemčina, ruština), do ktorých boli preložené. Okrem toho dostali vedúci delegácií tiež texty všetkých 55 navrhovaných úloh v tom jazyku, v ktorom ich príslušná krajina poslala.

Na štúdium materiálov bolo vyhradené celé predpoludnie v piatok 9. 7. Ukázalo sa však, že to v krásnom letnom počasí, ktoré panovalo po celý čas pobytu na Táloch, bolo málo a väčšina členov jury se nechala ovplyvniť výberom komisie a hlavne zdanlivou jednoduchosťou ňou predložených riešení. Po zdĺhavom rokovaní vybrala jury z predloženého návrhu týchto 6 úloh:

ÚLOHY PRE PRVÝ DEŇ SÚŤAŽE — 13. 7. 1971

1. Dokážte, že tvrdenie: viz papír

„Pre ľubovoľné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je splnená nerovnosť $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1) \,.\, (a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n) + \ldots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}) \geqq 0$“ je pravdivé pre $n = 3$ a $n = 5$ a nie je pravdivé pre žiadne iné prirodzené $n > 2$. (*Maďarsko*, 5 bodov)

je dán

2. Nech je daný konvexný mnohosten P_1, ktorý má práve deväť vrcholov: $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Označme P_i, $i = 2, 3, \ldots, 9$ mnohosten, ktorý sa dostane z P_1 rovnobežným posunutím, pri ktorom sa bod A_1 premiestni do bodu A_i, $i = 2, 3, \ldots, 9$.

Dokážte, že aspoň dva z mnohostenov $P_1, P_2, \ldots, P_9$ majú aspoň jeden spoločný vnútorný bod. (*ZSSR*, 7 bodov)

3. Dokážte, že postupnosť $\{2^n - 3\}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ obsahuje nekonečne mnoho čísel, z ktorých každé dve sú nesúdeliteľné. (*Poľsko*, 9 bodov) nichž

ÚLOHY PRE DRUHÝ DEŇ SÚŤAŽE — 14. 7. 1971

4. Všetky steny štvorstena $ABCD$ sú ostrouhlé trojuholníky. Uvažujme o všetkých uzavretých lomených čiarach $XYZTX$, ktoré sú definované nasledujúcim spôsobom:

všechny uzavřené (4. p.)

X je bod hrany AB rôzny od A aj od B. Analogicky Y, Z, T sú vnútorné body hrán BC, CD, DA ~~v uvedenom poradí~~.

Dokážte, že

ji-lí

a) ak $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA \neq 0$, potom medzi týmito lomenými čiarami nejestvuje najkratšia;

neexistuje

b) ak $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA = 0$, potom existuje nekonečne mnoho lomených čiar minimálnej dĺžky a táto dĺžka je rovná $2 \cdot AC \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, kde $\alpha = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$.

(*Holandsko*, 6 bodov)

ke každému

5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje neprázdna konečná množina **S** bodov v rovine ~~s tou vlastnosťou~~, takovou že ku každému bodu $A \in \mathbf{S}$ existuje v **S** práve m bodov, ktorých vzdialenosť od A sa rovná jednej.

jejichž

(*Bulharsko*, 7 bodov.

6. Uvažujme o štvorcovej tabuľke

1. p.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}, \end{matrix}$$

ktorá je zostavená z nezáporných celých čísel a vyhovuje nasledujúcej podmienke: ak $a_{ij} = 0$, potom platí nerovnosť

jestliže

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + a_{1j} + \ldots + a_{nj} \geqq n\,.$$

Dokážte, že pre súčet s všetkých čísel tabuľky platí: $s \geqq \frac{1}{2} n^2$.

(*Švédsko*, 8 bodov)

V zátvorke za textom úlohy je uvedená krajina, ktorá úlohu navrhla a maximálny počet bodov, ktorý bolo možno získať za jej úplné riešenie.

Neúmerne dlhá časť rokovania jury bola venovaná formulácii vybraných úloh v rokovacích jazykoch. Na riešenie každej trojice úloh boli určené — ako obvykle — 4 hodiny čistého času.

V piatok 9. 7. usporiadal večeru pre členov jury podpredseda KNV v *Banskej Bystrici s. Jozef Baláž*. Predstavitelia Stredoslovenského KNV obdarovali každého účastníka večere vkusnou vázou z krištáľového skla s vyrytým emblémom XIII. MMO z dielne sklárov v Katarínskej Hute.

Na ceste z *Tálov* do *Žiliny v nedeľu* 11. 7. 1971 popoludní sa všetci členovia výpravy zúčastnili prehliadky *Demänovskej jaskyne Slobody*. V nedeľu 11. 7. večer sa vedúci delegácií stretli v žilinskom hoteli *Metropol*, kde sa na celý týždeň ubytovali, so svojimi zástupcami. Zástupcovia vedúcich priviedli v priebehu *soboty* 10. 7. výpravy žiakov do *Bratislavy*, skadiaľ v *nedeľu* predpoludním spoločne odcestovali do *Žiliny*. Cestou sa zastavili v *Piešťanoch* (prehliadka kúpeľov) a v *Trenčíne* (prehliadka mesta).

V priebehu 12. 7. preložili vedúci delegácií a ich zástupcovia (ďalej krátko delegáti) texty úloh do národných jazykov žiakov a rozmnožili ich v príslušnom počte.

Miestom konania súťaže i pracoviskom členov jury po celý čas žilinského pobytu bola nová, moderne zariadená budova *Strednej priemyselnej školy stavebnej v Žiline*, v ktorej mala každá delegácia vyhradenú miestnosť. O to, aby v nej našla všetko potrebné pre svoju prácu sa postaral technický štáb olympiády, ktorý pracoval pod vedením *dr. Bergera* a pozostával prevažne z pracovníkov Katedry matematiky a deskriptívnej geometrie fakulty SET

VŠD v Žiline. V jeho práci výdatne pomáhal tiež riadite SPŠS *s. ing. Jozef Kráľ.*

V pondelok 12. 7. popoludní podnikli delegáti výlet do *Vrátnej doliny*, kde si pri vrcholovej stanici výťahu na Chleb uctili pamiatku bývalého dlhoročného tajomníka ÚV MO *Rudolfa Zelinku*. Jeho ušľachtilý charakter a nezabudnuteľné zásluhy o rozvoj matematiky u nás pripomenul v krátkom preslove *doc. Vyšín*, CSc. Bolo to na mieste, kde s. Zelinka v máji 1965 náhle zomrel.

Žiaci v ten deň absolvovali výlet do *Bojníc*, kde si prehliadli zámok, zoologickú záhradu a osviežili sa kúpaním v rieke Nitre.

Slávnostné zahájenie súťaže sa uskutočnilo v *utorok* 13. 7. v aule SPŠS v Žiline za účasti nám. ministra školstva SSR *s. prof. dr. Greguša*, Dr. Sc., ktorý mal krátky prejav. Prítomní boli aj zástupcovia politických a štátnych orgánov mesta i okresu Žilina a Stredoslovenského kraja. Po zahájení sa žiaci odobrali do miestností určených pre súťaž. Do 10 min. od otvorenia obálok s textami úloh, ktoré našli na svojich stoloch, mali možnosť vyjsť na chodbu a spýtať sa vedúcich delegácií na prípadné nejasnosti v texte. Predseda jury prísne dozeral, aby sa ich odpovede obmedzili len na stručné vysvetlenie. Rovnaká procedúra sa opakovala i na druhý deň, keď žiaci zasadli k riešeniu druhej trojice úloh.

13. 7. *delegáti* absolvovali výlet autobusom do *Bojníc* s rovnakým programom ako deň predtým žiaci. Popoludní po súťaži mali žiaci po oba dni voľno, ktoré využívali na športové hry v areáli internátu, kúpanie na žilinskej krytej plavárni, resp. na prehliadku mesta. *V stredu* 14. 7. večer pre nich usporiadal OV SZM v Žiline stretnutie so žilinskou mládežou.

Delegáti sa v *stredu* 14. 7. už plne venovali opravám a hodnoteniu žiackych riešení. Najskôr vedúci delegácií a ich zástupcovia posúdili riešenia členov svojho družstva a navrhli počty bodov za jednotlivé riešenia. *Koordináciu hodnotení* u všetkých družstiev okrem ČSSR robila skupina koordinátorov pod vedením *dr. Zítka*, CSc.: *doc. dr. Bukovský*, CSc. (2), *doc. dr. Černý*, CSc. (4), *dr. Franek* (5), *dr. Gruska*, CSc. (6), *doc. dr. Hejný*, CSc. (4), *dr. Jarník*, CSc. (1), *doc. dr. Kufner*, CSc. (1), *dr. Liebl* (6), *doc. dr. Riečan*, CSc. (5), *dr. Rohn* (2), *dr. Vrba* (3), *dr. Zítek*, CSc. (3) — v zátvorke za menom je uvedené číslo úlohy, ktorej hodnotenie menovaný koordinoval. Hodnotenia riešení československých žiakov koordinovali vedúci delegácií tých krajín, ktoré navrhli jednotlivé úlohy. Hodnoteniu riešení a koordinácii bol venovaný aj celý *štvrtok* 15. 7. a takmer celý *piatok* 16. 7.

Vo *štvrtok* 15. 7. podával večeru na počesť zahraničných hostí predseda ONV v Žiline *s. Ing. Perkovič*. Okrem neho na večeri prehovorili rektor VŠD *prof. Ing. Ponec*, predseda MsNV v Žiline *dr. Kováčik*, *akademik Schwarz* a za zahraničných delegátov vedúci sov. delegácie *doc. Skvorcov* a vedúci holandskej delegácie *prof. van Tooren*. Posledne menovaný vo svojom vystúpení zvlášť ocenil *formu patronátov* jednotlivých závodov z okresov Žilina, Považská Bystrica a Martin nad jednotlivými družstvami, ktorá sa v histórii MMO realizovala po prvý raz. Jej iniciátorom bol dr. Berger a je chvályhodné, že jeho neúnavné úsilie našlo porozumenie vo vedení závodov, ktoré sa po celý štvrtok 15. 7. všestranne starali o zverené družstvá.

V dňoch 16. a 17. 7. podnikli *žiaci* autokarový zájazd po Slovensku, počas ktorého navštívili *Strečno*, *Martin*, *Dolný Kubín*, *Oravský zámok*, *Ružomberok*, *Lipt. Mikuláš*, *Demänovskú jaskyňu Slobody*, *Svit*, *Poprad* (nocľah), *Tatranskú Lomnicu*, *Starý Smokovec* s výstupom na *Hrebienok* a k vodopádom, *Štrbské Pleso* s prehliadkou *Areálu snov* a *Podbanské*.

Delegáti sa v *piatok* 16. 7. po skončení koordinácie zišli na záverečnom zasadnutí jury, ktorého plánovaný začiatok (14,00) bol posunutý o 4 hodiny pre nesúhlas niektorých delegácií s koordináciou. Riešenie nezrovnalostí sa stalo viac než trojhodinovým prológom zasadnutia. To nepriaznivo ovplyvnilo ďalší priebeh porady, ktorá sa skončila až okolo 02,30 hod. ráno. Jury sa snažila zmierniť čiastočnú vlastnú vinu, ktorej sa pri výbere úloh nechtiac dopustila tým, že pripustila pomerne náročný celok a — ako ukázali výsledky žiackych riešení — nie práve najvhodnejší pre takúto súťaž. Ako ukazuje *tab. č. 3*, bodový zisk prevažnej väčšiny riešiteľov bol veľmi nízky a tak sa napokon stalo, že po zamietnutí návrhu na udelenie 4. ceny, resp. pochvalného uznania sa väčšina unavených členov jury zhodla pred záverom zdĺhavého rokovania na tom, aby hranice pre udelenie cien boli: I. 42—35, II. 34—23, III. 22—11 bodov. K tomu treba poznamenať, že v minulosti sa dolná hranica pre udelenie cien pohybovala veľmi blízko polovičnej hodnoty celkového dosažiteľného počtu bodov.

Jury udelila celkom 48 *cien*, z toho 7 prvých, 12 druhých a 29 tretích, čo je pri 115 účastníkoch aj napriek veľmi nízkej dolnej bodovej hranici pomerne málo.

O udelení *zvláštnych cien* za eleganciu riešení jednotlivých úloh, resp. za ich zovšeobecnenie sa tentoraz dlho nerokovalo. Boli udelené tri zvláštne ceny za 2. úlohu a po jednej za 3. a 4. úlohu. Za 1., 5. a 6. úlohu nebola zvláštna cena udelená vôbec. Za zmienku stojí skutočnosť, že dve zvláštne ceny (za 2. a 3. úlohu) dostal maďarský žiak *Ruzsa Imre*, ktorého možno nazvať absolútnym víťazom XIII. MMO, pretože jediný získal plný počet 42 bodov.

V sobotu 17. 7. sa uskutočnil pre delegátov autokarový výlet do *Vysokých Tatier*, ktorého účastníci sa vyviezli lanovkou na *Lomnický štít* a prezreli si tamojšie pracovisko *Astronomického ústavu SAV*. Niektorí zahraniční účastníci (delegáti *ZSSR*, *Poľska*, *Bulharska a Mongolska*) dali prednosť odpočinku po prediskutovanej noci pred lákavou exkurziou do slovenských veľhôr. Na spiatočnej ceste sa výprava zastavila na *Štrbskom Plese* a prezrela si *Areál snov*.

V *nedeľu* 18. 7. popoludní sa všetci účastníci XIII. MMO rozlúčili so *Žilinou* a odcestovali do *hlavného mesta Slovenska*, kde delegátov ubytovali v hoteli *Carlton* a žiakov vo vysokoškolskom internáte *Mladá garda*. (Počas pobytu v Žiline bývali žiaci vo vysokoškolskom internáte VŠD.)

V *pondelok* 19. 7. predpoludním usporiadal nám. ministra školstva SSR *prof. dr. Greguš*, DrSc. koktail pre delegátov, kým žiaci sa v tom čase pod patronátom *SÚVSZM* zoznamovali s pamätihodnosťami *Bratislavy*. Ešte pred slávnostným zakončením súťaže v aule UK prijal delegátov rektor UK *prof. MUDr. Emil Huraj*, CSc.

Na záverečnej slávnosti sa okrem účastníkov olympiády zúčastnili tiež pozvaní predstavitelia politického a verejného života z Bratislavy, Žiliny i Stredoslovenského kraja, členovia konzulárneho zboru, zástupcovia tlače a ďalší hostia. V jej úvode informoval stručne *akad. Schwarz* o priebehu a výsledkoch XIII. MMO. Potom podpredseda jury *akad. Novák* odovzdal diplomy odmeneným žiakom. Víťazi dostali zároveň hodnotné ceny venované väčšinou podnikmi zo žilinskej oblasti. *Prof. dr. Greguš*, *DrSc.*, vo svojom slávnostnom prejave vyzdvihol význam matematiky a MMO a poďakoval všetkým, ktorí prispeli ku zdaru XIII. MMO. Za zúčastnených žiakov organizátorom poďakoval maďarský žiak *Ruzsa Imre*. V mene zahraničných hostí sa s poriadateľmi XIII. MMO rozlúčil vedúci poľskej delegácie *doc. Mąkowski*, ktorý na záver pozval všetky zúčastnené krajiny na *XIV. MMO do Poľska*.

Večer o 19,00 hod. sa v miestnostiach hotela Carlton konala *slávnostná záverečná večera*, ktorú pre všetkých účastníkov XIII. MMO podával na rozlúčku ÚV SZM. Zúčastnili sa jej aj zástupcovia konzulárnych zborov.

So spoločenskou a kultúrno-politickou stránkou olympiády možno vysloviť spokojnosť i napriek niektorým drobným nedopatreniam v organizácii, ktorým sa pri takomto podujatí sotva možno vyhnúť. Organizačný výbor vyslovil poďakovanie všetkým pracovníkom, najmä zo Stredoslovenského kraja, členom komisií, za obetavosť, s akou sa venovali práci pri príprave a organizačnom zabezpečení celého priebehu XIII. MMO.

Pri rozbore matematickej stránky podujatia nám veľa slov ušetrí zvyčajný štatistický prehľad.

Tabuľka č. I

Členovia medzinárodnej jury a zástupcovia vedúcich delegácií
Predseda jury: Akademik Štefan Schwarz
Podpredseda jury: Akademik Josef Novák

Krajina	Vedúci delegácie — člen jury	Zástupca vedúceho
Rakúsko (A)	Thomas Mühlgassner, prof. reál. gymn. Eisenstadt	Wolfgang Ratzinger
Bulharsko (BG)	Kiril Dočev, docent mat. fakulty univerzity v Sofii	Dimo Serafimov Angelov, hlavný špecialista matematiky min. školstva
Kuba (C)	Luis Davidson, ústredný inšpektor min. školstva, Havana	—
ČSSR (CS)	RNDr. Jozef Moravčík, CSc., odb. asistent KMDg Fakulty SET Vysokej školy dopravnej v Žiline	Jiří Mída

Krajina	Vedúci delegácie — člen jury	Zástupce vedúceho
NDR (D)	Dr. hab. Helmut Bausch, prof. vysokej školy v Berlíne	Dr. hab. Gustav Burosch, (Manfred Mäthner, ped. ved.)
Francúzsko (F)	André Warusfel, prof. lycea Louis le Grand, Paríž	Denis Gerll, prof. lycea
Veľká Británia (GB)	Prof. Frank Budden, Royal Grammar School Newcastle	Prof. Peter Reynolds
Maďarsko (H)	Hódi Endre, techn. poradca Maď. opt. závodov v Budapešti	Dr. Reiman István
Mongolsko (M)	Uržincerendijn Sanžimjatov, docent Mongolskej štátnej univerzity v Ulanbátore	Dambyn Sadgar, kand. mat. — fyz. vied
Holandsko (NL)	Ary van Tooren, inšpektor stredných škôl, Haag	Artur Hoogendoorn
Poľsko (PL)	Andrzej Mąkowski, docent Matematického ústavu univerzity vo Varšave	Dr. Maciej Bryński
Rumunsko (R)	Nicolae Mihaileanu, prof. Matematického ústavu univerzity v Bukurešti	Prof. Constantin Ottescu
Švédsko (S)	Kjell-Ove Widman, Matematický ústav univerzity v Uppsale	Lars Wahlbin
ZSSR (SU)	Valentin Anatoljevič Skvorcov, docent MGU v Moskve	Ivan Semjonovič Petrakov, metodik min. školstva
Juhoslávia (YU)	Vladimír Mićić, docent univerzity v Belehrade	Jovan Vukmirovič

Tabuľka č. 2

Počty získaných cien

Štát / Cena	A	BG	C	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	S	SU	YU
I.	—	—	—	—	1	—	—	4	—	—	1	—	—	1	—
II.	—	—	—	—	1	—	1	4	—	—	—	1	—	5	—
III.	4	—	—	1	4	—	4	—	—	2	4	4	2	2	2

Tabuľka č. 3

Počty získaných bodov

Krajina	Počet získaných bodov žiaka čís. 1	2	3	4	5	6	7	8	Súčet bodov	Súčet bodov družstva na XII. MMO
A	4	11	19	5	14	13	6	10	82	104
BG	3	10	3	6	8	1	4	4	39	145
C	4	1	3	1	—	—	—	—	9	na MMO po prvý raz
CS	11	8	9	6	4	7	8	2	55	145
D	7	38	23	8	18	21	11	16	142	221
F	7	1	9	5	1	6	6	3	38	141
GB	17	6	6	20	25	7	17	12	110	180
H	27	37	24	39	38	25	23	42	255	233
M	3	9	1	2	5	3	0	3	26	58
NL	4	1	2	1	20	13	2	5	48	87
PL	6	9	4	17	18	38	11	15	118	105
R	2	27	13	21	7	9	15	16	110	208
S	0	12	12	3	8	3	5	—	43	110
SU	26	24	18	35	27	32	31	12	205	221
YU	3	2	9	21	10	4	10	12	71	209

POZNÁMKA: Keďže *MMO* je súťažou jednotlivcov, treba považovať posledné dva stĺpce za neoficiálne a čisto informatívne. Ich vzájomným porovnaním získame aspoň relatívne meritko na potvrdenie zvýšenej obťažnosti tohtoročného výberu úloh. Z tabuľky taktiež vidno, že družstvá *Kuby* a *Švédska* prišli na XIII. MMO nekompletné.

Tabuľka č. 4

Prehľad o úspešnosti podaných riešení

Úloha č.	Počet bodov za úpl. rieš.	Počet podaných úplných riešení	Celkový počet bodov za riešenie úlohy		% úspešnosti
			dosiahnutý	možný	
1	5	18	284	575	49,4
2	7	14	222	805	27,6
3	9	17	194	1035	18,7
4	6	9	269	690	38,9
5	7	25	225	805	27,9
6	8	12	157	920	17,1

2. *RIEŠENIA SÚŤAŽNÝCH ÚLOH*

RIEŠENIE 1. ÚLOHY

Pre $n = 3$ má ľavá strana danej nerovnosti tvar

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1) \,.$$
$$.\,(a_3 - a_2)\,,$$

z ktorého po vynásobení a jednoduchej úprave dostaneme pre každú trojicu a_1, a_2, a_3 reálnych čísel:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3 =$$
$$= \frac{1}{2}[(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2],$$

čo je zrejme číslo nezáporné.

Pre $n = 5$ dostávame na ľavej strane uvažovanej nerovnosti výraz

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1) \, . \, (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \, . \, (a_3 - a_4) \, . \, (a_3 - a_5) + (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \, . \, (a_4 - a_5) + (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4),$$

ktorý je zrejme symetrický vzhľadom na čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, tj. nezmení sa, ak v ňom ľubovoľné dve z nich navzájom zameníme. Môžeme preto predpokladať, že platí napr.:

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq a_4 \geqq a_5$$

V tomto prípade však je

$$a_1 - a_2 = -(a_2 - a_1) \geqq 0, \quad a_1 - a_3 \geqq a_2 - a_3 \geqq 0,$$
$$a_1 - a_4 \geqq a_2 - a_4 \geqq 0, \quad a_1 - a_5 \geqq a_2 - a_5 \geqq 0,$$

takže platí

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1) \, . \, (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) \geqq 0 \, .$$

Analogickým spôsobom dostaneme, že tiež

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + (a_5 - a_1) \, . \, (a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) \geqq 0 \, .$$

Pretože súčin

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)$$

je súčinom dvoch nekladných a dvoch nezáporných činiteľov, je tiež nezáporný, z čoho už vyplýva správnosť dokazovaného tvrdenia aj v tomto prípade.

K tomu, aby sme ukázali nesprávnosť daného tvrdenia pre všetky ostatné prirodzené $n > 2$, stačí nájsť n-ticu reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tak, že uvažovaná nerovnosť nebude pre ne splnená.

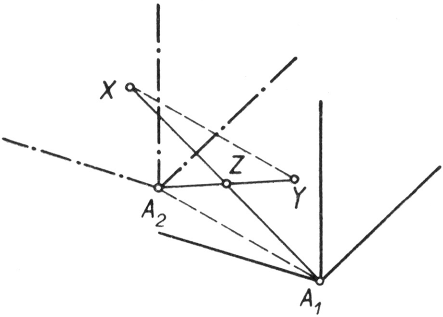
Pre $n = 4$ má túto vlastnosť každá štvorica čísel, pre ktorú platí: $a_1 = a_2 = a_3 > a_4$, pretože pre ňu má ľavá strana nerovnosti hodnotu $(a_4 - a_1)^3$, čo je zrejme číslo záporné.

Pre $n \geqq 6$ stačí zvoliť napr. $a_1 = a_2 = a_3 > a_4 > a_5 = \ldots = a_n$ v prípade párneho n a $a_1 = a_2 = a_3 < a_4 < a_5 = \ldots = a_n$ v prípade nepárneho n, pretože vtedy má ľavá strana nerovnosti hodnotu $(a_4 - a_1)^3(a_4 - a_5)^{n-4}$, čo je zrejme v oboch prípadoch záporné číslo.

RIEŠENIE 2. ÚLOHY

Označme P' mnohosten, ktorý dostaneme z mnohostenu P_1 pri rovnoľahlosti H so stredom A_1 a s koeficientom 2. Dokážeme, že pre každé P_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$, platí $P_i \subset P'$.

Pre $i = 1$ je toto tvrdenie zrejmé. Ak je X ľubovoľný bod mnohostena P_i, $i = 2, 3, \ldots, 9$, zvoľme $Y \in P_1$ tak, že X je obrazom Y pri rovnobežnom posunutí, pri



Obr. 53

ktorom sa bod A_1 premiestni do bodu A_i. Potom však úsečky A_1X, A_iY majú zrejme spoločný stred Z (pozri obr. 53). Z konvexnosti mnohostena P_1 však vyplýva, že úsečka A_iY leží celá v P_1, teda $Z \in P_1$ a preto $X \in P'$ ako obraz bodu Z pri rovnoľahlosti H.

Označme $V(P)$ obsah mnohostena P. Zrejme platí $V(P_1) = V(P_2) = \ldots = V(P_9)$, $V(P') = 2^3V(P_1) = 8V(P_1)$. Ak by žiadne dva z mnohostenov P_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$, nemali spoločný vnútorný bod, muselo by na základe vyššie dokázaného platiť

$$9V(P_1) = V(P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_9) \leqq V(P') = 8V(P_1),$$

čo je spor.

RIEŠENIE 3. ÚLOHY

Tvrdenie dokážeme zostrojením vybranej postupnosti s uvedenou vlastnosťou použitím matematickej indukcie. Predpokladajme, že každé dve z prirodzených čísel

$$a_1 = 2^{n_1} - 3\,,\ a_2 = 2^{n_2} - 3\,,\ \ldots\,,\ a_k = 2^{n_k} - 3\,, \tag{1}$$

kde $2 = n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ sú nesúdeliteľne a zostrojme číslo $a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$ nesúdeliteľné s každým z čísel (1) nasledujúcim spôsobom:

Označme $s = a_1 a_2 \ldots a_k$. Spomedzi $s + 1$ čísel 2^0, $2^1, \ldots, 2^s$ možno vždy vybrať aspoň dve také, ktoré pri delení číslom s majú rovnaký zvyšok. Nech sú to 2^α, $2^\beta (\alpha > \beta)$. Potom však platí

$$2^\alpha - 2^\beta = p \,.\, s \quad (p \text{ — prir. číslo}). \tag{2}$$

Z (2) dostaneme $(2^{\alpha-\beta} - 1)2^\beta = p \,.\, s$, z čoho, vzhľadom na to, že s je číslo nepárne, vyplýva, že $2^{\alpha-\beta} - 1$ je ním deliteľné čiže

$$2^{\alpha-\beta} - 1 = q \,.\, s \quad (q \text{ — prir. číslo}). \tag{3}$$

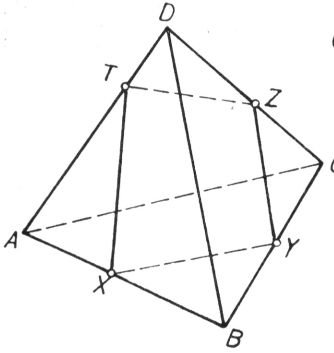
Na základe (3) dostaneme

$$2^{\alpha-\beta+2} - 3 = 4 \, . \, 2^{\alpha-\beta} - 3 = 4(qs + 1) - 3 = 4qs + 1 \, .$$

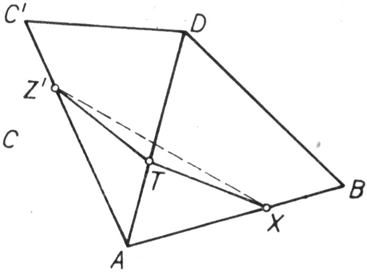
Stačí teda vziať $n_{k+1} = \alpha - \beta + 2$, $a_{k+1} = 4qs + 1$. Keďže zrejme platí $a_{k+1} > a_k$, je tiež $n_{k+1} > n_k$ a celú konštrukciu môžeme neohraničene opakovať.

RIEŠENIE 4. ÚLOHY

a) Predpokladajme, že napr. body X, Y, Z sú pevne zvolené na úsečkách AB, BC, CD (pozri obr. 54). Ak trojuholník ACD sklopíme do roviny ABD (obr. 55),



Obr. 54



Obr. 55

hneď vidíme, že súčet dĺžok $ZT + TX$ možno zmenšiť zmenou polohy bodu T, ak platí $\sphericalangle ATX \neq \sphericalangle ZTD$.

Z tejto úvahy vyplýva, že ak existuje lomená čiara minimálnej dĺžky, potom musia byť splnené nasledujúce nutné podmienky:

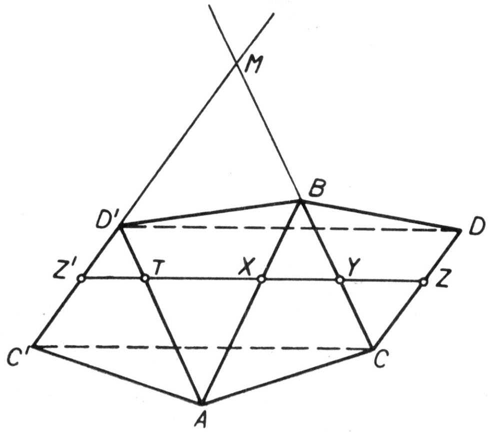
$$\sphericalangle DAB = \pi - \sphericalangle ATX - \sphericalangle AXT \, ,$$
$$\sphericalangle ABC = \pi - \sphericalangle BXY - \sphericalangle BYX = \pi -$$
$$- \sphericalangle AXT - \sphericalangle CYZ \, ,$$

$$\sphericalangle BCD = \pi - \sphericalangle CYZ - \sphericalangle CZY,$$
$$\sphericalangle CDA = \pi - \sphericalangle DTZ - \sphericalangle DZT = \pi - \sphericalangle ATX - \sphericalangle CZY,$$

z čoho hneď dostaneme

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA = 0. \quad (1)$$

b) Nech teraz platí (1). Rozrežme povrch štvorstena $ABCD$ pozdĺž hrán AC, CD a DB a rozviňme ho do roviny. Dostaneme rovinný útvar **P** $= AC'D'BDC$ zložený z trojuholníkov $AC'D'$, ABD', ABC, BCD, ktoré sú všetky podľa predpokladu ostrouhlé. Pri vhodnom označení vrcholov štvorstena (ak treba zameníme A za C, B za D a obrátene) dosiahneme, že P je konvexný (4-, 5- alebo 6-uholník). Priamky CB, $C'D'$ sú rôznobežné



Obr. 56

a pretínajú sa v nejakom bode M (obr. 56). Zo štvoruholníka $ABMD'$ však vzhľadom na (1) dostaneme hneď, že $\sphericalangle BMD' = \sphericalangle BCD$, čo znamená, že úsečky CD a $C'D'$

sú rovnobežné a súhlasne orientované. Rovnobežník $CDD'C'$ leží zrejme celý vo vnútri konvexného obrazca **P**.

Každej úsečke ZZ' rovnobežnej s CC' (a teda aj s DD') odpovedá lomená čiara $XYZTX$ minimálnej dĺžky. Z rovnoramenného trojuholníka ACC' vyplýva, že jej dĺžka je $2 \,.\, AC \,.\, \sin \frac{1}{2}\alpha$.

RIEŠENIE 5. ÚLOHY

Pre $m = 1$ je takou množinou **S** dvojbodová množina s bodmi, ktorých vzdialenosť je 1. Nech $m \geqq 2$ je dané prirodzené číslo. Matematickou indukciou podľa m sa ľahko ukáže, že v rovine existuje systém $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m$ vektorov týchto vlastnosti ($|\vec{\mathbf{v}}|$ znamená dĺžku vektora $\vec{\mathbf{v}}$):

$$|\vec{\mathbf{v}}_i| = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{1}$$

$$0 \neq |c_1\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots + c_m\vec{\mathbf{v}}_m| \neq \frac{1}{2} \tag{2}$$

pre ľubovoľné čísla $c_1, c_2, \ldots, c_m$, ktoré nadobúdajú len niektorú z hodnôt -1, 0, 1, ale aspoň dve z nich rôzne od nuly.

Ukážeme, že požadované vlastnosti má množina **S** pozostávajúca z 2^m bodov, ktorú možno popísať takto: Ak B_0 je ľubovoľný bod danej roviny, potom do množiny **S** patria všetky body B určené predpisom

$$B = B_0 + \varepsilon_1\vec{\mathbf{v}}_1 + \varepsilon_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots + \varepsilon_m\vec{\mathbf{v}}_m,$$

kde $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Z (1) a (2) vyplýva, že ak nejaký bod $A \in$ **S** (prislúcha mu určitá kombinácia znamienok $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \tilde{\varepsilon}_m$), potom v **S** existuje práve m bodov, ktorých vzdialenosť od A sa rovná jednej. Sú to práve tie body, pre ktoré príslušná kombinácia znamienok sa líši od $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \tilde{\varepsilon}_m$ práve na jednom mieste.

RIEŠENIE 6. ÚLOHY

Utvorme súčty všetkých čísel v jednotlivých riadkoch a v jednotlivých stĺpcoch a označme p najmenší z týchto súčtov. Ak $p \geqq \frac{1}{2} n$, potom pre súčet s všetkých čísel tabuľky zrejme platí

$$s \geqq np \geqq \frac{1}{2} n^2$$

a tvrdenie je pravdivé.

Nech teraz $p < \frac{1}{2} n$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že práve prvý riadok má súčet p a práve čísla na prvých q miestach v ňom sú rôzne od nuly. Potom však súčet čísel v posledných $n-q$ stĺpcoch sa rovná aspoň $(n - p)(n - q)$, zatiaľ čo súčet všetkých čísel v prvých q stĺpcoch bude najmenej pq. Platí teda

$$s \geqq (n - p)(n - q) + pq = n^2 - n(p + q) + 2pq =$$
$$= \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2}(n - 2p)(n - 2q) > \frac{1}{2} n^2,$$

pretože $n > 2p \geqq 2q$.

3. *ÚČASŤ ČESKOSLOVENSKÉHO DRUŽSTVA*

Vedúcim československého družstva bol RNDr. *Jozef Moravčík*, CSc., odb. asistent Vysokej školy dopravnej v Žiline, podpredseda ÚV MO a jeho *zástupcom* bol

s. *Jiří Mída*, odb. asistent Pedagogickej fakulty Karlovej university v Prahe, tajomník ÚV MO. *Členovia družstva* boli vybraní na záver sústredenia 12 žiakov v *Brandýse n. L.* na základe výsledkov v II. a III. kole XX. ročníka *MO* a na základe hodnotenia pracovníkov, ktorí viedli jednotlivé semináre na sústredení. Podrobné výsledky československých účastníkov XIII. MMO podáva tabuľka na str. 164.

Ako z tabuľky vidno, poradili si naši žiaci ako—tak len s 1. a 4. úlohou, ktoré boli všeobecne označované za najľahšie. Rozhodne viac sa od nich čakalo v 2. a 5. úlohe, ktoré čo do náročnosti nemuseli byť nad ich sily. Výsledok v 3. a 6. úlohe je úplne zdrvujúci, ale dá sa čiastočne vysvetliť tým, že tieto úlohy boli opravdu náročné a nie celkom vhodné pre takúto súťaž, pretože ich riešenia sa zakladali na obratoch nie celkom bežných pre stredoškolákov.

Kvôli úplnosti treba poznamenať, že *výber družstva* bol sťažený tým, že traja z úspešných riešiteľov III. kola XX. ročníka *MO* dali prednosť atraktívnejšej ceste do Sofie na V. medzinárodnú fyzikálnu olympiádu. Išlo o žiakov, ktorí sa v III. kole XX. ročníka *MO* umiestnili na 3., 6.—7. a 9.—12. mieste. Je však otázne, či by v prípade svojej účasti na XIII. *MMO* boli dosiahli lepšie výsledky než ich náhradníci. Skutočnosť, že družstvo ČSSR skončilo v dolnej polovici neoficiálneho poradia nie je totiž náhodná a treba s ňou počítať za súčasného stavu i pre najbližšiu budúcnosť. V tejto súvislosti stojí za zmienku, že v *Maďarskej ľudovej republike* slúži pre výchovu matematických talentov o. i. 7 škôl so špeciálnymi matematickými triedami, v ktorých je až 12 hodín matematiky týždenne, pričom osnovy matematiky v týchto triedach sú iné než v ostatných triedach. (U nás v špeciálnych triedach, ktoré máme v celej *ČSSR* tri, je maximálne 6 hodín matematiky týždenne a osnovy

Číslo žiaka	Meno a priezvisko žiaka	Trieda, škola, miesto	Počet bodov dosiahnutých za riešenie úlohy číslo 1	2	3	4	5	6	Súčet bodov	Cena
1	Jan Brychta	3., gymn. Praha	4	3	0	3	0	1	11	III.
2	Anton Černý	3., SVŠ Bratislava	3	0	0	4	1	0	8	—
3	Jan Franců	3., SVŠ Bratislava	3	1	0	5	0	0	9	—
4	Karel Horák	2., gymn. Strakonice	4	0	0	2	0	0	6	—
5	Helena Husová	3., SVŠ Praha	2	1	0	0	1	0	4	—
6	Miroslav Kmošek	3., gymn. Brno	2	0	0	5	0	0	7	—
7	Štefan Sakáloš	3., SVŠ Prievidza	2	0	0	6	0	0	8	—
8	Imrich Vrťo	2., gymn. Rim. Sobota	1	0	0	0	1	0	2	—
Súčet počtu bodov			21	5	0	25	3	1	55	

matematiky sú v nich prakticky rovnaké ako v ostatných triedach.) Podobne ako v *MĽR* sa o matematické talenty starajú aj v *ZSSR* a v *NDR*. Tak napr. v *Kyjeve*, *Moskve*, *Novosibírsku* a iných sovietskych univerzitných mestách sú veľmi kvalitné stredné školy, nad ktorými majú po odbornej stránke patronát príslušné univerzity. Učia na nich čiastočne vysokoškolskí učitelia. Podobne sa o výchovu talentov stará napr. *Humboldtova univerzita v Berlíne*. Uvedená činnosť plne podporovaná ministerstvami školstva neslúži samozrejme len príprave reprezentantov pre *MMO*, ale má značný význam pre prípravu stredoškolákov pre vysokoškolské štúdium.

Ako ukázali diskusie so zahraničnými delegátmi, podobná cieľavedomá a centrálne riadená činnosť pri výchove matematických talentov sa rozbieha tiež napr. v *Bulharsku*, *Rakúsku*, *Juhoslávii*, a vo *Veľkej Británii*. Preto, ak nechceme trvale zaostať nielen na *MMO*, ale hlavne v úrovni výchovy matematicky nadaných žiakov, bude treba, aby naše ministerstvá školstva prijali čím skôr účinné opatrenia v tomto smere. Niektoré doporučenia im predložil jednak organizačný výbor XIII. *MMO* a jednak *ÚV MO* pri hodnotení celkových výsledkov XIII. *MMO*. Treba dúfať, že tieto hlasy budú čoskoro vypočuté a po postupnom cieľavedomom realizovaní predložených návrhov sa dosiahne želateľná náprava.