22. ročník matematické olympiády

III. Soutěžní úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 22. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1972-1973. 15. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1974. pp. 77–131.

III. Soutěžní úlohy I. kola

(Komentář a řešení)

1. KATEGORIE A

A–I–1

Je dána posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = 7^n - 3^{n+4}$.

a) Rozhodněte, zdali je tato posloupnost rostoucí nebo klesající.

b) Určete mezi členy a_n nejmenší a největší (pokud existují).

c) Určete, pro která n platí $a_n \leqq 0$.

d) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí: a_n je dělitelno čtyřmi.

Tato úloha se dá řešit pomocí rekurentního vzorce pro členy posloupnosti, který vyjadřuje porovnání členů rozdílem. Mimoto užijeme ještě porovnání podílem. Vypočteme

$$a_{n+1} - a_n = (7^{n+1} - 3^{n+5}) - (7^n - 3^{n+4}),$$

tj.

$$a_{n+1} - a_n = 6(7^n - 3^{n+3}). \tag{1}$$

Pro rozhodnutí v otázce a) je třeba zjistit, pro která n je

$a_{n+1} - a_n \geqq 0$ a pro která je $a_{n+1} - a_n \leqq 0$. Porovnání čísel 7^n a 3^{n+3} podílem dává

$$\frac{7^n}{3^{n+3}} = \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^n > \frac{1}{27} \cdot 2^n. \tag{2}$$

Pro všecka $n \geqq 5$ je $\frac{1}{27} \cdot 2^n > 1$, tj. $7^n - 3^{n+3} > 0$.

Pro $n = 4$ je $7^4 - 3^7 = 2401 - 2187 > 0$. Platí tedy nerovnost $a_{n+1} - a_n > 0$ pro všecka $n \geqq 4$. Zbývá vyšetřit $n = 1,2,3$. Sestavíme tabulku pro $n = 1,2,3,4,5$, kterou budeme potřebovat pro otázku c).

n	1	2	3	4	5
$a_n = 7^n - 3^{n+4}$	-236	-680	-1844	-4160	-2876

(3)

Z tabulky (3) je vidět, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající pro $n \leqq 4$ a rostoucí pro $n \geqq 4$.

Kladné a záporné členy najdeme z tabulky (3) tímto výpočtem:

$$\frac{7^n}{3^{n+4}} = \frac{1}{81} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^n > \frac{1}{81} \cdot 2{,}3^n > \frac{1}{84} \cdot 2{,}3^n. \tag{4}$$

Protože pro $n \geqq 6$ je $2{,}3^n > 140$, dostaneme ze (4) pro $n \geqq 6$

$$\frac{7^n}{3^{n+4}} > \frac{140}{84} = \frac{5}{3} > 1,$$

tj. pro $n \geqq 6$ je

$$a_n = 7^n - 3^{n+4} > 0.$$

Nejmenší člen je a_4, největší člen neexistuje.

Otázka d). Protože $7^n - 3^{n+3}$ je sudé pro všecka n, plyne z (1)

$$a_{n+1} = a_n + 4b_n , \qquad (b_n \text{ celé}).$$

Je-li tedy a_n násobkem čtyř, platí to i pro a_{n+1}. Podle tabulky (3) je a_1 násobkem čtyř, proto je každé a_n násobkem čtyř (indukce).

Řešitelé mohou rozhodovat o znamení čísla $7^n - 3^{n+3}$ (viz (1)) pomocí logaritmů: je totiž

$$7^n - 3^{n+3} < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^n < 3^3 \Leftrightarrow n < \frac{3 \log 3}{\log 7 - \log 3} .$$

A–I–2

V rovině ortonormálních souřadnic x,y zobrazte množinu všech bodů, o jejichž souřadnicích x,y platí:

$$|x| + |y| \leqq 4$$

a zároveň

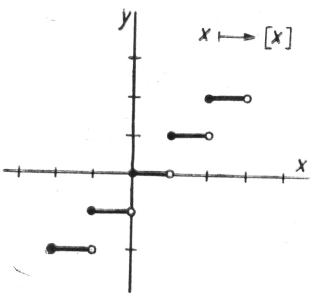
$$\left[\sqrt{8 - x^2}\right] \geqq y \geqq [x] ,$$

kde symbol $[a]$ značí celou část reálného čísla a. V této množině určete všechny body, jejichž souřadnicemi jsou celá čísla vyhovující vztahu

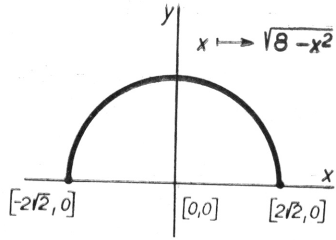
$$y = \big| [x] - |x| \big| .$$

Úloha A–I–2 pokračuje v tematice schodových funkcí a funkcí z nich odvozených. Nejdříve byste mohli sestrojit po řadě grafy funkcí $x \mapsto [x]$, $x \mapsto \sqrt{8 - x^2}$, $x \mapsto \left[\sqrt{8 - x^2}\right]$, $x \mapsto \big| [x] - |x| \big|$.

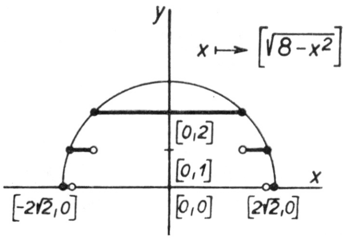
Tyto grafy jsou na obr. 19, 20, 21, 22. Pak už zbývá jen sestrojit průnik grafů relací $|x| + |y| \leqq 4$ (obr. 23) a



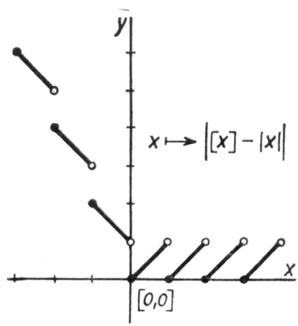
Obr. 19



Obr. 20



Obr. 21



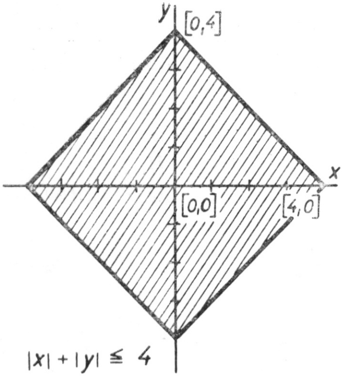
Obr. 22

$\left[\sqrt{8-x^2}\right] \geqq y \geqq [x]$ (obr. 24). Poznámka: čárkované úsečky a body vyznačené bílými kroužky nepatří příslušným grafům.

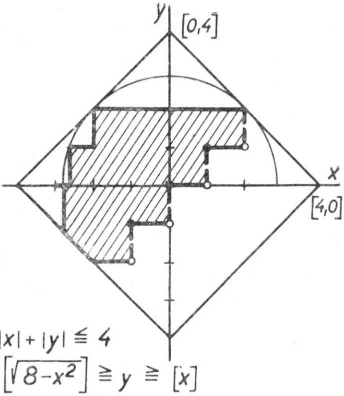
Konečným výsledkem je dvoubodová množina

$$\{[0; 0]\,,\ [-1; 2]\}\,.$$

Úloha A–I–2 je spíše časově náročná než myšlenkově obtížná.



Obr. 23



Obr. 24

A–I–3

Nech je daný pravidelný n-úholník $A_1A_2\ldots A_n$ vpísaný jednotkovej kružnici. Vypočítajte

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} A_iA_j^2 \,.$$

Tato úloha se řeší asi nejvhodněji komplexními čísly. Řešitel si jen potřebuje uvědomit vzorec pro vzdálenost bodů $A = [\alpha]$, $B = [\beta]$, kde α, β jsou komplexní čísla. Platí

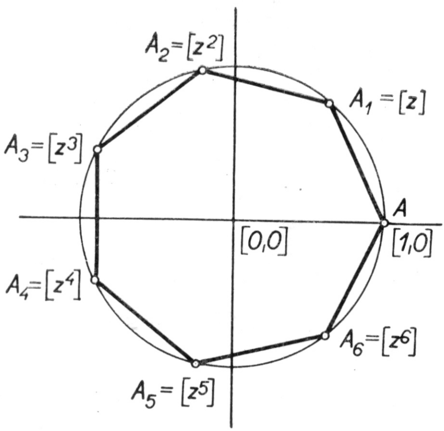
$$AB = |\,\alpha - \beta\,|,\; AB^2 = |\,\alpha - \beta\,|^2 = (\alpha - \beta)\,(\overline{\alpha} - \overline{\beta}), \quad (5)$$

kde $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ jsou čísla komplexně konjugovaná k α, β. Na první pohled je vidět, proč saháme po komplexních číslech: kdybychom použili ortonormálních reálných souřadnic, měli bychom místo jednoduchého vzorce (5) složitější vzorec

$$AB^2 = (\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 ,$$

kde α_i, β_i jsou (reálné) souřadnice bodů A, B.

Na obr. 25 označuje z komplexní číslo, jehož obrazem



Obr. 25

je ten vrchol A_1 pravidelného n-úhelníka $A_1A_2\ldots A_n$, který leží v prvním nebo druhém kvadrantě a je nejbližší vrcholu $A_n = [1; 0]$ (na obr. 25 je $n = 7$). Zřejmě je $A_k = [z^k]$ a dále platí $z^n - 1 = 0$, $z \neq 1$, tj.

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0 . \qquad (6)$$

Je vhodné uvědomit si, jak si můžeme pomoci geometrickou úvahou: uvážíme, že hledaný součet S je součtem druhých mocnin délek všech stran a všech úhlopříček

n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$ (každá je vzata jen jednou, což vyplývá z podmínky $i < j$). Proto platí

$$S = \frac{n}{2}(A_1A_n^2 + A_2A_n^2 + \ldots + A_{n-1}A_n^2) .$$

Použijeme-li vzorce (5), vyjde

$$S = \frac{n}{2}\Big((z-1)(\bar{z}-1) + (z^2-1)(\bar{z}^2-1) + \ldots$$
$$\ldots + (z^{n-1}-1)(\bar{z}^{n-1}-1)\Big) .$$

Protože $\bar{z}^k = z^{n-k}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, je

$$S = \frac{n}{2}\left(n - 1 - 2(z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) + n - 1\right),$$

neboli podle (6)

$$S = n(n-1) - n(z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) =$$
$$= n(n-1) + n = n^2 .$$

Řešitelé úlohy A–I–3 by se měli seznámit se souvislostí teorie pravidelných mnohoúhelníků s kořeny binomické rovnice $x^n = 1$ (Kreisteilung). Je to sice klasická partie, ale přitom je to estetické a užitečné použití aritmetiky komplexních čísel. Možná, že by takové stručné poučení bylo nejlepším uvedením do problematiky úlohy A–I–3.

A–I–4

Dokažte:

a) V tětivovém pětiúhelníku s vnitřními úhly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ (v tomto pořadí) platí

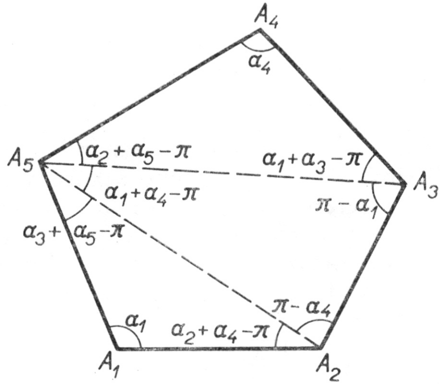
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3\pi ,$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 > \pi , \quad \alpha_2 + \alpha_4 > \pi , \quad \alpha_3 + \alpha_5 > \pi ,$$
$$\alpha_4 + \alpha_1 > \pi , \quad \alpha_5 + \alpha_2 > \pi .$$

b) Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ duté úhly (tj. $0 < \alpha_i < \pi$) splňující všechny uvedené vztahy, pak existuje tětivový pětiúhelník s těmito vnitřními úhly (v tomto pořadí).

Úloha A–I–4 je pro řešitele kategorie A velmi snadná. Pro rozřešení její první části stačí uvědomit si dvě skutečnosti:

(a) Každý tětivový pětiúhelník je konvexní a součet velikostí jeho vnitřních úhlů je 3π;

(b) s pomocí vztahu $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3\pi$ lze vypočítat velikosti všech úhlů na obr. 26.



Obr. 26

Obr. 26 zároveň také vede k rozřešení druhé části úlohy. Sestrojí se $\triangle A_1A_2A_5$, jehož úhly mají velikosti uvedené na obr. 26; tento trojúhelník se dá sestrojit, neboť je $\alpha_2 + \alpha_4 > \pi$, $\alpha_3 + \alpha_5 > \pi$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3\pi$. Dále se sestrojí v polorovině opačné k $A_2A_5A_1$

trojúhelník $A_2A_3A_5$, jehož úhly mají velikosti uvedené na obr. 26 (úhly α_1, α_4 jsou duté). Protože je

$$\sphericalangle A_5A_1A_2 = \pi - \sphericalangle A_5A_3A_2 \,,$$

leží podle známé věty V bod A_3 na kružnici k opsané trojúhelníku $A_1A_2A_5$, tj. všecky čtyři body A_1, A_2, A_3, A_5 leží na kružnici k. V polorovině opačné k $A_3A_5A_2$ se dále sestrojí trojúhelník $A_3A_4A_5$ tak, aby jeho úhly měly velikosti uvedené na obr. 26. Podle věty V leží bod A_4 na kružnici opsané trojúhelníku $A_2A_3A_5$, což je kružnice k. Leží tedy všech pět vrcholů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 na kružnici k.

Klíčem k řešení je věta V, kterou si můžeme zopakovat např. v souvislosti s *Ptolemaiovou větou* nebo některou konstrukční úlohou o tětivovém čtyřúhelníku. Tuto větu lze použít i při řešení úlohy A–I–6.

A–I–5

V množině všech reálných čísel je dána binární operace

$$x * y = x + y + xy \,.$$

Zjistěte, pro které trojice reálných čísel x, y, z platí

$$(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$$

(distributivnost operace $*$ vzhledem k operaci $*$).

Úloha je z oblasti strukturální matematiky. Nezvyklé je snad to, že jde o distributivitu operace k ní samé. Přepíšeme-li danou operaci podle její definice, dostaneme nakonec rovnici

$$z\,(1 + z)\,(1 + x)\,(1 + y) = 0 \,,$$

která ovšem *neplatí pro všechna* x, y, z. Operace $*$ není tedy distributivní sama k sobě.

Do tematiky úlohy vnikneme tak, že řešíme *úlohu:* Určit konstanty a, b tak, aby operace

$$x \bigtriangledown y = ax + by$$

byla distributivní sama k sobě. Rovnici

$$(x \bigtriangledown y) \bigtriangledown z = (x \bigtriangledown z) \bigtriangledown (y \bigtriangledown z)$$

přepíšeme postupně takto:

$$(ax + by) \bigtriangledown z = (ax + bz) \bigtriangledown (ay + bz)\,,$$

$$a(ax + by) + bz = a(ax + bz) + b(ay + bz)\,,$$

tj.

$$b(a + b - 1)z = 0\,. \tag{7}$$

Vztah (7) platí pro všechna x, y, z, právě když je $b = 0$ nebo $a + b = 1$. Příkladem operace, která je distributivní sama k sobě, je tedy třeba

$$x \bigtriangledown y = ax + (1 - a)\,y\,,$$

kde $a \neq 0$.

A–I–6

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož prodloužené protější strany se protínají v bodech E, F. Dokažte:

a) Kružnice k_1, k_2, k_3, k_4, které jsou opsány po řadě trojúhelníkům AED, BEC, ABF a DCF, procházejí týmž bodem G.

b) Středy O_1, O_2, O_3, O_4 těchto kružnic leží na kružnici procházející bodem G.

c) Paty kolmic z bodu G na všechny strany čtyřúhelníka $ABCD$ leží na téže přímce.

Je to úloha tradiční, ale přitom záludná. Rozhodně je třeba o ní podrobněji hovořit. Jde totiž o vyhledání vhodného aparátu. Poněvadž je to úloha polohová, zdá se přirozené užít metody souřadnic. Když to však zkusíme, poznáme, že i když se použijí komplexní souřadnice v rovině, vyjdou složité výrazy; proto tak raději postupovat nebudeme. Složité je, že v úloze je směs prvků projektivních (čtyřroh) a prvků metrických (kružnice). To vede zcela přirozeně k myšlence projektivizovat úlohu, tj. nahradit kružnice kuželosečkami a pak užít prostředků projektivní geometrie. Tato cesta je však skoro všem středoškolákům nedostupná. Nezbývá tedy než se vrátit k aparátu elementární geometrie, ale snažit se cestu trochu usnadnit. Ti, kdo znají základy kruhové geometrie, si jistě uvědomí, že v úloze jde o konfiguraci kruhových křivek v *Möbiově rovině*. Přibereme-li k sedmi bodům $A,B,C,D,$ E,F,G (G je společný bod všech čtyř kružnic k_1,k_2,k_3,k_4) ještě nevlastní bod N^∞ Möbiovy roviny *), dostaneme konfiguraci osmi bodů a osmi kruhových křivek (jsou to přímky AB, BC, CD, DA a kružnice k_1, k_2, k_3, k_4). Každým bodem konfigurace

$$\Gamma = \{A, B, C, D, E, F, G, N^\infty,$$
$$AB, BC, CD, DA, k_1, k_2, k_3, k_4\}$$

procházejí právě čtyři její kruhové křivky (což je společný název pro přímku a kružnici) a na každé její kruhové křivce leží právě čtyři její body. Část a) úlohy A–I–6 žádá vlastně důkaz existence konfigurace Γ.

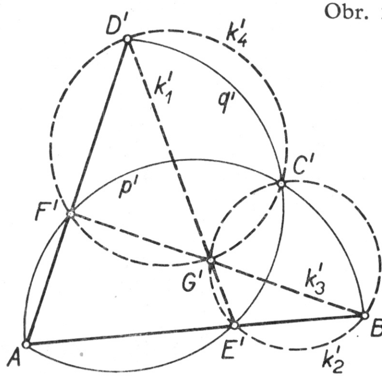
Pro elementární důkaz této existence máme k dispozici jen větu o obvodových úhlech, resp. větu V o tětivovém čtyřúhelníku; je však známo, že účinným prostředkem v kruhové geometrii je zobrazení, zvané *kruhová inverze*.

*) Jak známo, má Möbiova rovina jediný nevlastní bod, kterým procházejí všecky přímky, ale kterým neprochází žádná kružnice. Nejnázornějším modelem Möbiovy roviny je kulová plocha, jejíž jeden význačný bod je obrazem nevlastního bodu.

Doporučujeme vám, abyste se při této příležitosti s jeho základními vlastnostmi seznámili.

Místo abychom dokazovali, že existuje bod G, kterým prochází každá z kružnic k_1, k_2, k_3, k_4, změníme kruhovou inverzí situaci tak, že budeme dokazovat obdobnou vlastnost pro dvě kružnice a dvě přímky.

Obr. 27



Zvolíme bod A za střed inverze; její mocnost zvolíme libovolně (třeba tak, aby všecky body B, C, D, E, F ležely vně základní kružnice).

Označíme-li $p = AB$, $q = AD$ a označíme-li čárkováním obrazy bodů v inverzi, dostaneme situaci naznačenou na obr. 27. Pomocí tohoto obrázku provedeme výpočet:

$$\sphericalangle C'G'D' = \sphericalangle C'F'D' = \pi - \sphericalangle C'F'A =$$

$$= \pi - (\pi - \sphericalangle C'B'A) = \sphericalangle C'B'A = \sphericalangle C'B'E' =$$

$$= \pi - \sphericalangle C'G'E' .$$

První rovnost vyplývá z věty o obvodových úhlech, třetí a šestá z vlastnosti tětivového čtyřúhelníka (věta V). Z rovnosti

$$\sphericalangle C'G'D' = \pi - \sphericalangle C'G'E' \qquad (8)$$

plyne, že body D', G', E' jsou kolineární, tj. že přímka k_1' prochází bodem G'. K úplnému důkazu je třeba ovšem ještě doplnit úvahu o uspořádání bodů na kružnicích.

Výměnou označení ($k_2' \leftrightarrow k_4'$, $p' \leftrightarrow q'$, $E' \leftrightarrow F'$, $B' \leftrightarrow D'$) dostaneme z (8) rovnost

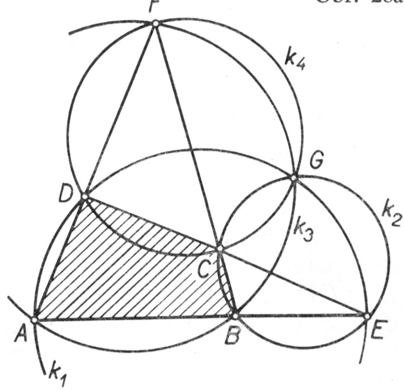
$$\sphericalangle\, C'G'B' = \pi - \sphericalangle\, C'G'F';$$

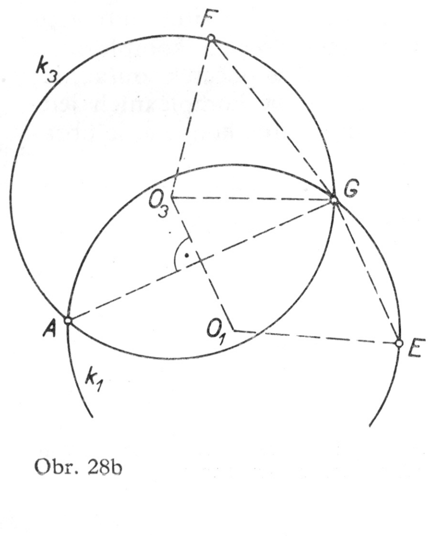
z ní vyplývá, že také přímka k_3' prochází bodem G'. Přejdeme-li inverzí zpět k nečárkovaným bodům, je část a) úlohy A–I–6 rozřešena.

Principem důkazu části b) je odůvodnění, že čtyřúhelník $O_1O_2GO_3$ je tětivový (změnou označení pak dostaneme, že i čtyřúhelník $O_3O_4GO_1$ je tětivový a tím bude část b) rozřešena). Poněvadž obě kružnice k_1, k_2 procházejí body E, G, je $O_1O_2 \perp GE$; na základě toho vyjádříme $\sphericalangle\, O_1O_2G$ (obr. 28a). Poněvadž kružnice k_3 prochází body A, B, G, F, vypočteme $\sphericalangle\, O_1O_3G$ (středový úhel) pomocí $\sphericalangle\, AFG$ (obvodový úhel).

Pomocí obr. 28ab jsme tedy získali:

Obr. 28a





Obr. 28b

$$\sphericalangle O_1O_2G = \pi - \frac{1}{2} \sphericalangle GO_2E = \pi - \sphericalangle GBE = \pi -$$

$$- \sphericalangle GCE = \sphericalangle GCD\,,$$

$$\sphericalangle O_1O_3G = \frac{1}{2} \sphericalangle AO_3G = \sphericalangle AFG = \sphericalangle DFG.$$

Protože čtyřúhelník $DFGC$ je tětivový, je $\sphericalangle GCD + \sphericalangle DFG = \pi$, tj. $\sphericalangle O_1O_2G + \sphericalangle O_1O_3G = \pi$, tj. také čtyřúhelník $O_1O_2GO_3$ je tětivový, což jsme měli dokázat.

Jako impuls pro řešení části c) úlohy A–I–6 by snad mělo stačit upozornění, že každá kružnice sestrojená nad některým průměrem GF, GD, GC, GE obsahuje právě dvě paty kolmic spuštěných z bodu G na přímky AB, BC, CD, DA. Pokud zná řešitel *Simsonovu větu*, je část c) triviální. Neboť bod G leží např. na kružnici k_1 opsané trojúhelníku ADE, a proto paty kolmic spuštěných z bodu G na přímky AD, DE, EA leží na Simsonově přímce. Snad by bylo nejvhodnější, kdyby si řešitel tuto větu předem odvodil*), např. výpočtem pomocí komplexních čísel (střed opsané kružnice se zvolí za počátek souřadnic; vrcholy trojúhelníka pak jsou obrazy komplexních jednotek ε_1, ε_2, ε_3, bod, z něhož spouštíme kolmice, je obrazem komplexní jednotky ε_0).

Úloha A–I–6 je dosti rafinovaná a náročná; můžete se však na ní naučit hodně věcí z tradiční geometrie.

---

*) Viz též Příklad 14 na str. 69 v 15. svazku ŠMM – M. Koman: Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic.

B–I–1

Dokážte, že pre každé dve reálne čísla a, b platí

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}\,.$$

Zistite všetky prípady, v ktorých nastane rovnosť.

Tuto úlohu můžeme řešit velmi primitivně, jediným použitím známé nerovnosti $|a+b| \leqq |a| + |b|$, která platí pro všecka reálná čísla a, b. Předpokládáme, že daná nerovnost platí pro jistou dvojici a, b; vynásobíme ji kladným číslem $(1+|a|)\,.\,(1+|b|)\,.\,(1+|a+b|)$; dostaneme

$$\begin{aligned} &|a+b|\,(1+|a|)\,(1+|b|) \leqq \\ &\leqq |a|\,(1+|a+b|)\,(1+|b|) + \\ &+ |b|\,(1+|a+b|)\,(1+|a|) \end{aligned} \tag{1}$$

a dále po úpravě

$$(|a| + |b| - |a+b|) + 2|ab| + |a+b|\,.\,|ab| \geqq 0\,. \tag{2}$$

Tento výpočet (rozbor úlohy) je vlastně hledáním všech *možných* řešení nerovnice

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}\,. \tag{3}$$

Ukázalo se však, že nerovnice (2), odvozená z (3), má za řešení všecky dvojice reálných čísel a, b. Dá se tedy očekávat, že totéž bude platit pro nerovnici (3). To se dokáže obrácením postupu: pro libovolnou dvojici reálných čísel a, b platí (2); z (2) lze odvodit (1); *dělíme-li* (1) *kladným číslem* $(1 + |a|) \cdot (1 + |b|) \cdot (1 + |a + b|)$, dostaneme z (2) nerovnost (3).

Tento postup, i když trochu těžkopádnější, je přirozenější než takové triky, jako je např. sečtení vztahů

$$|a + b| \leqq |a| + |b| ,$$

$$|a + b| \, (|a| + |b|) = |a + b|(|a| + |b|)$$

a další umělé úpravy, tj. použití nerovností

$$\frac{|a|}{1 + |a| + |b|} \leqq \frac{|a|}{1 + |a|} ,$$

$$\frac{|b|}{1 + |a| + |b|} \leqq \frac{|b|}{1 + |b|} .$$

Také na další otázku úlohy snadno odpovíme. Rovnost v (3) nastane, právě když platí rovnost v (2). Rovnost v (2) nastane, právě když je

$$|a| + |b| - |a + b| = 0$$

a zároveň

$$|ab| = 0 ,$$

tj. právě když aspoň jedno z čísel a, b je rovno nule.

Domníváme se, že by se měla převést daná *důkazová úloha* na *úlohu určovací* a měla by se řešit úpravami (1), (2), tj. řešení nerovnice (3) by se mělo převést na řešení nerovnice (2) a měla by se prokázat jejich ekvivalence.

Připojujeme ještě tuto poznámku: Úloha B–I–1 svádí k tomu, abychom se zmínili o *funkcích konkávních* a *konvexních*.

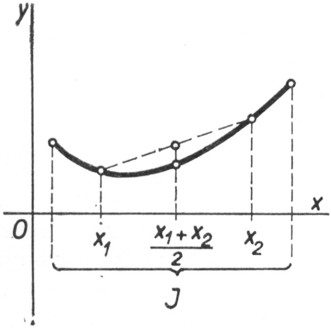
Funkce $f(x)$ jedné reálné proměnné x se nazývá *konvexní*, resp. *konkávní* v otevřeném intervalu $\mathbf{I}$, právě když pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ platí

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\Big(f(x_1) + f(x_2)\Big) ,$$

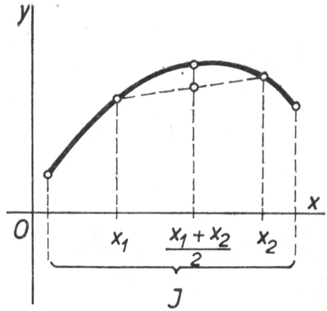
resp.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqq \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right).$$

Typický graf konvexní a konkávní funkce ukazují obr. 29 a 30.



Obr. 29



Obr. 30

Má-li funkce f v každém bodě intervalu $\mathbf{I}$ první a druhou derivaci, je konvexní (konkávní), právě když $f''(x) \geqq \geqq 0$ $(f''(x) \leqq 0)$ pro všecka $x \in \mathbf{I}$. Podle tohoto kritéria snadno poznáme, že např. funkce $x \mapsto x^2$ je konvexní v každém otevřeném intervalu, funkce $x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ je konkávní v intervalu $(0; +\infty)$.

Studujeme funkci f: $x \mapsto \dfrac{|x|}{1 + |x|}$ neboli

$$x \mapsto 1 - \frac{1}{1 + |x|}.$$

Pro každé dvě reálná čísla a, b platí

$$\frac{|a+b|}{1 + |a+b|} \leqq \frac{|a+b|}{1 + \dfrac{|a+b|}{2}}; \tag{4}$$

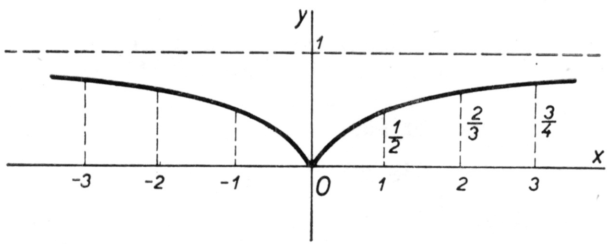
kdyby se tedy podařilo dokázat konvexitu funkce f v intervalu $(-\infty; +\infty)$, tj. platnost formule

$$\frac{\left|\frac{a+b}{2}\right|}{1+\left|\frac{a+b}{2}\right|} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\right),$$

neboli

$$\frac{|a+b|}{1+\frac{|a+b|}{2}} \leqq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}, \qquad (5)$$

vyplynula by z (4), (5) dokazovaná nerovnost. Bohužel však funkce f není konvexní pro všecka x. To ukazuje její graf na obr. 31.



Obr. 31

Studujeme-li konkávní a konvexní funkce, můžeme si dokázat i *Jensenovu formuli* jako zajímavé cvičení na práci s nerovnostmi a na velmi zajímavý a neobvyklý způsob užití matematické indukce. (Viz např. *Meschowski*: Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie, Berlin, Springer-Verlag.)

B–I–2

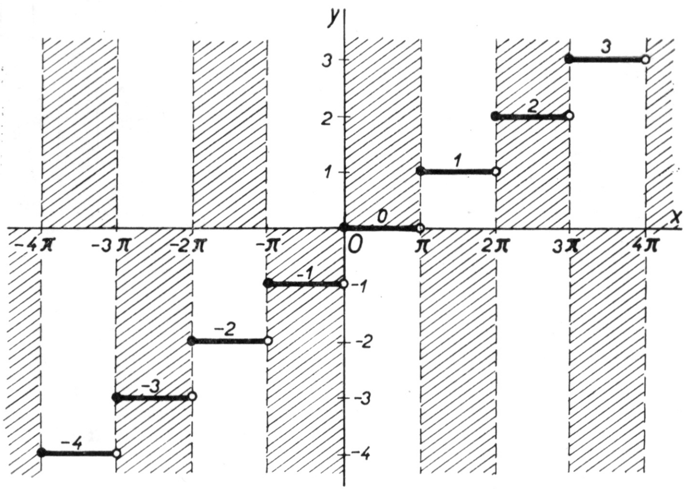
Dokažte, že pro každé α platí

$$\sin \alpha = (-1)^{\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}\,,$$

kde $[x]$ je celé číslo vyhovující vztahům

$$[x] \leqq x < [x] + 1\,.$$

Nalezněte obdobný vztah pro vyjádření $\cos\alpha$ pomocí $\sin\alpha$.



Obr. 32

Úloha B–I–2 vyžaduje, abychom dokázali upřesnění formule z goniometrie. Vzorce

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \text{ nebo } |\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

se mají nahradit určitější formulí

$$\sin\alpha = (-1)^{\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]} \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Jinými slovy: pomocí funkce $x \mapsto [x]$ (celá část z x) se má vyjádřit, v kterých intervalech je funkce $\alpha \mapsto \sin\alpha$ nezáporná, a v kterých je nekladná.

Doporučujeme, abyste sestrojili graf podle obr. 32, na kterém je patrno, kterými částmi roviny probíhá sinusoida. Jsou to vyšrafované části roviny. Hranice k nim nemusíme počítat, neboť pro všecka celá čísla k je $\sin k\pi = 0$. Na obr. 32 je dále zakreslen graf schodové funkce $x \mapsto \left[\frac{x}{\pi}\right]$.

Zřejmě je

$(-1)^{\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]} = 1$ pro $\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]$ sudé a $(-1)^{\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]} = -1$ pro $\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]$ liché;

to platí, i když je číslo $\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]$ záporné.

Analogicky se odvodí vzorec pro kosinus:

$$\cos\alpha = (-1)^{\left[\frac{1}{2}\pm\frac{\alpha}{\pi}\right]} \cdot \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Toto odvození je nepatrně složitější; v obou případech se doporučuje sestrojit graf schodové funkce; ovšem v prvním případě je funkce $\alpha \mapsto \left[\frac{\alpha}{\pi}\right]$ dána, v druhém případě musíme funkci $\alpha \mapsto \left[\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\pi}\right]$ nejdříve najít.

Obdobně lze upravit další skupinu dvou goniometrických vzorců

$$\sin\frac{\alpha}{2} = (-1)^{\left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,, \tag{6a}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = (-1)^{\left[\frac{1}{2}\pm\frac{\alpha}{2\pi}\right]} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,. \tag{6b}$$

Mimoto je možné odvodit ze vzorců (6a), (6b) příslušný vzorec pro tangentu.

B–I–3

Ze 100 osob koupilo na předvánočním trhu 80 lidí textilní zboží, 70 lidí knihy a 55 lidí elektrotechnické výrobky. Kolik osob nejméně koupilo výrobky všech tří druhů? Jestliže každá z uvedených 100 osob si koupila aspoň jeden z uvedených výrobků, kolik osob nejvýše koupilo výrobky všech tří druhů?

Tato úloha náleží do oblasti úloh z naivní teorie množin. Klíčem k jejímu řešení jsou *Vennovy diagramy* a jeden ze vzorců o počtu prvků tří konečných množin, jejich průniků a sjednocení. Označíme-li n_1, n_2, n_3 počty prvků množin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, p_{12}, p_{23}, p_{31} počty prvků průniků $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_3 \cap \mathbf{M}_1$, s_{12}, s_{23}, s_{31} počty prvků sjednocení $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_1$ a konečně p_{123}, s_{123} počty prvků průniku $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3$ a sjednocení $\mathbf{M}_1 \cup \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$, platí vzorce:

$$s_{123} = n_1 + n_2 + n_3 - p_{12} - p_{23} - p_{31} + p_{123}\,, \tag{7a}$$

$$s_{123} + n_1 + n_2 + n_3 = s_{12} + s_{23} + s_{31} + p_{123}\,. \tag{7b}$$

Použijeme vzorce (7b). Dostaneme

$$p_{123} = n_1 + n_2 + n_3 - 2s_{123} + K\,,$$

kde

$$K = (s_{123} - s_{12}) + (s_{123} - s_{23}) + (s_{123} - s_{31}) \geqq 0\,.$$

Proto

$$p_{123} \geqq n_1 + n_2 + n_3 - 2s_{123}\,. \tag{8}$$

V našem případě je $s_{123} = 100$, $n_1 = 80$; $n_2 = 70$, $n_3 = 55$. Z (8) pak plyne

$$p_{123} \geqq 5\,. \tag{9}$$

Odhadujeme p_{123} (počet zákazníků, kteří koupili výrobky všech tří druhů), a to zdola pro první otázku, shora pro druhou otázku.

Omezení shora dostaneme z upravené formule (7a). Je

$$s_{123} = n_1 + n_2 + n_3 - 2p_{123} + Z\,,$$

kde

$$Z = (p_{123} - p_{12}) + (p_{123} - p_{23}) + (p_{123} - p_{31}) \leqq 0\,.$$

Je tedy

$$n_1 + n_2 + n_3 - 2p_{123} \geqq s_{123}$$

neboli

$$p_{123} \leqq \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + n_3 - s_{123}). \tag{10}$$

V našem případě dá (10)

$$p_{123} \leqq \frac{1}{2}(80 + 70 + 55 - 100) = \frac{105}{2}\,,$$

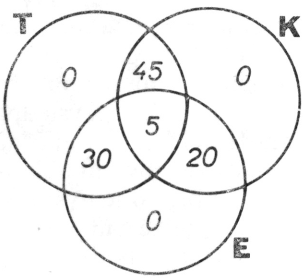
tj.

$$p_{123} \leqq 52\,. \tag{11}$$

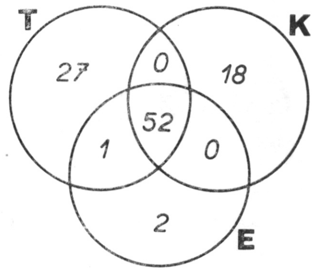
Hlavní myšlenka řešení je asi tato: Je třeba znát formule (7a), (7b) a upravit je tak, aby obsahovaly jednak výraz $K \geqq 0$, jednak výraz $Z \leqq 0$; tak dostaneme odhady pro p_{123} shora (11) a zdola (9).

Zbývá otázka, zda obou hranic (9), (11) pro p_{123} může být dosaženo; také tuto otázku bychom měli studovat.

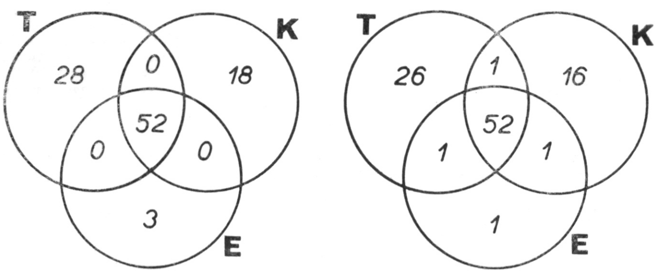
Má-li být $p_{123} = 5$, musí být $K = 0$, tj. musí platit $s_{12} = s_{23} = s_{31} = s_{123} = 100$. Pak je podle známého vzorce $p_{12} = n_1 + n_2 - s_{12} = 80 + 70 - 100 = 50$; obdobně $p_{23} = 25$, $p_{31} = 35$. Vennův diagram s počty prvků je na obr. 33.
Obdobně se postupuje při zkoumání situace $p_{123} = 52$; vyjde např. diagram jako na obr. 34.
Nakonec otázka: Proč nemůže mít diagram na obr. 34 některý z těchto tvarů jako na obr. 35?



Obr. 33



Obr. 34

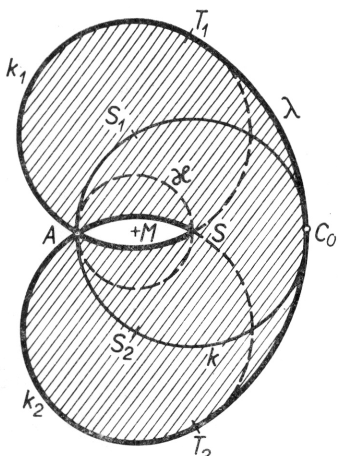


Obr. 35

B–I–4

V rovině je dána kružnice k a na ní bod A. Najděte množinu vrcholů B všech trojúhelníků ABC, u nichž bod C leží na kružnici k a o nichž platí $BC \leqq AB \leqq AC$.

Úloha B–I–4 vyžaduje určit složitější množinu bodů v rovině, a to jednak intuitivně, jednak provedením příslušných důkazů. Předností úlohy je, že není na první pohled patrné, co je hledanou množinou **M** vrcholů B. Výsledná množina **M** je ohraničena vesměs kruhovými oblouky; na obr. 36 je vyšrafována. Hranice k ní patří — výjimku činí body A, C_0, které omezují průměr dané kružnice k se středem S. Hranice množiny **M** se skládá z oblouků $\widehat{AT_1}$, $\widehat{AT_2}$ kružnic k_1, k_2 se středy S_1, S_2, které vzniknou otočením kružnice k o 60° kolem bodu A, a to v kladném i záporném smyslu. Další částí hranice množiny **M** je oblouk $\widehat{T_1C_0T_2}$ kružnice λ se středem A. (Body T_1, T_2 jsou body dotyku kružnic k_1, λ, resp. k_2, λ.)

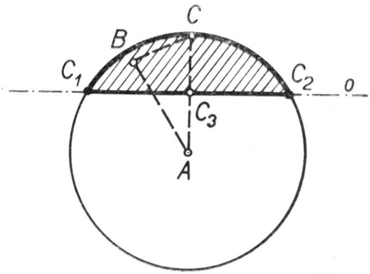


Obr. 36

Množinu **M** vyšetříte intuitivně. Můžete postupovat např. takto: Zvolíte-li libovolný bod $C \in k$, $C \neq A$, je množina všech příslušných vrcholů B uzavřená kruhová úseč $\mathbf{U}_c$ kruhu se středem A a poloměrem AC, omezeného osou o úsečky AC; z ní jsou vypuštěny body úsečky AC (obr. 37). Neboť pro všecky body úseče $\mathbf{U}_c$ a jen pro ně platí

$$BC \leqq AB \leqq AC\,.$$

Poloha $\mathbf{U}_{c0}$ úseče $\mathbf{U}_c$ je úseč $T_1ST_2C_0T_1$. Když bod C probíhá některou polokružnici



Obr. 37

$\widehat{C_0A}$, probíhá C_1 polokružnici $\widehat{T_1A}$ a C_2 polokružnici $\widehat{T_2A}$. Odtud lze odůvodnit, že úsečka C_1C_2 náleží vždy vyšrafovanému obrazci. Protože podle obrácení Thaletovy věty každá z přímek C_1C_2 prochází bodem S, lze snadno dokázat, že každý bod X, který leží v průniku vyšrafovaného obrazce a poloroviny T_1T_2A, náleží množině $\mathbf{M}$, s výjimkou bodu A. Pro body X bílé „čočky“ to dokázat nelze (proč?).

Ze skutečnosti, že všecky body C, C_1, C_2 náleží vyšrafovanému obrazci a že $\sphericalangle\, C_1AC_2 = 120°$, plyne, že každá z úsečí $\mathbf{U}_c$ náleží vyšrafovanému obrazci. Odděleně je třeba prozkoumat hraniční body. Zřejmě je $A \notin \mathbf{M}$; kdyby bylo $C_0 \in \mathbf{M}$, tj. $C_0 = B$, bylo by $AB = AC_0 \leqq \leqq AC$, tj. $B = C$, což je nemožné.

V předchozím je ovšem jen nástin řešení. Je možné, že někdo z řešitelů zvolí metodu souřadnic. Je-li polopřímka $\overrightarrow{AS}$ kladná poloosa x, $AS = 1$, vede vyšetřování množiny $\mathbf{M}$ k analytickému vyjádření

$$x + ty \geqq 1,\ (1 + t^2)(x^2 + y^2) \leqq 4\,,$$

kde t je reálný parametr. Zkoumání těchto nerovnic však asi přesahuje možnosti většiny středoškoláků.

B–I–5

V množině všech reálných čísel je dána binární operace

$$x * y = x + y + xy\,.$$

a) Zjistěte, zda je tato operace komutativní a asociativní a zda má neutrální prvek.

b) Určete všechna reálná čísla x, pro která platí

$$a * (x * x) = b * x\,;$$

proveďte diskusi vzhledem k reálným parametrům a, b.

Také tato úloha vnáší do XXII. ročníku *MO* jisté prvky strukturální matematiky, tj. studium vlastností binárních operací. Zjištění komutativity a asociativity je věcí jednoduchého výpočtu; je třeba zdůraznit kvantifikaci: *pro všecka* x, y, z musí platit

$$x * y = y * x,\quad (x * y) * z = x * (y * z)\,.$$

Při důkazu asociativity vypočteme

$$(x * y) * z = (x + y + xy) * z =$$
$$= x + y + xy + z + (x + y + xy)\, z$$

a

$$x * (y * z) = x + (y * z) + x\,(y * z) =$$
$$= x + y + z + yz + x(y + z + yz)\,.$$

Operace $*$ je tedy komutativní a asociativní.
Neutrálním prvkem může být jen takový prvek e, že pro

všecka x platí $e * x = x * e = x$, neboli vzhledem k tomu, že operace je komutativní, platí

$$x + e + xe = x,$$

tj. $e(1 + x) = 0$, tj. $e = 0$. Číslo 0 je skutečně neutrálním prvkem.

Rovnice $a * (x * x) = b * x$ je „kvadratická", neboť obsahuje výraz $x * x$. Klíčem je opět převedení operace $*$ na operace $+, .$; vyjde

$$a + x + x + x^2 + a(x + x + x^2) = b + x + bx$$

neboli

$$(1 + a)x^2 + (2a - b + 1)x + (a - b) = 0.$$

Výsledek diskuse můžeme shrnout do tabulky:

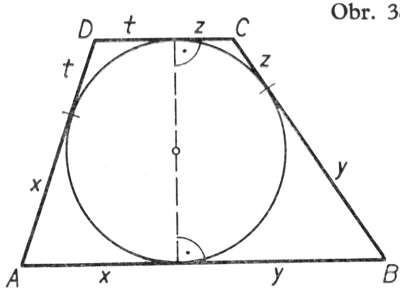
	$b = -1$	$b \neq -1$
$a = -1$	všecka x	$x = -1$
$a \neq -1$	$x = -1$	$x = -1, \dfrac{b-a}{a+1}$

B–I–6

Ak možno lichobežníku vpísať kružnicu, potom geometrický priemer dĺžok oboch jeho ramien je väčší ako geometrický priemer dĺžok oboch jeho základní. Dokážte.

Nepoužijeme-li při jejím řešení trigonometrie, odvodíme pomocnou větu o tečnovém lichoběžníku; ta je klíčem k řešení úlohy.

LEMMA. Budiž $ABCD$ tečnový lichoběžník se základnami $AB = a$, $CD = c$ a rameny $BC = b$, $AD = d$. Buďte x, y, z, t délky tečen vedených po řadě z vrcholů A, B, C, D ke kružnici vepsané lichoběžníku $ABCD$. Pak platí (obr. 38).



Obr. 38

$$xt = yz\,. \tag{12}$$

DŮKAZ. Protože je $AB \parallel CD$, je spojnice dotykových bodů obou základen s kružnicí vepsanou průměrem této kružnice. Vyjádříme dvojím způsobem výšku lichoběžníka $ABCD$:

$$(y + z)^2 - (y - z)^2 = (x + t)^2 - (x - t)^2\,.$$

Odtud plyne (12).

Nyní vypočteme rozdíl druhých mocnin geometrických průměrů $\sqrt{ac}$, $\sqrt{bd}$; je tedy

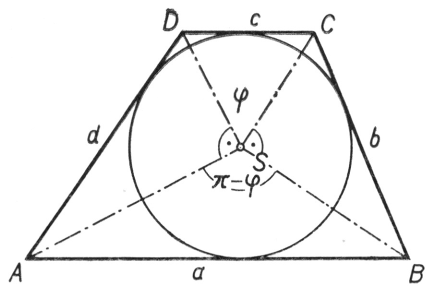
$$bd - ac = (x + t)(y + z) - (x + y)(z + t) =$$
$$= xy + zt - yz - xt,$$

tj.

$$bd - ac = (x - z)(y - t)\,. \tag{13}$$

Zřejmě je $x \neq z$, $y \neq t$; je-li totiž např. $y = t$, plyne z (12) $x = z$ a $ABCD$ je rovnoběžník. Zvolme označení tak, aby bylo $x > z$; pak je $y > t$. Neboť kdyby bylo $t > y$, platilo by $tx > yz$, což je ve sporu s (12). Je-li však $x > z$, $y > t$, je podle (13) $bd > ac$.

TRIGONOMETRICKÉ ŘEŠENÍ. Na obr. 39 je opět tečnový čtyřúhelník $ABCD$ a jemu vepsaná kružnice se



Obr. 39

středem S a poloměrem ϱ. Protože je $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA = \pi$, je $\sphericalangle SAD + \sphericalangle ADS = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ASD = \frac{\pi}{2}$. Obdobně je $\sphericalangle BSC = \frac{\pi}{2}$. Je-li tedy $\sphericalangle CSD = \varphi$, je $\sphericalangle ASB = \pi - \varphi$. Platí tedy pro dvojnásobné obsahy trojúhelníků ABS, BCS, CDS, DAS:

$$AS \,.\, DS = d\varrho,\ BS \,.\, CS = b\varrho,\ AS \,.\, BS \,.\, \sin\varphi = a\varrho,$$
$$CS \,.\, DS \,.\, \sin\varphi = c\varrho\,.$$

Odtud

$$(bd - ac)\,\varrho^2 = AS \,.\, BS \,.\, CS \,.\, DS\,(1 - \sin^2\varphi) > 0\,,$$

neboť je $0 < \varphi < \pi$. Protože je $(bd - ac)\,\varrho^2 > 0$, $\varrho^2 > 0$, je i

$$bd - ac > 0\,.$$

Druhé řešení je trikové: klíčem k němu je vyjádření obsahů trojúhelníků ABS, BCS, CDS, DAS dvojím způsobem. První řešení je přirozenější; klíčem je uvedené lemma.

3. *KATEGORIE C*

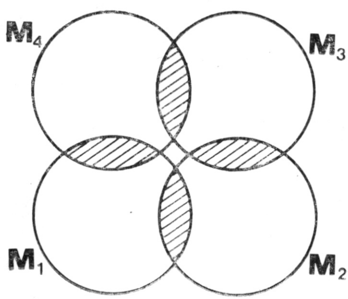
C–I–1

Množiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_4$ mají po řadě n_1, n_2, n_3, n_4, s prvků; přitom platí $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_4 = \emptyset$. Dokažte, že platí

$$2s \geqq n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \,.$$

Může nastat rovnost a v kterém případě?

Úloha C–I–1 uvádí i do kategorie *C* tematiku množinové algebry a Vennových diagramů, kterou uvedla do kategorie *B* úloha B–P–1. Úloha C–I–1 je lehčí, bylo by vhodné doplnit ji úlohou, která je uvedena dále. Ostatně ani úloha B–P–1 není pro účastníky kategorie *C* nedostupná. Aspoň úvod k řešení úlohy B–P–1 by si měli přečíst i účastníci soutěže v kategorii *C*.



Obr. 40

Pro řešení úlohy C–I–1 si zopakujeme tytéž tři formule jako při řešení úlohy B–P–1 a nakreslíme diagram (obr. 40), kde uplatníme předpoklady $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3 =$

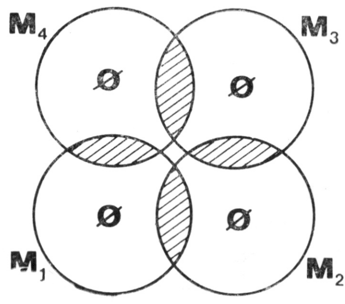
$= \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_4 = \emptyset$. Označíme s_{13}, s_{24} počty prvků množin $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_4$, evidentně platí

$$s \geqq s_{13}; \quad s \geqq s_{24},$$

$$s_{13} = n_1 + n_3; \quad s_{24} = n_2 + n_4. \tag{1}$$

Sečtením prvních dvou a druhých dvou vztahů dostaneme dokazovanou nerovnost.

Rovnost $2s = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ nastane jen v případě, když nastane rovnost v prvních vztazích (1). Z rovnosti $s = s_{13}$ plyne, že obě bílé části diagramů množin $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_4$ značí množiny prázdné; obdobně je tomu s rovností $s = s_{24}$. Diagram pak je na obr. 41.



Obr. 41

Doplňková úloha, o které jsme se zmínili, se týká omezení čísla s *shora*. Označíme p' počet prvků průniku $(\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3) \cap (\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_4)$. Podle prvního vzorce z řešení úlohy B–P–1 je

$$s + p' = s_{13} + s_{24} \tag{2}$$

(vzorec jsme aplikovali na množiny $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3$ a $\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_4$). Z (2) plyne

$$s \leqq s_{13} + s_{24}. \tag{3}$$

Z posledních dvou vzorců (1) a z (3) dostaneme

$$s \leqq n_1 + n_2 + n_3 + n_4. \tag{4}$$

Úhrnem $\frac{1}{2}(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) \leqq s \leqq n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

Rovnost v (4) nastane, právě když každé dvě z množin

$\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$ jsou disjunktní (z rovnosti se odvodí pomocí (3), (2) $p' = 0$) .

C–I–2

Vypočítajte súčet všetkých šestciferných čísel, z ktorých každé má dekadický zápis obsahujúci všetky číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Tato úloha je vlastně jistým předběhnutím kombinatoriky. Elementy kombinatoriky jsou však tak přístupné a zajímavé, že se mohou probírat na základní škole. Domníváme se, že by se řešitelé měli seznámit při příležitosti řešení úlohy C–I–2 s názvem „*permutace*" jako zkratkou pro „uspořádanou n-tici prvků" (v našem případě šestici).

Postup:

a) Uvědomíme si, jak vypsat všecky permutace 3, 4 prvků.

b) Na základě tohoto systému odvodíme vzorec pro výpočet počtu všech permutací n prvků ($n = 2, 3, 4, 5, 6$); názvu „*faktoriál*" a příslušného znaku (6!) nemusíme užívat.

c) Uvážíme, jak zjistit, kolikrát se vyskytuje jistá cifra na jistém místě ve všech permutacích cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6 (je to 1 . 2 . 3 . 4 . 5krát), tj. 120krát.

Počet všech vyšetřovaných čísel je $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720$. Na prvním místě se objeví každá z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6 právě 120krát. Tyto cifry vzhledem ke své místní hodnotě přispějí do celkového součtu sčítancem

$$120 . 1 . 10^5 + 120 . 2 . 10^5 + 120 . 3 . 10^5 + \\ + 120 . 4 . 10^5 + 120 . 5 . 10^5 + 120 . 6 . 10^5,$$

tj.

$$120 \,.\, 10^5 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 120 \,.\, 10^5 \,.\, 21 \,.$$

Obdobně tomu je na 2., 3., 4., 5. a 6. místě; příslušné příspěvky jsou

$$120 \,.\, 10^4 \,.\, 21,\quad 120 \,.\, 10^3 \,.\, 21,\quad 120 \,.\, 10^2 \,.\, 21,$$
$$120 \,.\, 10 \,.\, 21,\quad 120 \,.\, 21.$$

Žádaný součet je tedy

$$s = 120 \,.\, 21(10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) =$$
$$= 120 \,.\, 21 \,.\, 111\,111 \,.$$

Součet s je úctyhodné číslo 279 999 720.

Zde máme dobrou příležitost ocenit výhodu spekulace a dedukce oproti bezduchému mechanickému počítání. Připustíme, že by počtář byl velmi rychlý a absolutně spolehlivý. Napsání 720 šesticiferných čísel „pod sebe" by mu trvalo asi 36 minut (předpokládáme napsání 20 čísel za minutu). Sečtení jednoho sloupce by mu trvalo asi 24 minut (předpokládáme sečtení 30 jednociferných čísel za minutu). Celkový výpočet by tedy trval

$$6 \,.\, 24 + 36 = 180 \text{ (minut)}\,,$$

tj. nejméně tři hodiny.

Jak by vypadal výpočet pomocí kalkulačky?

C–I–3

Řešte graficky a početně v oboru reálných čísel rovnici

$$[3x + 2] = [x + 1];$$

přitom $[a]$ značí celou část čísla a.

Úloha C–I–3 náleží do tématu „*schodových funkcí*“, které jsou jedním z hlavních témat XXII. ročníku *MO*. Úloha C–I–3 navazuje na úlohu C–P–1. Při jejím řešení můžeme použít VĚTY: *Je-li c číslo celé, pak platí pro všecka t*:

$$[c + t] = c + [t] \,. \tag{5}$$

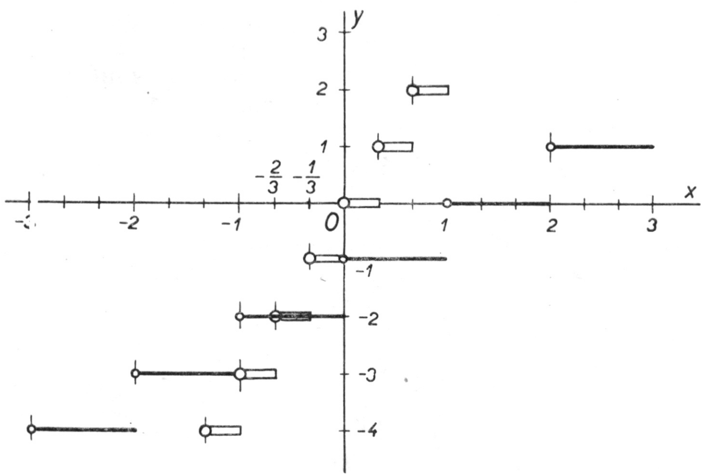
Tato formule se dokáže snadno přímo z definice „*celé části*“. Platí totiž

$$(c + t) - 1 < [c + t] \leqq c + t \,, \tag{6}$$

$$t - 1 < [t] \leqq t \,,$$

a tedy

$$t + c - 1 < [t] + c \leqq t + c \,. \tag{7}$$



Obr. 42

Poněvadž podmínkám $t + c - 1 < x \leqq t + c$ vyhovuje *jediné celé číslo* x, platí vzhledem k (6) a (7) vzorec (5). Danou rovnici upravíme na tvar

$$[3x] + 2 = [x] + 1$$

neboli

$$[3x] = [x] - 1; \tag{8}$$

rovnice (8) má podle (5) táž řešení jako daná rovnice.

Text úlohy žádá, abychom ji řešili *nejdříve* graficky a *pak* teprve početně. Grafy funkcí $x \mapsto [3x]$, $x \mapsto [x] - 1$ jsou dvoje schody; „*výška stupně*" je vždy 1, „*délka stupně*" je u první funkce $\frac{1}{3}$, u druhé 1. Obě „schodiště" stoupají zleva doprava, a to první strměji, druhé pomaleji. Grafy (obr. 42) ukáží také „setkání" obou „schodišť". To si ověříme výpočtem podle následující tabulky (T).

(T)

x	-3	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	2	3
$[3x]$	-9	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6	9
$[x] - 1$	-4	-3	-2	-2	-2	-1	-1	-1	0	1	2

Podle grafu i podle tabulky (T) jsou řešení dané rovnice všecka čísla x, pro něž platí

$$-\frac{2}{3} \leqq x < -\frac{1}{3}.$$

Snadno dokážeme, že rovnice jiná řešení nemá: radíme vám, abyste odůvodnili to, co vidíte na obr. 42, např., že pro všecka $x \geqq -\frac{1}{3}$ je $[3x] > [x] - 1$. Skutečně, je-li $-\frac{1}{3} \leqq x < 0$, je $-1 \leqq 3x < 0$, tj. $[3x] = -1$, $[x] - 1 = -1 - 1 = -2$; je-li $x \geqq 0$, je $[3x] > 3x - 1 \geqq \geqq x - 1 \geqq [x] - 1$.

Obdobně dokážeme, že pro všecka $x < -\frac{2}{3}$ je $[3x] < < [x] - 1$.

C–I–4

Nech $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ sú dĺžky strán dotýčnicového štvoruholníka $ABCD$.

Ak platí $a^2 + b^2 = ab + cd + bc + ad - ac - bd$, je $ABCD$ deltoid. Ak okrem toho platí

$$b^2 + c^2 = bc + ad + cd + ab - bd - ac\,,$$

je $ABCD$ kosočtverec. Dokážte.

Klíče k řešení této úlohy jsou dva:

(a) Znalost věty: součty délek protějších stran tečnového čtyřúhelníka jsou si rovny; vzorec $a + c = b + d$.

(b) Charakteristika deltoidu a kosočtverce: vypuklý čtyřúhelník je deltoidem, právě když některá dvojice sousedních stran jsou shodné úsečky a zbývající dvojice sousedních stran jsou také shodné úsečky; (vypuklý) čtyřúhelník je kosočtvercem, právě když jsou všecky jeho strany navzájem shodné.

Řešení úlohy záleží v tom, že využijeme první dané rovnosti a rovnosti $a + c = b + d$. Danou rovnost upravíme na tvar

$$a(a + c) + b(b + d) = (a + c)(b + d).$$

Dosadíme $b + d = a + c$; vyjde

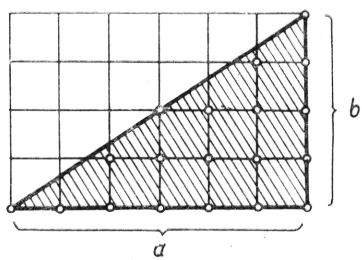
$$(a + c)(a + b) = (a + c)^2. \tag{9}$$

Protože je $a + c > 0$, plyne z (9) $a + b = a + c$, tj. $b = c$, $a = d$. Podle věty (b) je tedy čtyřúhelník deltoid.

Druhá z daných rovností vznikne z první *cyklickou záměnou*: $a \to b \to c \to d \to a$. Proto můžeme obměnit cyklicky i výsledek: mimo vztahy $b = c$, $a = d$ budou platit ještě vztahy $c = d$, $b = a$. Podle věty (b) (druhá část) je tedy v tomto případě čtyřúhelník kosočtverec.

C–I–5

V rovině je dána čtvercová síť složená z jednotkových čtverců. Zvolme libovolný pravoúhlý trojúhelník **T**, jehož vrcholy leží ve vrcholech sítě a odvěsny v přímkách sítě. Označme p obsah trojúhelníka **T**, h, resp. v, počet vrcholů sítě, které jsou na hranici, resp. ve vnitřku trojúhelníka **T**. Dokažte, že platí



Obr. 43

$$2p - h - 2v + 2 = 0.$$

Úloha C–I–5 podobně jako C–I–6 vnáší do soutěže téma z kombinatorické geometrie.

Při řešení úlohy C–I–5 začneme experimentovat např. s pravoúhlým trojúhelníkem o odvěsnách $a = 6$, $b = 4$ (obr. 43); a, b jsou obecně čísla celá, jejich největšího společného dělitele označíme δ. Na čísle δ zřejmě záleží; jsou-li a, b nesoudělná, neleží na přeponě mimo vrcholy žádný mřížový bod. První impuls k řešení úlohy bude tedy odvození vzorce

$$h = (a - 1) + (b - 1) + (\delta - 1) + 3\,,$$

tj.

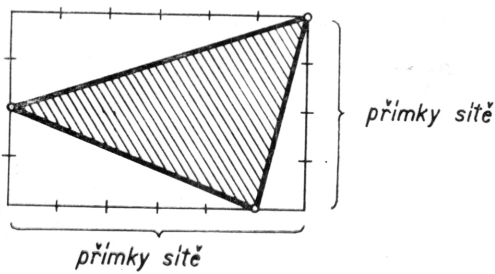
$$h = a + b + \delta\,. \tag{10}$$

Další poznámka se týká odvození vzorce pro $2v$; podnětem je doplnit trojúhelník na pravoúhelník (obr. 43). Uvnitř pravoúhelníka je $(a - 1)(b - 1)$ mřížových bodů; zřejmě však platí

$$(a - 1)(b - 1) = 2v + \delta - 1\,,$$

neboli

$$2v = ab - a - b - \delta + 2\,. \tag{11}$$



Obr. 44

Protože $2p = ab$, dostaneme z (10) a (11)

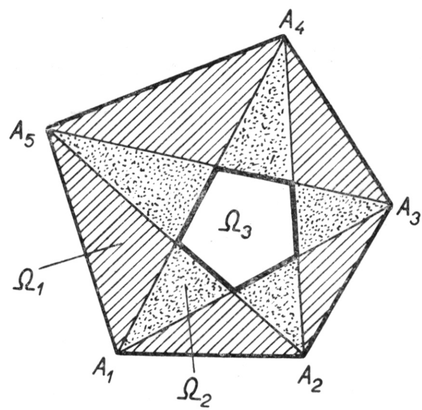
$$2p - 2v - h =$$
$$= ab - ab + a + b + \delta - 2 - a - b - \delta = -2\,.$$

Pokusíme se rozšířit odvozený vzorec pro libovolný *mřížový trojúhelník*, tj. trojúhelník, jehož všecky tři vrcholy jsou mřížové body. Dostatečný podnět dává obr. 44.

C–I–6

V rovině je dán vypuklý pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ a uvnitř něho bod A_6, který neleží na žádné úhlopříčce. Kolika různými způsoby lze sestrojit dva trojúhelníky s vrcholy v bodech A_i tak, aby trojúhelníky neměly žádný společný bod? (Diskuse.)

Tato úloha se může vyřešit v podstatě experimentálně. Načrtneme konvexní pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ a sestrojíme všechny jeho úhlopříčky (v počtu 5). Tím se rozdělí pětiúhelník celkem na 11 částí obr. (45) tří typů; tyto typy označíme Ω_1, Ω_2, Ω_3. Na obr. 45 jsou oblasti typu Ω_1 vyšrafovány, oblasti typu Ω_2 jsou vytečkovány, oblast typu Ω_3 je bílá a



Obr. 45

ohraničená tlustou čarou. Oblasti jsou otevřené (bez hranic) a bod A_6 náleží jedné z nich.

Leží-li bod A_6 v oblasti Ω_1, jsou žádané dvojice trojúhelníků 3, např. $(A_1A_5A_6, A_2A_3A_4)$, $(A_1A_6A_2, A_3A_4A_5)$, $(A_4A_5A_6, A_1A_2A_3)$. Polointuitivně ověříme, že tyto dvojice vyhovují. Měli bychom si uvědomit, že všech dvojic trojúhelníků je 10 (stačí zvolit tři vrcholy tak, aby mezi nimi byl A_6). Snadno ověříme, že zbývajících sedm dvojic trojúhelníků, mezi nimiž jsou trojúhelníky $A_3A_5A_6$, $A_3A_4A_6$, $A_2A_5A_6$, $A_2A_4A_6$, $A_1A_3A_6$, $A_2A_3A_6$, $A_1A_4A_6$, nevyhovuje.

Leží-li bod A_6 v oblasti Ω_2, jsou žádané dvojice trojúhelníků 4, např. $(A_1A_2A_6, A_3A_4A_5)$, $(A_1A_5A_6, A_2A_3A_4)$, $(A_6A_2A_3, A_1A_4A_5)$, $(A_6A_4A_5, A_1A_2A_3)$.

Leží-li bod A_6 v oblasti Ω_3, je žádaných dvojic trojúhelníků 5, a to $(A_6A_1A_2, A_3A_4A_5)$, $(A_6A_2A_3, A_1A_4A_5)$, $(A_6A_3A_4, A_1A_2A_5)$, $(A_6A_4A_5, A_1A_2A_3)$, $(A_6A_5A_1, A_2A_3A_4)$.

Tím je zároveň provedena diskuse řešení.

4. *KATEGORIE Z*

Z–I–1

Dokažte, že existuje jediné prvočíslo p takové, že p, $p + 2$, $p + 4$ jsou prvočísla.

Vyšetřování aritmetických posloupností, jejichž všecky členy jsou prvočísla (nazveme je p-posloupnosti), je problémová situace, ze které lze vytěžit řadu pěkných úloh. P-posloupnost s diferencí 2 může obsahovat nejvýše tři členy. Jsou-li totiž x, $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ čtyři členy

p-posloupnosti, jsou pro zbytky při dělení třemi tři možnosti uvedené v následující tabulce ve třech řádcích:

x	$x + 2$	$x + 4$	$x + 6$
0	2	1	0
1	0	2	1
2	1	0	2

Protože je $x \geqq 2$, je $x + 2 \geqq 4$, $x + 4 \geqq 6$, $x + 6 \geqq 8$. V každém řádku tabulky je tedy aspoň jeden násobek tří větší než 3 a to je číslo složené.

Omezíme-li se jen na posloupnosti tříčlenné, přichází v úvahu jen první řádek tabulky a první člen musí být násobek tří, který je prvočíslo, tj. $x = 3$; dále je $x + 2 = 5$, $x + 4 = 7$, což je řešení naší úlohy.

Omezíme-li se jen na posloupnosti dvojčlenné s diferencí 2 — tj. na tzv. prvočíselná dvojčata, přichází v úvahu jen p-posloupnost 3, 5 a pak p-posloupnosti podle 3. řádku tabulky, např. 17, 19 nebo 29, 31 nebo 41, 43 atd. První člen x dvojice nemůže končit v dekadickém vyjádření trojkou, pokud je $x > 3$; neboť pak by druhý člen končil pětkou a přitom by platilo $x + 2 > 5$, tj. druhý člen $x + 2$ by bylo číslo složené. Jak je známo, není dosud rozřešena otázka, zda množina prvočíselných dvojčat je nekonečná.

Do série úloh z této problémové situace patří např. úloha nalézt všecky p-posloupnosti aspoň tříčlenné s diferencí 4. (Diference p-posloupnosti, která má aspoň tři členy, nemůže být číslo liché — proč? Jak je tomu u dvojčlenných posloupností?)

Sestavme tabulku pro čtyřčlennou p-posloupnost s diferencí 4; do tabulky zapisujme zbytky při dělení třemi (jsou tři možnosti, uvedené ve třech řádcích tabulky).

x	$x + 4$	$x + 8$	$x + 12$
0	1	2	0
1	2	0	1
2	0	1	2

Protože je $x \geqq 2$, je $x + 4 \geqq 6$, $x + 8 \geqq 10$, $x + 12 \geqq$ $\geqq 14$. V každém řádku je tedy aspoň jeden násobek tří větší než 3, tj. číslo složené. *Závěr: neexistuje čtyřčlenná p-posloupnost s diferencí* 4.

Omezíme-li se na tříčlenné p-posloupnosti s diferencí 4, přichází v úvahu jen první řádek a první člen je $x = 3$; další členy jsou $x + 4 = 7$, $x + 8 = 11$.

Omezíme-li se na dvojčlenné p-posloupnosti s diferencí 4 a vyloučíme-li posloupnost 3, 7, přichází v úvahu jen druhý řádek tabulky. Sem patří „dvojčata" 7, 11; 13, 17; 19, 23; 97, 101 a další. Snad i těchto dvojčat je nekonečně mnoho.

Úloha o p-posloupnostech s diferencí 4 by mohla být úvodem k úloze Z–I–1. Bylo by možné vyšetřovat obdobným způsobem i p-posloupnosti s diferencí 6; zde bychom vypsali do tabulky zbytky při dělení pěti. Všecky tyto úlohy jsou vhodnou příležitostí k procvičování dalšího pojmu elementární číselné teorie — k pojmu zbytku, resp. zbytkové třídy.

Z–I–2

V písemné práci se vyskytl lomený výraz

$$\frac{ax + b}{x + c};$$

a, b, c byla určitá čísla. Luděk si pamatuje, že při dosazení $x = 1$ dostal výsledek 1, při dosazení $x = -1$ dostal -1, když dosadil $x = 2$, zjistil, že se nedá hodnota daného výrazu vypočítat. Pomozte mu najít čísla a, b, c.

Z textu úlohy dostaneme

$$\frac{a + b}{1 + c} = 1, \qquad \frac{-a + b}{-1 + c} = -1\,.$$

Hodnotu výrazu nebylo možno vypočítat pro $x = 2$, protože jmenovatel byl roven nule, tj. $c + 2 = 0$. Z uvedených rovnic dostaneme

$$a = -2,\ b = 1,\ c = -2\,.$$

Lomený výraz, s kterým se Luděk potýkal, byl tedy

$$\frac{1 - 2x}{x - 2}\,.$$

A nyní připojíme k úloze Z–I–2 komentář, který je určen pro vyspělejší účastníky *MO*.

Úloha Z–I–2 je úloha na určenost lineární lomené funkce. Jde o funkci tvaru

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{1}$$

kde a, b, c, d jsou konstanty. Zpravidla ještě předpokládáme, že je $ad - bc \neq 0$.

Z teorie víme, že třemi dvojicemi $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$, $x_3 \to y_3$, kde x_i jsou navzájem různá čísla a y_i jsou navzájem různá čísla, je určena funkce (1) jednoznačně; tj.

jednoznačně jsou určeny poměry $a : b : c : d$. Pomocí této věty lze vytvořit libovolně mnoho úloh takového typu, jako je úloha Z–I–2.

Např. je-li $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, dostaneme pro koeficienty a, b, c, d rovnice

$$\frac{b}{d} = y_1, \quad \frac{a+b}{c+d} = y_2, \quad \frac{-a+b}{-c+d} = y_3 \,. \tag{2}$$

Protože je $\frac{b}{d} = y_1$, je $d \neq 0$ a můžeme *volit* $d = 1$. (Proč?) Z (2) pak dostaneme

$$b = y_1, \; a + y_1 = cy_2 + y_2, \; -a + y_1 = -cy_3 + y_3. \tag{3}$$

Sečtením posledních dvou rovnic (3) vyjde

$$2y_1 = c(y_2 - y_3) + y_2 + y_3$$

a odtud

$$c = \frac{2y_1 - y_2 - y_3}{y_2 - y_3} \,. \tag{4a}$$

Z druhé rovnice (3) pak vypočteme

$$a = \frac{y_1y_2 - 2y_2y_3 + y_1y_3}{y_2 - y_3} \,. \tag{4b}$$

Podle (4a), (4b) je

$$ad - bc = a - cy_1 = 2\,\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_1)}{y_2 - y_3} \neq 0 \,.$$

Jedna ze tří podmínek může být nahrazena jako v úloze Z–I–2 tím, že k určitému x nelze vypočítat příslušné y. Nechť je např. opět $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, y_3 však nelze vypočítat, tj. $-c + d = 0$. Podmínky pro koeficienty tedy jsou

$$\frac{b}{d} = y_1, \quad \frac{a+b}{c+d} = y_2, \qquad -c + d = 0.$$

Můžeme opět zvolit $d = 1$; pak je

$$d = 1,\ b = y_1,\ c = 1,\ a = 2y_2 - y_1\,.$$

Opět je $ad - bc = 2(y_2 - y_1) \neq 0$. Funkce

$$y = \frac{(2y_2 - y_1)\,x + y_1}{x + 1}$$

skutečně splňují dané podmínky.

Úloha obdobného typu, která může být uvedením do této tematiky, zní:

Koeficienty funkce $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ *jsou takové, že se nedá vypočítat* y *pro* $x = 1$ *a že pro žádné* x *nevyjde* $y = 1$.

První podmínka vede při $d = 1$ k vyjádření $y = \dfrac{ax + b}{-x + 1}$.

Uplatníme druhou podmínku: položíme $y = 1$ a budeme se snažit vypočítat x. Dostaneme rovnici $-x + 1 = ax + b$ neboli

$$x(1 + a) = 1 - b\,. \tag{5}$$

Rovnice (5) je neřešitelná, právě když $a = -1$, $b \neq 1$. Daným podmínkám tedy vyhovuje nekonečně mnoho funkcí

$$y = \frac{-x + b}{-x + 1}, \quad b \neq 1.$$

Určenost lineární lomené funkce (1) třemi dvojicemi

$[x; y]$ je v souhlase se skutečností, že při $c \neq 0$ je grafem funkce (1) *rovnoosá hyperbola*, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné s osami souřadnic (ortonormálních). Směry asymptot určují oba nevlastní body hyperboly a je tedy třeba ještě tří dalších bodů. Zvolíme-li tyto tři body tak, že leží v přímce, např.

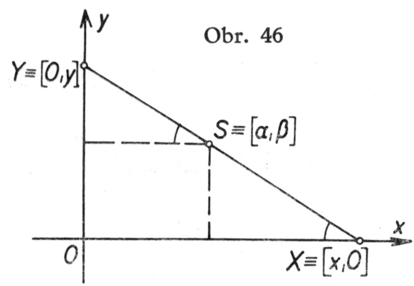
$$[3; 0], \; [0; 3], \; [2; 1]\,, \tag{6}$$

dá nám známý postup tyto koeficienty: $a = -1$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 1$; lineární lomená funkce přejde ve funkci polynomickou

$$y = -x + 3\,,$$

jejímž grafem je *přímka* obsahující všecky tři body (6). Lineární lomená funkce má však ještě jiný geometrický význam. Zvolme soustavu ortonormálních souřadnic; mimo osy souřadnic zvolme bod S. Promítneme-li proměnný bod $X = [x; 0]$ osy x z bodu S do (proměnného) bodu $Y = [0; y]$ osy y, pak platí

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{1bis}$$



Obr. 46

kde a, b, c, d jsou vhodné reálné konstanty, $ad - bc \neq 0$ (obr. 46). Obráceně však neplatí, že každá lineární lomená funkce (1 bis) vyjadřuje promítnutí osy x do osy y.

ČÍSELNÝ PŘÍKLAD. Budiž $S = [2; 1]$; pak bod $A = [3; 0]$ se promítá do bodu $B =$

$= 0; 3]$ a bod $P = [0; 0]$ se promítá sám do sebe. Platí tedy

$$0 = \frac{b}{d}, \quad 3 = \frac{3a + b}{3c + d}, \quad 2c + d = 0 \,. \tag{7}$$

Poslední podmínka (7) vyjadřuje, že bod [2;0] nemá žádný průmět na ose y. Zvolíme-li $d = -2$ (a to můžeme), dají nám rovnice (7)

$$a = 1, \; b = 0, \; c = 1, \; d = -2$$

a vyjádření funkce (1 bis) je

$$y = \frac{x}{x - 2} \,.$$

Jak je vidět, poskytuje úloha Z–I–2 mnoho možností k důvěrnému seznámení s lineární lomenou funkcí, s jejím užitím v geometrii, k procvičování soustav tří lineárních rovnic v souvislosti s větou o určenosti *lineární lomené funkce* třemi dvojicemi $[x;y]$. Velmi doporučujeme interpretovat lineární lomenou funkci jako analytické vyjádření zobrazení (projektivního) — viz poslední řešený příklad; věta o určenosti lineární lomené funkce se pak jeví jako analytický protějšek *Staudtovy věty* o určenosti projektivity. V zadané úloze Z–I–2 je lomený výraz dehomogenizován, koeficient při x v jmenovateli je totiž roven 1.

Z–I–3

Je-li bod O libovolný vnitřní bod trojúhelníka ABC a jsou-li A_1, B_1, C_1 po řadě průsečíky přímek AO, BO, CO s protějšími stranami, pak platí

$$\text{a)} \qquad \frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1;$$

$$\text{b)}\quad \frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2.$$

Dokažte.

1. V této úloze jde o poměry délek, což napovídá, že jde o úlohu z afinní geometrie. Pro starší čtenáře bude užitečné, uvedeme-li řešení, které se opírá o *vlastnosti dělicího poměru*; znalost základních vlastností dělicího poměru totiž umožňuje sestrojit si mnohé varianty úlohy. Řešitelé kategorie Z najdou jednoduché řešení na str. 127 odst. 5, 6.

2. Jsou-li X, Y, Z tři různé body v přímce, definujeme *dělicí poměr* (XYZ) tak, že

$$(XYZ) = \pm \frac{XZ}{YZ};$$

volíme znaménko $+$, leží-li bod Z *vně* úsečky XY, a znaménko $-$, leží-li bod Z *uvnitř* úsečky XY.

Utvoříme-li z daných kolineárních bodů X, Y, Z všech šest permutací, dostaneme šest hodnot dělicího poměru:

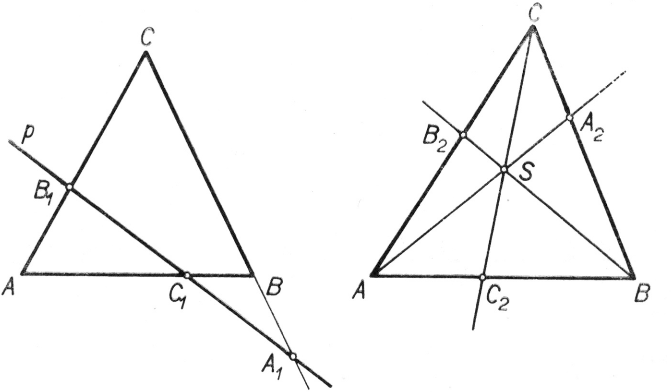
$$(XYZ) = \lambda, (YXZ) = \frac{1}{\lambda}, (XZY) = 1 - \lambda,$$

$$(ZXY) = \frac{1}{1-\lambda}, (YZX) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

$$(ZYX) = 1 - \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \quad (1)$$

3. Další důležité vlastnosti dělicích poměrů vyjadřují věty *Menelaova* a *Cevova*.

VĚTA MENELAOVA. Je dán trojúhelník ABC a přímka p jeho roviny, která neprochází žádným z vrcholů



Obr. 47

A, B, C a protíná přímky AB, BC, CA po řadě v bodech C_1, A_1, B_1. Pak platí

$$(ABC_1) . (BCA_1) . (CAB_1) = 1 .$$

VĚTA CEVOVA. Je dán trojúhelník ABC a bod S jeho roviny, který neleží na žádné z přímek AB, BC, CA; přímky AS, BS, CS nechť protínají přímky BC, CA, AB po řadě v bodech A_2, B_2, C_2. Pak platí

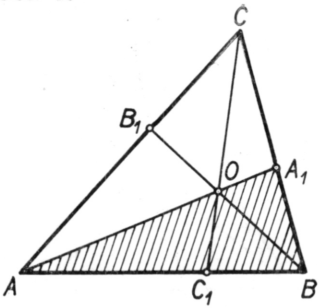
$$(ABC_2) . (BCA_2) . (CAB_2) = -1 .$$

Obě situace ukazuje obr. 47. Připomínáme ještě, že dělicí poměry jsou tvořeny „*cyklicky*" a že obě věty lze obrátit.

4. Protože v úloze Z–I–3 leží bod O uvnitř ABC, platí (obr. 48)

$$\frac{OA_1}{AA_1} = (OAA_1), \quad \frac{OB_1}{BB_1} = (OBB_1), \quad \frac{OC_1}{CC_1} = (OCC_1). \quad (2)$$

Obr. 48



Aplikujeme Menelaovu větu na $\triangle ABA_1$ a přímku OC; vyjde

$$(ABC_1).(BA_1C).(A_1AO) = 1$$

a dále podle (1)

$$(AA_1O) = (ABC_1).(BA_1C),$$

$$(AA_1O) = (ABC_1)[1 - (BCA_1)]. \tag{3}$$

Podle (1) je

$$(OAA_1) = \frac{1}{(AOA_1)} = \frac{1}{1 - (AA_1O)}. \tag{4}$$

Označíme-li

$$(ABC_1) = \lambda_3, \ (BCA_1) = \lambda_1, \ (CAB_1) = \lambda_2,$$

přepíšeme (3) a (4) ve tvaru

$$(AA_1O) = \lambda_3(1 - \lambda_1) = \lambda_3 - \lambda_1\lambda_3,$$

$$(OAA_1) = \frac{1}{1 - \lambda_3 + \lambda_1\lambda_3}. \tag{5a}$$

Cyklickou záměnou dostaneme

$$(OBB_1) = \frac{1}{1 - \lambda_1 + \lambda_2\lambda_1}, \tag{5b}$$

$$(OCC_1) = \frac{1}{1 - \lambda_2 + \lambda_3\lambda_2}.$$

Podle (2), (5a), (5b) vypočteme součet $\sum \frac{OA_1}{AA_1}$ (zápis znamená součet tří příslušných členů)

$$\sum \frac{OA_1}{AA_1} = \frac{1}{1 - \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3} + \frac{1}{1 - \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2} + \frac{1}{1 - \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3}.$$

Protože je podle Cevovy věty $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$, rozšíříme-li první zlomek číslem λ_2, dostaneme

$$\sum \frac{OA_1}{AA_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_3 - 1} + \frac{1}{1 - \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3} + \frac{1}{1 - \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2},$$

$$\sum \frac{OA_1}{AA_1} = \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3} + \frac{1}{1 - \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}. \tag{6}$$

První zlomek na pravé straně (6) rozšíříme číslem λ_1; vyjde

$$\sum \frac{OA_1}{AA_1} = \lambda_1 \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2 - 1} + \frac{1}{1 - \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2} = 1 .$$

Tím je dokázána první rovnost.

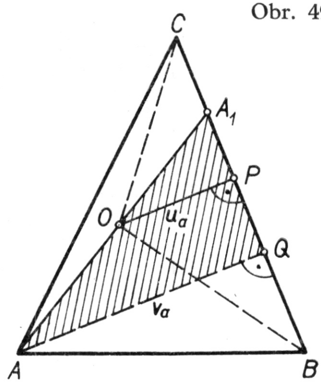
5. Protože je $AO = AA_1 - OA_1$, je

$$\frac{AO}{AA_1} = 1 - \frac{OA_1}{AA_1},$$

a tedy

$$\sum \frac{AO}{AA_1} = 3 - \sum \frac{OA}{AA_1} = 2 .$$

Tím je dokázána druhá rovnost. Přitom zápis $\sum \frac{AO}{AA_1}$ znamená součet příslušných tří členů.



Obr. 49

6. Poněvadž obě dokazované rovnosti vyjadřují vlastnosti, které se zachovávají podobným zobrazením, dají se dokazovat jednak použitím podobnosti, jednak pomocí obsahů. Všimneme si dvou podobných trojúhelníků A_1AQ, A_1OP (které se mohou redukovat na úsečky AA_1, OA_1, je-li $AA_1 \perp BC$) — viz obr. 49. Při označení z tohoto obrázku dostaneme

$$\frac{OA_1}{AA_1} = \frac{u_a}{v_a} = \frac{au_a}{av_a} = \frac{\Delta BCO}{\Delta BCA}.$$

Cyklickou záměnou určíme $\frac{OB_1}{BB_1}$, $\frac{OC_1}{CC_1}$. Sečtením dostaneme první rovnost; druhou rovnost dokážeme jako dříve (viz odst. 5).

Tento způsob je na první pohled jednodušší, ale první způsob (odst. 4) ukazuje obecnější metodu, které se dá použít i v případě, že např. bod O leží vně trojúhelníka ABC; pak ovšem podíly

$$\frac{OA_1}{AA_1}, \frac{OB_1}{BB_1}, \frac{OC_1}{CC_1}$$

se musí nahradit příslušnými dělicími poměry.

Z-I-4

Je dán kvádr $ABCDEFGH$ se středem S, jehož hrany mají délky $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$. Uvnitř kvádru je dán bod X.

a) Vyjádřete součet druhých mocnin vzdáleností bodu X od všech vrcholů kvádru pomocí a, b, c, SX.

b) Platí výsledek odstavce a) i pro body ležící vně kvádru nebo na jeho povrchu?

Tato úloha nevyžaduje vůbec vynalézavost — je to drilová úloha na algebraické výpočty. Kvádr $ABCDEFGH$ rozdělíme na osm kvádrů, které mají vždy jeden vrchol X a za protější vrchol jeden z vrcholů daného kvádru. Vzdálenosti AX, BX, CX, DX, EX, FX, GX, HX jsou délky tělesových úhlopříček těchto osmi kvádrů; tyto vzdálenosti vypočteme pomocí délek hran těchto kvádrů. Označíme-li vzdálenosti bodu X od stěn $ADHE$, $ABFE$, $ABCD$ po řadě x, y, z, jsou tyto délky hran

$$x, y, z, \; a - x, \; b - y, \; c - z\,. \tag{7}$$

Pak se vyjádří

$$AX^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad BX^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2\,,$$

$$CX^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2, \ldots, HX^2 =$$

$$= x^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2, \tag{8}$$

$$SX^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2. \tag{9}$$

Přitom užíváme rovností $(x - a)^2 = (a - x)^2$, $(y - b)^2 = (b - y)^2$, $(z - c)^2 = (c - z)^2$.

Hledaný součet je podle (8)

$$\sigma = 8\,(x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz) + 4\,(a^2 + b^2 + c^2). \tag{10}$$

Z (9) plyne

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = SX^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \tag{11}$$

Spojením (10), (11) dostaneme řešení úlohy a)

$$\sigma = 8\,SX^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)\,. \tag{12}$$

Leží-li bod X na povrchu nebo vně kvádru, nahradíme v (7) rozdíly $a - x$, $b - y$, $c - z$ absolutními hodnotami $|a - x| = |x - a|$, $|b - y| = |y - b|$, $|c - z| = |z - c|$; další výpočet i výsledek (12) zůstávají nezměněny. Tím je rozřešena úloha b).

Je patrno, že celý postup, zejména při řešení úlohy b), je v podstatě obcházením metody souřadnic. Domníváme se, že olympionici by se měli s tímto principem seznámit; jde zejména o vzorec pro vzdálenost bodů $[x_1, y_1, z_1]$, $[x_2, y_2, z_2]$

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\,.$$

Musíme ovšem zdůraznit, že platí — obdobně jako vzorec pro délku tělesové úhlopříčky kvádru, z něhož vlastně vznikl — *jen* v soustavě ortonormálních souřadnic. Dále musíme zdůraznit, že vzorec platí, ať jsou čísla x_i, y_i, z_i jakákoli — nezáporná či záporná; to je jeho hlavní přednost.

Protože mezi přípravnými úlohami není obdobná úloha stereometrická, bylo by vhodné rozřešit si nejprve tuto ÚLOHU:

Jsou dány dva různé body A, B; máme vyšetřit množinu všech bodů X v prostoru, pro které platí $AX^2 + BX^2 = k$, kde k je kladná konstanta.

Označíme M střed úsečky AB a dokážeme, že MX je konstantní; je třeba diskutovat řešení vzhledem k parametrům k, AB. Za určitých předpokladů je hledanou množinou kulová plocha.

Složitější je úloha, kde jsou dány tři nekolineární body A, B, C a vyšetřuje se množina všech bodů X v prostoru, pro něž platí $AX^2 + BX^2 + CX^2 = k$, kde k je kladná konstanta. Výsledkem je za určitých předpokladů opět kulová plocha, jejímž středem je těžiště trojúhelníka ABC.

Kdežto při řešení první úlohy se vystačí „s planimetrickými výpočty“, při druhé úloze se neobejdeme bez souřadnic.