23. ročník matematické olympiády

II. Přípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 23. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1976. pp. 35–88.

KOMENTÁŘE K ŘEŠENÍ PŘÍPRAVNÝCH ÚLOH KATEGORIE A I. KOLA

A – P – 1

Nechť $\mathscr{A}$ je konečná množina s k prvky, $(k > 1)$, nechť $\mathscr{P}$ je množina všech konečných posloupností prvků z $\mathscr{A}$. Jsou-li α, β dvě posloupnosti z $\mathscr{P}$, $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, řekneme, že α je úsekem β, jestliže $n \leqq m$ a $a_i = b_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Nechť $\mathscr{R}$ je konečná část množiny $\mathscr{P}$ s touto vlastností: ke každé posloupnosti $\alpha \in \mathscr{P}$, která není úsekem žádné posloupnosti z $\mathscr{R}$, lze v $\mathscr{R}$ nalézt právě jednu posloupnost, která je úsekem posloupnosti α.

Jestliže v $\mathscr{R}$ je r posloupností, kolik existuje v $\mathscr{P}$ posloupností, jež jsou úsekem a) právě jedné, b) alespoň jedné posloupnosti z $\mathscr{R}$?

KOMENTÁŘ

Formulace úlohy je značně složitá a budete s ní mít asi potíže. Je třeba jí věnovat dost času a absolvovat tak užitečné cvičení v pochopení komplikovanějšího matematického textu.

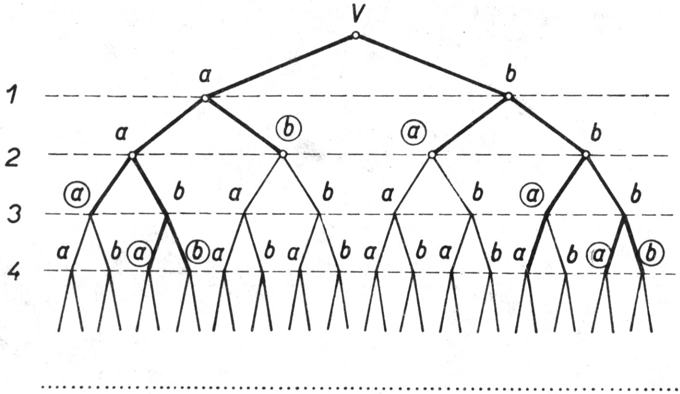
Označme r počet posloupností množiny $\mathscr{R}$. Doporučujeme, abyste si situaci znázornili stromem např. pro $k = 2$, $r = 8$. Je-li $\mathscr{A} = \{a, b\}$, zakreslíme schéma

$$\mathscr{R} = \{aaa, aaba, aabb, ab, ba, bba, bbba, bbbb\}.$$

Posloupnosti z $\mathscr{P}$ jsou zobrazeny ve stromu všemi cestami (jsou konečné i nekonečné, ale množina je nekonečná). Posloupnosti z $\mathscr{R}$ jsou zobrazeny ve stromu r konečnými cestami (na obr. 2 jsou příslušné cesty ukončeny okroužkovanými písmeny). Na každé cestě leží právě jeden „okroužkovaný bod"; to vyplývá z vlastnosti, kterou je v textu charakterizována množina $\mathscr{R}$. Jak patrno, vyjadřovali jsme se v předcházejících větách geometricky; doporučujeme, abyste si stále uvědomovali korespondenci geometrických a aritmetických faktů.

Zavedeme ještě jeden parametr; impuls k jeho zavedení vyplyne dále z rozhodnutí nalézt odpověď na otázku b) pomocí stromu. Označíme s největší počet členů, vyskytující se v posloupnostech z $\mathscr{R}$, v příkladě na obr. 2 je $s = 4$.

Nyní můžeme zodpovědět bezprostředně otázku a). Každá posloupnost z $\mathscr{P}$ je úsekem sama sebe; posloupnost $\alpha \in \mathscr{R}$ je jediným úsekem α, který je úsekem jen jediné posloupnosti z $\mathscr{R}$ (totiž α). Neboť každý „pravý" úsek posloupnosti α je úsekem ještě jiných posloupností z $\mathscr{R}$, jak ukazuje větvení stromu. Tak např. na obr. 2 je posloupnost bb úsekem posloupností $bba \in \mathscr{R}$, $bbba \in \mathscr{R}$, $bbbb \in \mathscr{R}$; naproti tomu posloupnost bba (která je z $\mathscr{R}$) není úsekem žádné jiné



Obr. 2

posloupnosti z $\mathscr{R}$, jak plyne z charakteristické vlastnosti množiny $\mathscr{R}$.

Jádrem úlohy je otázka b). Probírejte nejprve jednotlivé cesty (posloupnosti) z $\mathscr{R}$ a určujte, kolik cest z $\mathscr{P}$ (posloupnosti z $\mathscr{P}$) každá z nich obsahuje. Při tomto zkoumání rozložíme $\mathscr{R}$ v s skupin: v cesty (posloupnosti) jednoprvkové, atd. až v cesty s-prvkové; jejich počty označíme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Na obr. 2 je tento rozklad dán „úrovněmi", na kterých cesty z $\mathscr{R}$ končí; je tedy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 4$. Pro úroveň $1, 2, \ldots, s$ vypočítáme, kolika „body" cesty z otázky b) procházejí, v kolika z těchto bodů končí a v kolika pokračují. Dostaneme tabulku (T):

Úroveň	Počet bodů ležících aspoň na jedné cestě	Z toho kon- cových	Z toho průchozích
1	k	λ_1	$k - \lambda_1$
2	$(k - \lambda_1) k = k^2 - \lambda_1 k$	λ_2	$k^2 - \lambda_1 k - \lambda_2$
3	$(k^2 - \lambda_1 k - \lambda_2) k =$ $= k^3 - \lambda_1 k^2 - \lambda_2 k$	λ_3	$k^3 - \lambda_1 k^2 - \lambda_2 k - \lambda_3$
– – –	– – – – – –	– – –	– – – – – –

Vzhledem k s-tému řádku tabulky je

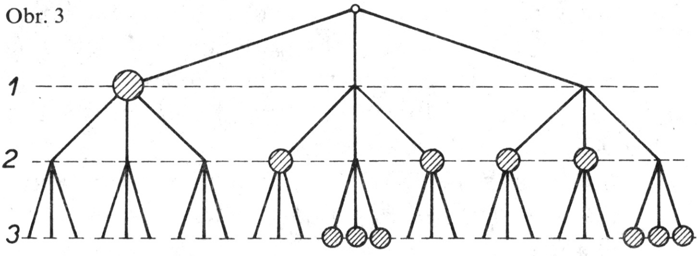
$$k^s - \lambda_1 k^{s-1} - \lambda_2 k^{s-2} - \ldots - \lambda_{s-1} k = \lambda_s . \tag{1}$$

Mimoto platí zřejmě

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = r . \tag{2}$$

Ověřte si tabulku na příkladě z obr. 2; možná, že by bylo vhodné **sestavit nejprve tuto tabulku pro situaci** z obr. 2

Obr. 3



. . . .

($k = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 4$, $s = 4$), pak ji **zobecnit** a ještě **ověřit** pro situaci z obr. 3 ($k = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$, $s = 3$).

Na tomto obrázku nejsou označeny prvky množiny $\mathscr{A}$; zřejmě tu je podle (2) $r = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 4 + 6 = 11$.

Tabulka má v tomto případě tvar:

Úroveň	Celkem	Končí	Pokračuje
1	3	1	2
2	6	4	2
3	6	6	0

Výsledný počet posloupností je $3 + 6 + 6 = 15$. Tabulka situace z obr. 2 je:

Úroveň	Celkem	Končí	Pokračuje
1	2	0	2
2	4	2	2
3	4	2	2
4	4	4	0

Výsledný počet posloupností je $2 + 4 + 4 + 4 = 14$.

Po této experimentální přípravě můžete zpracovat tabulku (T); je to práce ryze algebraická. Je zřejmé, že počet σ všech posloupností z otázky b) je dán součtem údajů v prvním sloupci v s řádcích tabulky (T). Je tedy

$$\sigma = (k + k^2 + \ldots + k^s) - \lambda_1(k + k^2 + \ldots + k^{s-1}) - \ldots - \\ - \lambda_{s-1}k\,,$$

tj.

$$\sigma = \left(\frac{k^{s+1} - 1}{k - 1} - 1\right) - \lambda_1\left(\frac{k^s - 1}{k - 1} - 1\right) - \ldots - \\ - \lambda_{s-1}\left(\frac{k^2 - 1}{k - 1} - 1\right),$$

$$\sigma = \frac{1}{k - 1}(k^{s+1} - \lambda_1 k^s - \ldots - \lambda_{s-1}k^2) + \\ + \frac{1}{k - 1}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{s-1} - 1) - 1 + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{s-1}).$$

Upravíme použitím (1), (2):

$$\sigma = \frac{k\lambda_s}{k - 1} + \frac{r - \lambda_s - 1}{k - 1} - 1 + r - \lambda_s\,.$$

Po úpravě

$$\sigma = \frac{k(r - 1)}{k - 1}, \tag{3}$$

což je výsledný vzorec. Ze vzorce (3) je patrno, že $k - 1$ dělí $r - 1$. Ze vzorce (3) dostaneme pro $k = 2$, $r = 8$ výsledek $\sigma = 14$ (obr. 2), pro $k = 3$, $r = 11$ výsledek $\sigma = 15$ (obr. 3) jako dříve.

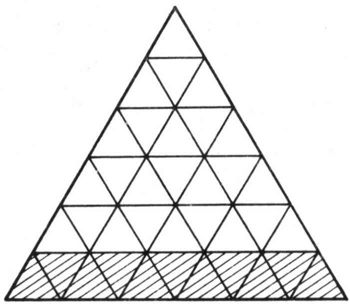
Je dán rovnostranný trojúhelník o straně délky 1. Každou stranu rozdělte na k stejných dílů. Sestrojte všechny úsečky rovnoběžné s příslušnými stranami; jejich krajní body jsou dělicími body na stranách daného trojúhelníka. Vznikne tak síť složená z rovnostranných trojúhelníků. Určete počet všech trojúhelníků, které lze v této síti najít.

KOMENTÁŘ

Začneme experimentováním. Impulsem pro řešitele by mohlo být nalezení rekurentního vzorce pro počet s_k popsaných trojúhelníků. Rekurentní vzorec bude mít tvar

$$s_{k+1} = s_k + \varphi ,$$

kde φ je počet trojúhelníků, které vzniknou tím, že přidáme „jeden pás"; na obr. 4 je $k = 5$, $k + 1 = 6$ a přidaný pás je vyšrafován. Nově vzniklé trojúhelníky budou dvojího druhu:



Obr. 4

a) jednak ty, které vzniknou z daného trojúhelníka posunutím nebo stejnolehlostí s *kladnou* konstantou; jejich počet označíme φ_1;

b) jednak ty, které vzniknou z daného trojúhelníka stejnolehlostí se *zápornou* konstantou; jejich počet označíme φ_2.

Snadno odvodíte vzorec

$$\varphi_1 = (k + 1) + k + (k - 1) + \ldots + 1 = \tfrac{1}{2}(k + 1)(k + 2). \quad (4)$$

Při pokusech vyjádřit φ_2 se zjistí, že je třeba rozlišit k liché a k sudé; proto je vhodné nakreslit mimo obr. 4 ještě další obrázek, např. pro $k = 6$.

Je-li k *liché*, dostaneme

$$\varphi_2 = 1 + 3 + \ldots + k = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{1}{2}(k+1)} (k + 2 - 2\lambda) = \tfrac{1}{4}(k + 1)^2. \quad (5)$$

Je-li k *sudé*, dostaneme

$$\varphi_2 = 2 + 4 + \ldots + k = 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{1}{2}k} \lambda = \tfrac{1}{4}k(k + 2). \quad (6)$$

Oba vzorce (5), (6) se odvodí pomocí obrázků intuitivně; exaktní důkaz vyžaduje opět matematickou indukci.

Nyní upravíme rekurentní vzorce pro k liché i pro k sudé podle (4), (5), (6).

Pro k *liché* je

$$s_{k+1} = s_k + \tfrac{1}{2}(k + 1)(k + 2) + \tfrac{1}{4}(k + 1)^2,$$

tj.

$$s_{k+1} = s_k + \tfrac{1}{4}(k + 1)(3k + 5) = s_k + \tfrac{1}{4}(3k^2 + 8k + 5). \quad (7)$$

Pro k *sudé* dostaneme

$$s_{k+1} = s_k + \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2) + \tfrac{1}{4}k(k+2),$$

tj.

$$s_{k+1} = s_k + \tfrac{1}{4}(k+2)(3k+2) = s_k + \tfrac{1}{4}(3k^2 + 8k + 4). \qquad (8)$$

Další impuls: rekurentní vzorec je vzhledem k odlišnosti (7) a (8) třeba upravit tak, aby „krok" byl nikoli 1, ale 2, tj. je třeba odvodit vztah mezi s_k, s_{k+2} pro k liché i sudé.

Pro *liché* k dostaneme s použitím (7) a (8) pro $k + 1$

$$\begin{aligned} s_{k+2} &= s_{k+1} + \tfrac{1}{4}(k+3)(3k+5) = \\ &= s_k + \tfrac{1}{4}(k+1)(3k+5) + \tfrac{1}{4}(k+3)(3k+5), \end{aligned}$$

tj.

$$s_{k+2} = s_k + \tfrac{1}{2}(3k+5)(k+2). \qquad (9)$$

Pro *sudé* k dostaneme s použitím (8) a (7) pro $k + 1$ místo k:

$$\begin{aligned} s_{k+2} &= s_{k+1} + \tfrac{1}{4}(k+2)(3k+8) = \\ &= s_k + \tfrac{1}{4}(k+2)(3k+2) + \tfrac{1}{4}(k+2)(3k+8), \end{aligned}$$

tj.

$$s_{k+2} = s_k + \tfrac{1}{2}(k+2)(3k+5). \qquad (10)$$

S potěšením konstatujeme, že vzorce (9) a (10) jsou totožné; proto můžeme vypracovat tabulku diferencí:

(T_1)

k	1	2	3	4	5	6	7	...
$\frac{1}{2}(k+2)(3k+5)$	12	22	35	51	70	92	117	...

Čísla v druhém řádku tabulky tvoří aritmetickou posloupnost 2. řádu, jak ukazuje schéma diferencí

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 12 & & 22 & & 35 & & 51 & & 70 & & 92 & & 117 & & \ldots \\ & 10 & & 13 & & 16 & & 19 & & 22 & & 25 & & \ldots\ldots & \\ & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & \ldots\ldots\ldots & & \end{array}$$

Protože víme, že je $s_1 = 1$, $s_2 = 5$, můžeme sestavit s použitím tabulky (T_1) tabulku (T_2)

(T_2)

k	1	2	3	4	5	6	7	...
s_k	1	5	13	27	48	78	118	...

(Např. $s_3 = s_1 + d_1$, kde $d_1 = \frac{1}{2}(k+2)(3k+5)$ pro $k = 1$, tj. $d_1 = 12$, $s_3 = 1 + 12 = 13$.)

Nepokládáme za nutné odvozovat ze vzorce (9) a z počátečních hodnot $s_1 = 1$, $s_2 = 5$ obecné vzorce pro s_k; je to v podstatě bezduché počítání s aritmetickými řadami vyšších řádů.

Pro úplnost uvádíme, že pro k *liché* vyjde

$$s_k = \tfrac{1}{8}(k+1)(2k^2+3k-1),$$

pro k *sudé*

$$s_k = \tfrac{1}{8}k(k+2)(2k+1),$$

což je v souhlase s tabulkou (T_2).

Ak sú x, y, z vnútorné uhly v trojuholníku (tj. ich veľkosti) a ak je $V = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$, potom nutná a postačujúca podmienka, aby trojuholník bol ostrouhlý, znie: $V > 0$ a aby bol tupouhlý: $V < 0$.

KOMENTÁR

Táto úloha je založená na triviálnej úprave výrazu, ak použijeme vhodný trik. Azda možno riešiteľov nechať, aby „si lámali hlavu“, poprípade aby súťažili o najkratšie riešenie úlohy. Je celý rad riešení, zdá sa, že najkratšia je úprava, ktorá dôsledne využíva cykličnosť. Označme $p = \cos x \,.\, \cos y \,.\, \cos z$, potom je $2pV = 2 \sin x \,.\, \sin y \,.\, \cos z + 2 \sin y \,.\, \sin z \,.\, \cos x + 2 \sin z \,.\, \sin x \,.\, \cos y$, tj. (využijeme trik násobenie dvomi)

$$\begin{aligned} 2pV &= \sin x(\sin y \cos z + \cos y \sin z) + \\ &+ \sin y(\sin z \cos x + \cos z \sin x) + \\ &+ \sin z(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = \\ &= \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z\,, \end{aligned}$$

pretože napr. $\sin y \,.\, \cos z + \cos y \,.\, \sin z = \sin(y + z) = \sin(\pi - x) = \sin x$. Pretože $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z > 0$, je $V > 0$, práve vtedy, keď je trojuholník ostrouhlý a $V < 0$, keď je tupouhlý.*)

---

*) Pravoúhlý trojuholník je vylúčený, pretože tangenty x, y, z podľa predpokladu existujú.

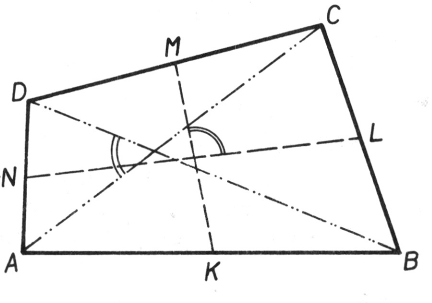
A–P–4

Vo vypuklom štvoruholníku $ABCD$ sú stredy úsečiek AB, BC, CD, DA označené za radom K, L, M, N. Dokážte, že odchýlky dvojíc priamok AC, BD a KM, LN sú si rovné práve vtedy, ak

$$2KM \cdot LN = AC \cdot BD\,.$$

KOMENTÁR

Impulz: pretože ide o vlastnosť odchyliek, bude asi vhodné použiť vektorové určenie smerov. Na obr. 5 je načrtnutá situácia.



Obr. 5

Označme $\mathbf{t} = B - A$, $\mathbf{u} = C - A$, $\mathbf{v} = D - A$. Potom smerové vektory priamok AC, BD sú vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} - \mathbf{t}$ s veľkosťami AC, BD. Ďalej je

$$K = A + \tfrac{1}{2}\mathbf{t},$$

$$N = A + \tfrac{1}{2}\mathbf{v},$$

$$L = A + (B - A) + \tfrac{1}{2}(C - B) = A + \mathbf{t} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{t}) =$$
$$= A + \tfrac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{t});$$

$$M = A + (D - A) + \tfrac{1}{2}(C - D) =$$
$$= A + \mathbf{v} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = A + \tfrac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

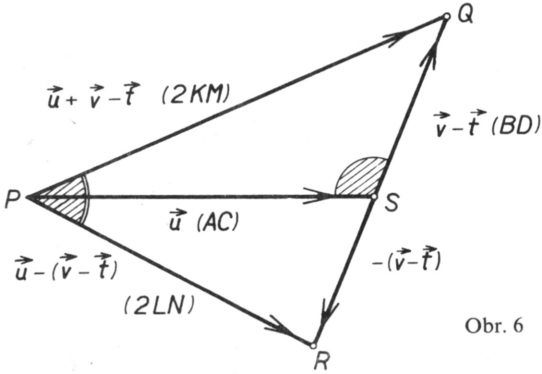
Priamky KM, LN teda majú smerové vektory $\mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{t})$, $\mathbf{u} + \mathbf{t} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - (\mathbf{v} - \mathbf{t})$ s veľkosťami $2KM$, $2LN$.

Na obr. 6 je znázornena situácia (veľkosti vektorov sú pripísané v zátvorkách). Oba vyznačené uhly sú zhodné práve keď platí $\triangle PQR \sim \triangle SQP$, čiže

$$\frac{2KM}{2BD} = \frac{AC}{2LN},$$

čiže

$$2KM \,.\, LN = AC \,.\, BD\,. \tag{11}$$



Obr. 6

Práve tak sa odvodí, že $\sphericalangle QPR = \sphericalangle PSR$ práve vtedy, keď platí (11).

Myslíme si, že impulz „vektorové riešenie“, by mal stačiť. Riešenie úlohy je pekná aplikácia vektorovej algebry a zároveň ukáže výhodu vektorového aparátu proti iným metodám, ktoré sú v podstate jeho obchádzaním.

KOMENTÁŘE K ŘEŠENÍ PŘÍPRAVNÝCH ÚLOH KATEGORIE B I. KOLA

B – P – 1

a) V oboru reálných čísel řešte graficky soustavu nerovnic

$$\begin{aligned} y &< -x^2 - 2x + 1 \\ y &> -1 + \operatorname{sign}(x + 1) . \end{aligned} \tag{1}$$

b) Nalezněte graficky $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$, kde $\mathscr{P}$ je obor pravdivosti soustavy výrokových forem (1) a $\mathscr{Q} = \{[x, y] \in \mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_1;\ y < (x + 1)^2 - 1 + \operatorname{sign}(x + 1)]\}$. ($\mathscr{E}_1$ je množina všech reálných čísel.)

c) Je dána soustava nerovnic

$$\begin{aligned} y &\leqq x^2 - 2x + 1 , \\ y &\geqq -1 + \operatorname{sign}(x + 1) . \end{aligned} \tag{2}$$

Nalezněte $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$, kde $\mathscr{R}$ je obor pravdivosti soustavy (2) s reálnými proměnnými x, y a $\mathscr{S} = \{[x, y] \in \mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_1;\ y \leqq (x + 1)^2 - 1 + \operatorname{sign}(x + 1)\}$.

Poznámka: Sign x (čti signum x) je funkce reálné proměnné definovaná takto:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x > 0 \\ 0, & \text{je-li } x = 0 \\ -1, & \text{je-li } x < 0 \end{cases}$$

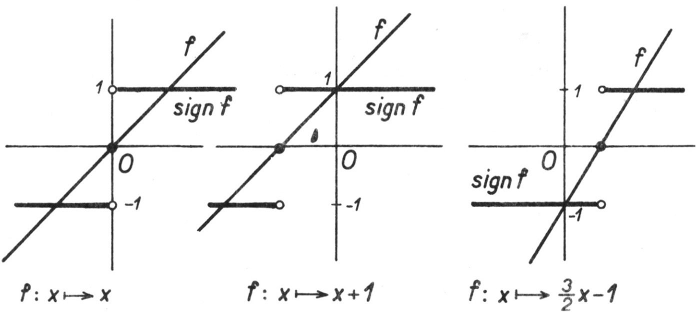
Ve XXII. ročníku MO se v soutěžních úlohách vyskytlo několik úloh s tematikou „celá část". Ve XXIII. ročníku jsou úlohy, v nichž se vyskytuje jiný případ schodové funkce: funkce sign (signum).

Vhodnou přípravou by bylo probrat několik funkcí typu sign $f(x)$, kde f je jednoduchá funkce: lineární celistvá nebo kvadratická nebo lineární lomená. V prvním stadiu bude vždy cílem sestrojit graf. Doporučujeme zakreslit vždy do téhož náčrtku graf funkce f i funkce signum f.

Na obr. 7–11 jsou načrtnuty grafy f a sign f pro tyto funkce f:

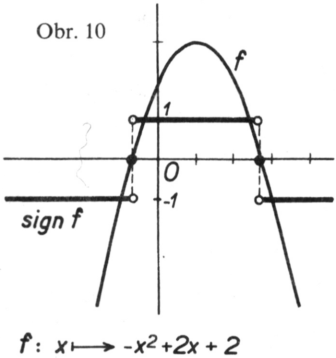
$$x \mapsto x\,, \qquad x \mapsto x + 1\,, \qquad x \mapsto \tfrac{3}{2}x - 1\,,$$

$$x \mapsto -x^2 + 2x + 2\,, \qquad x \mapsto \frac{2x}{x - 1}\,.$$

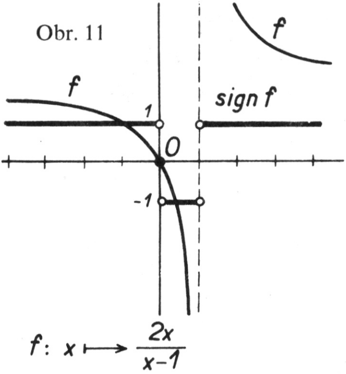


Obr. 7 Obr. 8 Obr. 9

Obr. 10

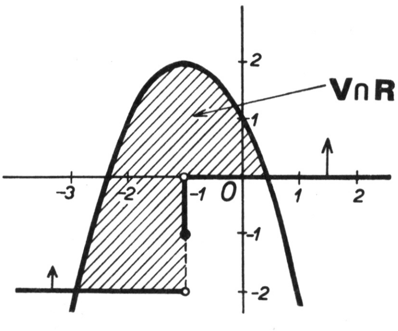


Obr. 11



Po takovéto průpravě snadno rozřešíte úlohy a), b), c). V úloze a) je grafem první nerovnice vnitřek $\mathscr{V}$ paraboly p, grafem druhé nerovnice část roviny $\mathscr{R}$; jejich průnik je vyšrafovaná plocha na obr. 12. Je třeba upozornit na to, že se má podrobně popsat útvar $\mathscr{V} \cap \mathscr{R}$. Které body hranice k němu náležejí a které nikoli?

Obdobně se řeší úlohy b) a c). V úloze b) sestrojíme nejprve graf funkce $x \mapsto (x+1)^2 - 1 + \operatorname{sign}(x+1)$.



Obr. 12

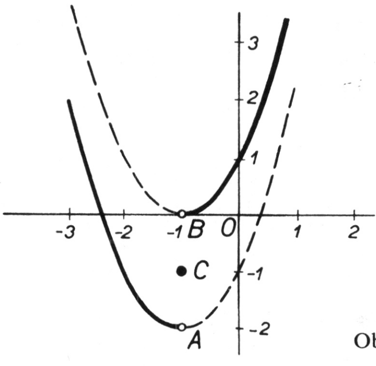
Můžeme postupovat tak, jako se postupuje při řešení rovnic a nerovnic s absolutními hodnotami: pro sestrojení grafu vyjádříme tuto funkci jako sjednocení tří funkcí v množinách

$$\mathscr{I}_1 = (-\infty;\ -1), \qquad \mathscr{I}_2 = \{-1\}, \qquad \mathscr{I}_3 = (-1;\ \infty).$$

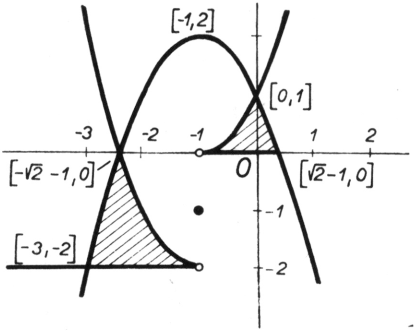
Dostaneme:

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{I}_1 &: \quad x \mapsto (x + 1)^2 - 2 \\ x \in \mathscr{I}_2 &: \quad x \mapsto (x + 1)^2 - 1, \quad \text{tj. } -1 \mapsto -1 \\ x \in \mathscr{I}_3 &: \quad x \to (x + 1)^2 \end{aligned}$$

Příslušné grafy jsou na obr. 13. Výsledný graf se skládá z obou tlustě vytažených oblouků parabol (bez bodů A, B) a z izolovaného bodu $C = [-1;\ -1]$. Odtud snadno odvodíme graf nerovnice $y < (x + 1)^2 - 1 + \operatorname{sign}(x + 1)$. Průnik grafů z obr. 12 a 13 je na obr. 14; je ovšem třeba průnik přesně popsat, zejména pokud jde o hraniční a izolované body. Úloha c) je variantou předchozí úlohy b),



Obr. 13



Obr. 14

v níž se má vyšetřit, jak se změní graf po připuštění rovnítka; to má vliv na příslušnost hraničních bodů.

B–P–2

V oboru přirozených čísel řešte soustavu rovnic

$$ac - bd = p\,,$$

$$ad - bc = 0\,,$$

kde a, b, c, d jsou neznámé a p je dané prvočíslo, $p > 2$.

KOMENTÁŘ

Text úlohy by měl znít raději takto: Je dáno prvočíslo $p > 2$. Určete všechny čtveřice přirozených čísel a, b, c, d, pro které platí

$$\begin{aligned} ac - bd &= p\,, \\ ad - bc &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Autorské řešení používá triku: první rovnice (1) se umocní na druhou a levá strana se upraví pomocí druhé rovnice (1):

$$\begin{aligned}(ac - bd)^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd = \\ &= a^2c^2 - (bc)(ad) + b^2d^2 - (bc)(ad) = \\ &= a^2c^2 - b^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 = \\ &= c^2(a^2 - b^2) - d^2(a^2 - b^2) = \\ &= (a^2 - b^2)(c^2 - d^2),\end{aligned}$$

tj.

$$(a + b)(a - b)(c + d)(c - d) = p^2 . \tag{2}$$

V součinu na levé straně (2) jsou všichni čtyři činitelé kladní. Z druhé rovnice (1) plyne totiž

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} . \tag{3}$$

Kdyby bylo např. $a \leqq b$, plynulo by z (3) $c \leqq d$ a dále $ac \leqq bd$, což je ve sporu s první rovnicí (1). Je tedy $a > b$ a podle (3) i $c > d$, $a - b > 0$, $c - d > 0$.

Z (2) plyne, že právě dva ze čtyř činitelů na levé straně jsou rovni p; jsou to $a + b$ a $c + d$. Zbývající dva jsou rovni 1. Je tedy

$$a + b = p , \qquad a - b = 1 ,$$

odtud

$$a = \tfrac{1}{2}(p + 1) , \qquad b = \tfrac{1}{2}(p - 1) . \tag{4a}$$

Obdobně vyjde

$$c = \tfrac{1}{2}(p + 1), \qquad d = \tfrac{1}{2}(p - 1). \tag{4b}$$

Zkouška ukáže, že (4a), (4b) je jediné řešení soustavy (1).

Je však možné přirozenější řešení. V soustavě (1) jsou čtyři neznámé a, b, c, d; přirozený postup je vyjádřit dvě z nich – např. c, d – pomocí a, b, p. Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$c = \frac{ap}{a^2 - b^2}, \qquad d = \frac{bp}{a^2 - b^2}. \tag{5}$$

Ze vzorců (5) ihned vidíme, že je $a > b$ a zároveň $c > d$. Z rovnic (5) lze dostat novou jednoduchou soustavu pro c, d jejich sečtením a odečtením:

$$c + d = \frac{p}{a - b}, \qquad c - d = \frac{p}{a + b}. \tag{6}$$

(Také z těchto rovnic je bezprostředně patrné, že je $a > b$, $c > d$.) Z rovnic (6) vyplývá, že $a - b$ i $a + b$ dělí p; protože je $a - b < a + b$, je $a - b = 1$, $a + b = p$; odtud pak plyne (4a) a (4b).

K rovnicím (6) však můžeme dospět trikem jednodušším: sečtením a odečtením rovnic (1). Trikovost tohoto postupu můžeme zmenšit tím, že jej vyložíme jako pokus zavést místo c, d nové neznámé $c + d$, $c - d$. Ostatně rovnice (6), ať se k nim dopracujeme jakkoli, představují nahrazení původní soustavy (1) s neznámými a, b, c, d novou soustavou s neznámými $a + b$, $a - b$, $c + d$, $c - d$.

Tento výklad umožňuje poznat podstatu úlohy; jde v podstatě o dva rozklady prvočísla p v součin $1 \,.\, p = p \,.\, 1$. Po tomto rozboru by bylo vhodné rozřešit zobecněnou soustavu (1):

Je dáno přirozené číslo $N > 1$. Určete všechny čtveřice přirozených čísel a, b, c, d, pro něž platí

$$\begin{aligned} ac - bd &= N\,, \\ ad - bc &= 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Při řešení soustavy (7) se budou diskutovat rozklady čísla N v součin dvou činitelů (v každé dvojici $(a - b, a + b)$, $(c - d, c + d)$ musí být čísla téže parity) a z těchto rozkladů dostaneme všechna řešení soustavy (7). Tak např. pro $N = 15$ a $N = 24$ je postup řešení i výsledky v tabulkách. Přitom se vychází z rovnic (8), které byly odvozeny ze soustavy (7).

$$(a-b)(c+d)=N, \qquad (a+b)(c-d)=N. \qquad (8)$$

$a-b$	1	1	1	3	3	5
$a+b$	3	5	15	5	15	15
$c-d$	5	3	1	3	1	1
$c+d$	15	15	15	5	5	3
a	2	3	8	4	9	10
b	1	2	7	1	6	5
c	10	9	8	4	3	2
d	5	6	7	1	2	1

$N=15$

$a-b$	1	2	2	2	4	4	6	8
$a+b$	3	4	6	12	6	12	12	24
$c-d$	8	6	4	2	4	2	2	1
$c+d$	24	12	12	12	6	6	4	3
a	2	3	4	7	5	8	9	16
b	1	1	2	5	1	4	3	8
c	16	9	8	7	5	4	3	2
d	8	3	4	5	1	2	1	1

$N=24$

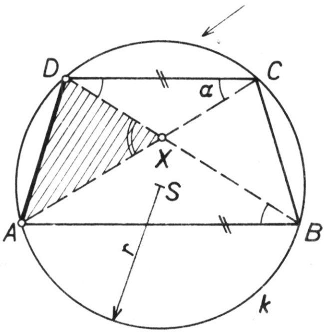
B – P – 3

V rovine sú dané dva rôzne body A, D. Ďalej je dané také číslo r, že $r > \frac{1}{2}AD$. Určte geometrické miesto priesečíkov uhlopriečok všetkých rovnoramenných lichobežníkov s ramenom AD a s polomerom opísanej kružnice r.

KOMENTÁR

Táto úloha je školská úloha z konštrukčnej geometrie, ktorú by ste mali vedieť rozriešiť samostatne – možno až na diskusiu.

Najprv treba zostrojiť ľubovolný bod X hľadanej množiny. Zostrojí sa kružnica k zo stredom S, s polomerom $r > \frac{1}{2}AD$, prechadzajúca bodmi A, D (takéto kružnice sú dve, súmerne združené podľa priamky AD); AD nemôže byť priemerom kružnice k, pretože je $AD < 2r$ (pozri obr. 15). Lichobežník $ABCD$ je súmerný podľa spoločnej osi základní AB, CD, ktorá prechádza stredom S. Bod C (i B) leží teda na tom oblúku AD kružnice k, ktorý leží v polrovine ADS.



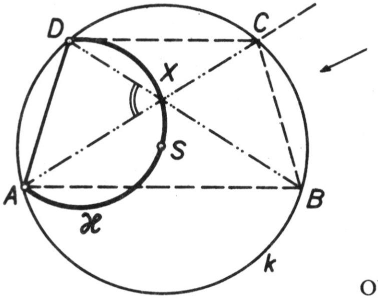
Obr. 15

Zvolíme teda bod $C \in k$, doplníme lichobežník $ABCD$ a zostrojíme bod X.

Všimnime si obvodové uhly. Je $\sphericalangle ACD = \alpha$, $\sphericalangle AXD = 2\alpha$ (je to vonkajší uhol rovnoramenného $\sphericalangle CDX$). Toto môže byť ďalší podnet, ktorý vedie k deduktívnemu vyšetreniu množiny všetkých bodov X.

Záver je: každý bod X hľadanej množiny $\mathcal{M}$ patrí teda k oblúku kružnice $\varkappa$ nad tetivou AD s obvodovým uhlom veľkosti 2α, ktorý leží v polrovine ADS; k oblúku $\varkappa$ nepočítame jeho krajné body A, D.

Úplný dôkaz záleží vo vyšetrení, či platí rovnosť dvoch množín $\varkappa = \mathcal{M}$. Pretože inklúzia $\mathcal{M} \subset \varkappa$ bola dokázaná, stačí zistiť, či je $\varkappa \subset \mathcal{M}$.



Obr. 16

Túto inklúziu môžeme vyšetriť pomocou obr. 16. Tu je zakreslená kružnice k aj oblúk $\varkappa$, ktorý obsahuje S (prečo?).

Zvolíme bod $X \in \varkappa$, zostrojíme polpriamky AX, DX a ich priesečíky C, B s kružnicou k. Pretože je $\sphericalangle ACD =$ $= \sphericalangle ABD = \frac{1}{2} \sphericalangle ASD = \frac{1}{2} \sphericalangle AXD$, je aj $\sphericalangle CDX = \sphericalangle ACD =$ $= \sphericalangle ABD$; preto je $AB \parallel CD$ a $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník alebo pravouholník. Tento druhý prípad nastane iba pre $X = S$. Teda neplatí $\varkappa \subset \mathscr{M}$. Množina $\mathscr{M}$ je oblúk $\varkappa$ bez bodov A, D, S.

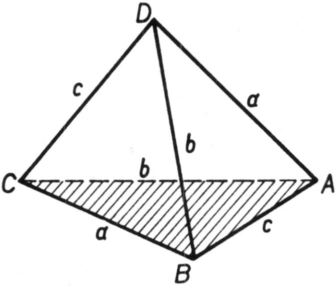
Odporúčame, aby ste si narysovali množinu $\mathscr{M}$ aj pre prípad, keď je síce $AD < 2r$, ale keď sa obe dĺžky málo líšia (napr. $AD = \frac{7}{4}r$).

B–P–4

Určete objem čtyřstěnu, jehož každé dvě protější hrany mají tutéž délku; délky hran v těchto dvojicích jsou a, b, c.

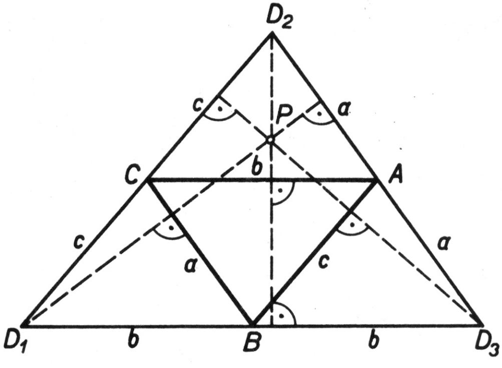
KOMENTÁŘ

Předně je třeba nakreslit náčrtek, do kterého se zapíší délky hran písmeny a, b, c. Z tohoto náčrtku je patrné, že stěny čtyřstěnu jsou čtyři shodné trojúhelníky (obr. 17).



Obr. 17

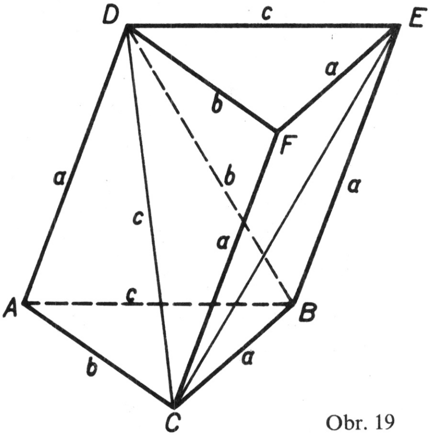
Dále je zcela přirozené sestrojit patu P výšky v spuštěné z vrcholu D na rovinu ABC. Pomocí obsahu trojúhelníka ABC a pomocí výšky v je totiž možné vypočítat hledaný



Obr. 18

objem. Patu P sestrojíme tak, že sklopíme stěny ABD, BCD, CAD kolem příslušných hran AB, BC, CA do roviny ABC (obr. 18). Bod P je průsečíkem výšek trojúhelníka $D_1D_2D_3$; přitom ABD_3, BCD_1, CAD_2 jsou sklopené pobočné stěny čtyřstěnu $ABCD$. Z obr. 18 je vidět, že bod P nemusí ležet na žádné výšce $\triangle ABC$; kdo zná aspoň trochu teorii čtyřstěnu, ihned pozná, že čtyřstěn $ABCD$ nemusí být ortocentrický, ale že mohou být každé dvě jeho výšky mimoběžné.

Odbočka: Je-li $a = b = c$, je čtyřstěn $ABCD$ pravidelný, a tudíž ortocentrický. Je otázka, zda i mimo tento případ může být čtyřstěn $ABCD$ ortocentrický. *Analytická úvaha* zní takto: Je-li čtyřstěn $ABCD$ ortocentrický, je bod P ortocentrem trojúhelníka ABC; proto body P, D_2 leží na výšce v_b trojúhelníka ABC; protože je $D_1B = D_3B$, je tato výška osou úsečky D_1D_3, a je tudíž $D_1D_2 = D_3D_2$ neboli $2c = 2a$.



Obr. 19

Výměnou písmen vyjde $a = b = c$. **Jediný ortocentrický čtyřstěn mezi čtyřstěny *ABCD* je tedy čtyřstěn pravidelný.**

Výpočet objemu čtyřstěnu *ABCD* pomocí bodu *P* by byl svízelný a zdlouhavý. Proto použijeme malého triku, který je vlastně znám z odvozování vzorce pro objem jehlanu.

Impuls zní: **Doplňte čtyřstěn *ABCD* na trojboký hranol!** Doplnění znázorňuje obr. 19; je tu $AD \parallel BE \parallel CF$, $AC \parallel DF$, $BC \parallel EF$, $AB \parallel DE$. Hranol *ABCDEF* lze rozdělit v jehlany *ABCD* a *BCFED*. Čtyřboký jehlan *BCFED* lze rozdělit na dva čtyřstěny

$$BCFED = BCED + FECD\,.$$

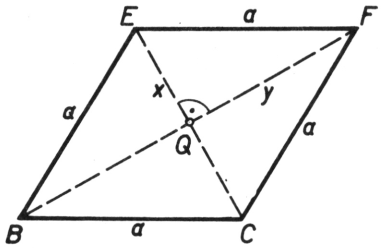
Oba tyto čtyřstěny mají týž objem, neboť mají společný vrchol *D* a jejich protější stěny jsou shodné, totiž

$$\triangle BCE \cong \triangle FEC\,.$$

Přitom čtyřstěny $ABCD$ a $DEFC$ mají týž objem, neboť mají shodné podstavy ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$) a sobě rovné výšky (vzdálenost rovin ABC, DEF). Hledaný objem V je tedy roven jedné polovině objemu jehlanu $BCFED$.

Podstava jehlanu $BCFED$ je kosočtverec $BCFE$ o straně délky a (obr. 20). Jeho pobočné hrany mají délky $CD = ED = c$, $BD = FD = b$; proto pata výšky spuštěné z vrcholu D je průsečík Q úhlopříček BF, CE. Označme $QE = QC = x$, $QB = QF = y$, $QD = z$. Pythagorova věta pak dává:

$$x^2 + z^2 = c^2 , \qquad y^2 + z^2 = b^2 , \qquad x^2 + y^2 = a^2 . \quad (9)$$



Obr. 20

Z rovnic (9) plyne

$$2x^2 = a^2 + c^2 - b^2 , \qquad 2y^2 = a^2 + b^2 - c^2 ,$$
$$2z^2 = b^2 + c^2 - a^2 . \quad (10)$$

Mimoto je

$$V = \tfrac{1}{3}xyz .$$

Označme ještě (analogie s postupem při odvození Heronova vzorce) $2\sigma = a^2 + b^2 + c^2$; pak je

$$x^2 = \sigma - b^2\,, \qquad y^2 = \sigma - c^2\,, \qquad z^2 = \sigma - a^2\,;$$

a odtud

$$V = \tfrac{1}{3}\sqrt{(\sigma - a^2)(\sigma - b^2)(\sigma - c^2)}\,. \tag{11}$$

Vzorec (11) je ovšem výsledek získaný jen formálním výpočtem.

Prodiskutujte logickou strukturu řešení úlohy B–P–4:

Existuje-li čtyřstěn žádaných vlastností, lze jej doplnit na trojboký hranol a z něho lze oddělit symetrický jehlan čtyřboký, jehož podstavou je kosočtverec. Pro délky jeho úhlopříček $2x$, $2y$ a pro jeho výšku z platí rovnice (9), jejichž řešením jsou vzorce (10). Pravé strany těchto vzorců musí být *kladná* čísla. To znamená, že čísla a, b, c nejsou libovolná, ale že pro ně platí

$$a^2 + b^2 - c^2 > 0\,, \qquad b^2 + c^2 - a^2 > 0\,,$$
$$c^2 + a^2 - b^2 > 0\,. \tag{12}$$

Nerovnosti (12) vyjadřují *nutnou* podmínku pro existenci čtyřstěnu uvedených vlastností. Obrácením postupu se dá dokázat, že podmínka (12) je také postačující.

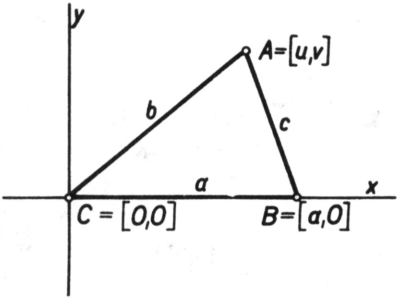
Jaký je geometrický význam nerovností (12)? Nerovnost $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ platí právě tehdy, je-li úhel $\sphericalangle ACB < 90°$. To vyplývá z kosinové věty

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Bez použití kosinové věty se dá tato věta dokázat např. pomocí vzorce pro vzdálenost dvou bodů (Pythagorovy věty). Soustavu souřadnic zvolíme podle obr. 21. Dostaneme $u^2 + v^2 = b^2$, $(u - a)^2 + v^2 = c^2$; spojením těchto dvou rovnic vyjde

$$2au = a^2 + b^2 - c^2 > 0\,,$$

tj. $u > 0$, tj. $\sphericalangle ACB < 90°$. Všechny stěny daného čtyřstěnu jsou tedy ostroúhlé trojúhelníky.



Obr. 21

KOMENTÁŘE K ŘEŠENÍ PŘÍPRAVNÝCH ÚLOH KATEGORIE C I. KOLA

C – P – 1

Dokážte, že pre všetky kladné čísla a, b, c platí:

$$\frac{b(2a-c)}{a}+\frac{c(2b-a)}{b}+\frac{a(2c-b)}{c}\leqq\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}.$$

Kedy platí rovnosť?

KOMENTÁR

Dokazovaná nerovnosť patrí do série kvadratických „identit" – rovností, či nerovností – s tromi alebo viacerými premennými, kde obor pravdivosti je zvyčajne množina $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{R}_0^+$ (množina všetkých kladných, resp. nezáporných reálnych čísel), prípadne $\mathcal{R}$ (množina všetkých reálnych čísel). Zdá sa, že by bolo užitočnejšie študovať systematicky tieto identity a ich obmeny, než robiť rôzne úpravy výrazov často dosť bizarných, ktoré sa v matematickej „praxi" vyskytujú málo.

Východzou úlohou by mohlo byť dokazovanie nerovnosti:

$$\forall x, y, z \in \mathcal{R};\ (x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\geqq 0. \quad (1)$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $x=y=z$.

Ak označíme $V_1=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$, je $2V_1=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$.

Odtiaľ plynie pravdivosť tvrdenia.

Z vety (1) ľahko odvodíme napr. vetu (2) (pre riešenie našej úlohy však nie je nutná):

$$\forall x, y, z \in \mathcal{R};\ 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \geqq 0\,. \qquad (2)$$

Rovnosť nastane práve vtedy, ak $x = y = z$.

Dá sa ľahko ukázať, že odhadovaný výraz je práve $2V_1$.

Nech sú a, b, c tri reálne čísla rôzne od nuly a označme

$$V_2 = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - \frac{b(2a - c)}{a} - \frac{c(2b - a)}{b} - \frac{a(2c - b)}{c}\,.$$

Po úprave

$$V_2 = 2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) - 2(a + b + c) =$$

$$= 2abc\left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)\right].$$

Ak použijeme pre $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ vetu (1), je $\dfrac{V_2}{2abc} \geqq 0$ $\left(\text{dosadzujeme } \dfrac{1}{a} = x,\ \dfrac{1}{b} = y,\ \dfrac{1}{c} = z\right)$, a preto aj $V_2 \geqq 0$.

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$, čiže $a = b = c$.

C – P – 2

Ktoré štvorciferné číslo deliteľné 36 sa dá zapísať ako súčet tretích mocnín dvoch bezprostredne po sebe nasledujúcich nepárnych prirodzených čísel?

KOMENTÁR

Jeden impulz k riešeniu by mohol byť v rozprave, ako matematicky vyjadriť podmienky a), b), c) a v akom poradí ich uplatniť:

Ak uplatníme podmienku c), zapíšeme (každé) hľadané číslo vo tvare

$$(2n - 1)^3 + (2n + 1)^3 = 16n^3 + 12n\,,$$

kde $n \in \mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ je množina všetkých prirodzených čísel). Podmienku a) uplatníme pomocou nerovností

$$1\,000 \leqq 16n^3 + 12n < 10\,000\,.$$

Číslo $16n^3 + 12n = 4n(4n^2 + 3)$ je deliteľné štyrmi; je deliteľné číslom 36 práve keď je deliteľné deviati, čo nastane práve keď je n deliteľné tromi. (Ak je $4n^2 + 3$ násobok troch, je n násobok troch a obrátene.) Podmienka b) sa teda uplatní tým, že sa n zapíše vo tvare $n = 3k$, $k \in \mathcal{N}$.

Matematická formulácia úlohy C—P—2 teda znie: Nájdite všetky čísla $k \in \mathcal{N}$, pre ktoré platí

$$1\,000 \leqq 36k(12k^2 + 1) < 10\,000\,. \tag{3}$$

Nerovnosti (3) upravíme

$$27{,}7\ldots \leqq k(12k^2 + 1) < 277{,}7\ldots\,. \tag{3'}$$

Číslo $k(12k^2 + 1)$ s rastúcim k veľmi rýchlo rastie; zostavme tabuľku (to môže byť ďalší pokyn k riešeniu, ak sa chceme vyhnúť manipulácii s nerovnosťami).

k	1	2	3
$k(12k^2 + 1)$	13	98	327

Ďalej nemusíme tabuľku zostavovať; vzhľadom k (3′) je jasné, že vyhovujúce je iba $k = 2$. Potom je $n = 6, 2n - 1 = 11$, $2n + 1 = 13$. Naozaj číslo

$$11^3 + 13^3 = 3\,528 = 36 \,.\, 98$$

vyhovuje všetkým trom podmienkam a), b), c).

Úloha C – P – 2 sa dá rôznym spôsobom obmeňovať, napr.: Určte všetky štvorciferné čísla deliteľné číslom 48, ktoré sú súčtom tretích mocnín troch po sebe bezprostredne nasledujúcich prirodzených čísel.

Ľahko sa presvedčíme, že trojica musí obsahovať práve jedno párne číslo a že má teda tvar

$$2n - 1\,,\ 2n\,,\ 2n + 1\,.$$

Súčet tretích mocnín je

$$12n(2n^2 + 1)\,. \tag{4}$$

Pretože $2n^2 + 1$ je nepárne číslo, musí byť n násobkom štyroch, tj. $n = 4k =$ a z (4) dostaneme nerovnosti

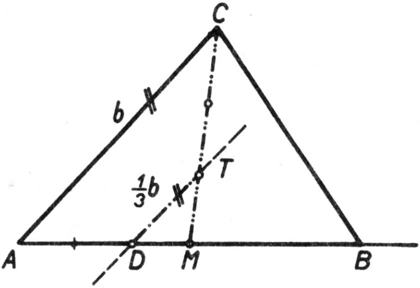
$$1\,000 \leqq 48k(32k^2 + 1) < 10\,000$$

a ďalej postupujeme pomocou tabuľky ako v súťažnej úlohe.

Jsou dány dva různé body A, B a kladné číslo b. Určete geometrické místo těžišť všech trojúhelníků ABC takových, že $AC = b$.

KOMENTÁŘ

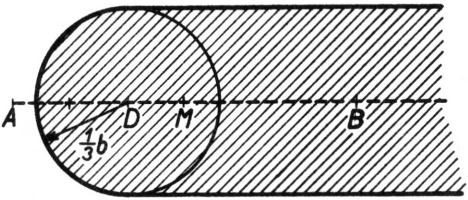
Nejprimitivnější řešení této úlohy se může opírat o obr. 22. Zde je M střed strany AB, T těžiště trojúhelníka ABC,



Obr. 22

D bod úsečky AM, pro který platí $AD = 2DM$. Protože je (z $\triangle ACM$) $DT \parallel AC$, $DT = \frac{1}{3}AC$, leží bod T na kružnici k se středem D a poloměrem $\frac{1}{3}b$. Označíme $\mathcal{M}$ množinu všech těžišť T; prozatím jsme dokázali inkluzi $\mathcal{M} \subset k$. Pokus dokázat obrácenou inkluzi $k \subset \mathcal{M}$ ukáže, že neplatí; je totiž třeba vyloučit oba průsečíky přímky AB s kružnicí k. Úvahy o rovnosti dvou množin, která je zajištěna dvěma inkluzemi, jsou nepostradatelné.

Náročnější variantu úlohy C – P – 3 dostaneme, budeme-li vyšetřovat množinu těžišť T všech trojúhelníků AXC, kde X probíhá polopřímku p opačnou k BA a zároveň C probíhá kružnici $(A; b)$, s výjimkou jejich průsečíků s přím-



Obr. 23

kou AB. Dostaneme útvar načrtnutý na obr. 23 a vyznačený šrafováním. Zde získáte cennou zkušenost, jak v takovém případě zacházíme s dvěma proměnnými: jednu z nich (bod X) zvolíme pevně a vyšetříme množinu $\mathcal{M}_x$ pro proměnný bod C. Pak zkonstruujeme množinu $\mathcal{M}$, jež je sjednocením všech množin $\mathcal{M}_x$, kde X probíhá polopřímku p.

Přiměřenější je řešit úlohu stejnolehlostí: kružnice $(D; \frac{1}{3}b)$ je obrazem kružnice $(A; b)$ ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $\frac{1}{3}$.

C–P–4

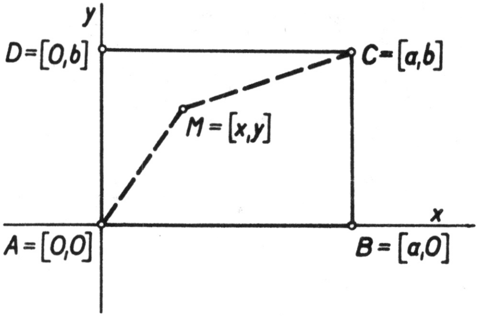
Je dán obdélník $ABCD$ a M je jeho libovolný vnitřní nebo hraniční bod. Dokažte, že platí

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 .$$

Platí tato rovnost i pro body M roviny obdélníka, které leží v jeho vnějšku?

KOMENTÁŘ

Také tato úloha je velmi primitivní. Situace volá po za-



Obr. 24

vedení soustavy ortonormálních souřadnic (obr. 24). Pak se vypočte podle známého vzorce

$$AM^2 + CM^2 = x^2 + y^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = \\ = BM^2 + DM^2 . \tag{5}$$

Je zřejmé, že (5) platí pro každý bod M roviny. Lze ovšem obejít soustavu souřadnic a vzorec pro vzdálenost dvou bodů a použít jen Pythagorovy věty; upozorňujeme však na to, že při tomto postupu musíme diskutovat polohu bodu M vzhledem k bodům A, B, C, D, že některý z potřebných pravoúhlých trojúhelníků může přejít v úsečku nebo bod, prostě, že řešení se stává těžkopádné. Naproti tomu použití vzorce pro vzdálenost dvou bodů vyřídí všechny možné případy naráz. V tom je cenné poučení o účinnosti metody souřadnic.

Dokazovaná rovnost platí ovšem také pro čtverec $ABCD$, tj. pro každý pravoúhelník. Zato pro rovnoběžník, který není pravoúhlý, věta neplatí. Umístíme soustavu souřadnic tak, aby vrcholy rovnoběžníka $ABCD$ měly souřadnice

$$A = [0; 0], \qquad B = [a; 0], \qquad C = [a + u; c],$$
$$D = [u; c].$$

Vypočteme

$$\Delta = AM^2 + CM^2 - (BM^2 + DM^2).$$

Po výpočtu vyjde

$$\Delta = 2au. \tag{6}$$

Protože $a \neq 0$, je $\Delta = 0$, právě když $u = 0$, tj. když bod D leží na ose y, tj. když $\sphericalangle DAB = 90°$.

Problém můžeme ještě zobecnit: můžeme formulovat otázku, pro které čtyřúhelníky (konvexní či nekonvexní) platí

$$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2 \tag{7}$$

pro všechny body M roviny. Metoda vyšetřování je stejná: zvolíme soustavu souřadnic tak, aby pro vrcholy A, B, C, D čtyřúhelníka platilo $A = [0; 0]$, $B = [a; 0]$, $C = [b; c]$, $D = [d; e]$.

Z podmínky (7) dostaneme

$$b^2 + c^2 - 2bx - 2cy =$$
$$= a^2 + d^2 + e^2 - 2ax - 2dx - 2ey.$$

Porovnáním koeficientů a absolutních členů dostaneme

$$b = a + d, \qquad c = e, \qquad b^2 + c^2 = a^2 + d^2 + e^2. \tag{8}$$

Středy dvojic AC a BD mají souřadnice

$$\left[\tfrac{1}{2}(a + d), \tfrac{1}{2}e\right], \qquad \left[\tfrac{1}{2}b; \tfrac{1}{2}c\right];$$

podle (8) tedy oba středy splynou a čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník. Z poslední rovnice (8) plyne

$$b^2 = a^2 + d^2 ;$$

protože $b = a + d$ a $a \neq 0$, je $d = 0$, tj. $\sphericalangle DAB = 90°$.

Shrneme výsledky: Je-li $ABCD$ rovnoběžník, pak pro všechny body M jeho roviny platí Δ = konst. Tato konstanta $(2au)$ je rovna nule právě tehdy, když je rovnoběžník $ABCD$ pravoúhlý.

Tím však není situace vyčerpána; zcela přirozená je otázka, jakých hodnot pro body M nabývá výraz Δ, je-li $ABCD$ čtyřúhelník, který není rovnoběžník. Po předchozích zkušenostech můžete už postupovat samostatně. Zvolíte soustavu souřadnic jako dříve tak, že $A = [0; 0]$, $B = [a; 0]$, $C = [b; c]$, $D = [d; e]$ a vypočtete Δ:

$$\begin{aligned} \Delta = 2(a + d - b)\,x + 2(e - c)\,y &+ \\ + \left(b^2 + c^2 - a^2 - d^2 - c^2\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Protože $ABCD$ není rovnoběžník, nejsou oba koeficienty při x, y, v (9) rovny nule. Z (9) lze vyčíst toto: Výraz Δ nabývá též hodnoty k (libovolně zvolené) pro nekonečně mnoho bodů $[x; y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $\Delta = k$, tj. které vyplňují přímku o rovnici $\Delta = k$. Mohlo by se zjišťovat, jakou polohu má tato přímka (resp. osnova přímek při proměnném k) vzhledem k bodům A, B, C, D apod.

Zkoumání vyžaduje hlavně tři poznatky analytické geometrie. Jsou to: vzorec pro vzdálenost dvou bodů, souřadnice středu úsečky a rovnice přímky. Tím tyto připojené úlohy už značně vybočují z náplně osnovy pro první ročník, ale poskytují pěkný příklad problémové situace pro starší olympioniky.

KOMENTÁŘE K ŘEŠENÍ PŘÍPRAVNÝCH ÚLOH KATEGORIE Z I. KOLA

Z–P–1

Šachový kroužek uspořádal turnaj, v němž každý z kamarádů, Jirka, Karel, Tonda, obsadil právě jedno z prvních tří míst. Určete pořadí chlapců v šachovém turnaji, víte-li, že z výroků

a) Jirka je třetí,
b) Tonda není druhý,
c) Karel není třetí,

je právě jeden pravdivý.

KOMENTÁŘ

Úloha dává příležitost k procvičování negací výroků a jejich pravdivostních hodnot, i když není třeba o nich explicitně hovořit. Řešení bude asi v každém případě experimentální. Jedna možnost je vypsat všechny permutace tří prvků J (Jirka), K (Karel), T (Tonda) a vybrat z nich ty, které vyhovují podmínce. Toto je metoda dosti primitivní, ale vede spolehlivě k cíli. Přitom musíme prozkoumat jen $3! = 6$ permutací.

Této metody se dá zcela dobře použít i při čtyřech prvcích; počet permutací je pak $4! = 24$. Časově náročnější je zkoumání všech permutací 5 prvků, kterých je $5! = 120$. Na V. mezinárodní matematické olympiádě v Polsku v r. 1963 byla dána úloha tohoto druhu; její experimentální řešení trvalo jen asi 35 minut a bylo kratší i jednodušší než řešení, které používalo pomocné věty z kombinatoriky.

Vraťme se k naší úloze. Šest možných permutací (pořadí) tří kamarádů bylo:

1\. JKT, 2. JTK, 3. KJT, 4. KTJ, 5. TJK, 6. TKJ.

Pro permutace 1 a 3 jsou pravdivé výroky b, c, proto nejsou řešením úlohy. Pro permutaci 2 jsou nepravdivé všechny tři výroky a, b, c, pro permutaci 4 jsou pravdivé výroky a, c, pro permutaci 5 je pravdivý jen výrok b, pro permutaci 6 jsou pravdivé všechny tři výroky a, b, c. Řešení je tedy jediné: je to permutace 5.

Jiné experimentální řešení vychází z pravdivosti či nepravdivosti výroků a, b, c; z nich se sestrojí žádaná permutace. Při tomto postupu lze použít tabulku:

	I	II	III
a	p	n	n
b	n	p	n
c	n	n	p

(1)

Přitom p (n) značí pravdivost (nepravdivost) příslušného výroku.

Jsou tedy možné tři případy, charakterizované třemi sloupci tabulky (1). Připomeňme ještě, že je-li výrok nepravdivý, je jeho negace (popření) pravdivá, a že jen jediný z výroků a, b, c je pravdivý. Tři možné případy pak zapíšeme slovně:

I. Jirka je třetí.	II. Jirka není třetí.	III. Jirka není třetí.
Tonda je druhý.	Tonda není druhý.	Tonda je druhý.
Karel je třetí.	Karel je třetí.	Karel není třetí.

Případ I je nemožný (Jirka i Karel nemůže být třetí). Také případ III je nemožný (Jirka i Karel by museli být první). Zbývá jen případ II, který vede k pořadí *TJK* jako při prvním způsobu řešení.

Varianta úlohy pro čtyřprvkovou množinu je tato: Z cifer 1, 2, 3, 4 má být sestaveno čtyřciferné číslo tak, aby

a) právě dvě cifry stály na místě, které udávají (např. 2 na druhém místě zleva);

b) byly právě tři dvojice, kde by větší z čísel 1, 2, 3, 4 stálo před menším (např. 3 před 1).

Prozkoumáním všech 24 permutací v množině $\{1, 2, 3, 4\}$ zjistíme, že podmínce a) vyhovuje jen šest permutací

$$\underline{1}\underline{2}43, \quad \underline{1}32\underline{4}, \quad \underline{1}4\underline{3}2, \quad 21\underline{3}\underline{4}, \quad 3\underline{2}1\underline{4}, \quad 4\underline{2}\underline{3}1.$$

Počty dvojic, v nichž je větší číslo před menším, jsou po řadě

$$1, \quad 1, \quad 3, \quad 1, \quad 3, \quad 5.$$

Řešením jsou tedy čísla 1432 a 3214.

Z – P – 2

Ručičky hodin ukazují přesně 12 hodin. Otočíme velkou ručičkou stokrát po sto stupních. Kolik hodin pak budou hodiny ukazovat? Udejte s přesností na minutu.

Tato úloha je jednak školským cvičením na tzv. převody měr úhlových na míry časové, jednak cvičením na rozšíření algoritmu „dělení se zbytkem" čili měření na rozklad daného čísla vzhledem k několika dělitelům.

Předpokládáme, že otáčení velkou ručičkou neprovádí ničitel hodinových strojů, tj. že se otáčení děje ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Otočí se o $100 . 100°$, tj. o $10\,000$ úhlových stupňů. Jedné časové minutě je na ciferníku hodin přiřaděn úhel $6°$; provedenému otočení je tedy přiřaděn čas $\frac{1}{6} . 10\,000 \doteq 1\,667$ časových minut, tj. 27 hodin 47 minut, neboť $1667 = 27 . 60 + 47$. Je tedy

$$10\,000° \mapsto 1 \text{ den} + 3 \text{ hodiny} + 47 \text{ minut} . \qquad (1)$$

Hodiny budou ukazovat $3^{\text{h}}47^{\text{min}}$ (s přesností na jednu minutu).

Domníváme se, že by se však měla řešit též úloha obecná (otočení o n stupňů) a měl by se sestavit vzorec

$$n = 8\,640a + 360b + 6c + z , \qquad (2)$$

kde a, b, c jsou nezáporná čísla, $b < 24$, $c < 60$, a z je celé takové číslo, že platí

$$|z| < 3 . \qquad (3)$$

Přitom a značí počet dní, b počet hodin, c počet minut.

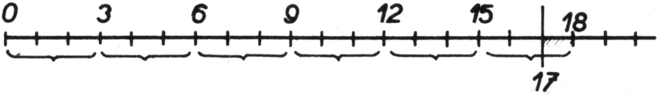
Vzorce (2) užijeme takto: číslo n dělíme číslem 8 640 a vyjde počet dní a. Zbytek tohoto dělení dělíme dále číslem 360 a vyjde počet hodin b. Zbytek druhého dělení dělíme číslem 6, ale tak, aby nový zbytek měl absolutní hodnotu menší než 3; tak vyjde počet minut.

V našem případě:

$$10\,000 = 8\,640 \,.\, \mathbf{1} + 1\,360\,,$$
$$1\,360 = 360 \,.\, \mathbf{3} + 280\,,$$
$$280 = 6 \,.\, \mathbf{47} - 2\,.$$

Obdobné vzorce lze konstruovat např. při převádění hodin na hodiny, dny, týdny, měsíce apod. Pozměněné „dělení", kde absolutní hodnota zbytku je nejvýše rovna polovině dělitele, se dá dobře vysvětlit pomocí číselné osy (obr. 25), např.

$$17 = 6 \,.\, 3 - 1\,, \qquad |-1| < \tfrac{1}{2} \,.\, 3\,. \tag{4}$$



Obr. 25

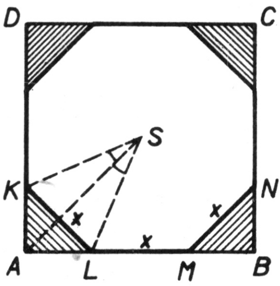
Z – P – 3

Pravideľný osemuholník má byť vpísaný do štvorca s jednotkovou stranou.

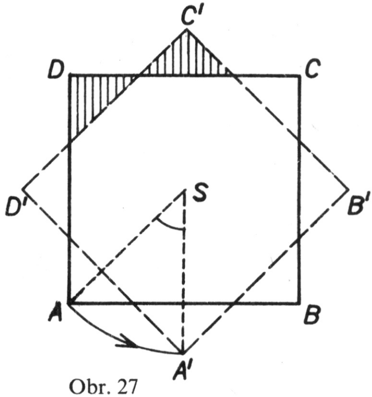
a) Popíšte konštrukciu.
b) Vypočítajte dĺžku strany osemuholníka.
c) Vypočítajte dĺžky všetkých uhlopriečok osemuholníka.

Formulácia „vpísať pravidelný osemuholník do štvorca" nie je jednoznačná; malo by sa diskutovať o jej interpretácii. Obdobná formulácia „vpísať trojuholník do kružnice" znamená, že každý vrchol trojuholníka leží na kružnici, obdobně v našej úlohe budeme požadovať, aby všetkých osem vrcholov pravidelného osemuholníka ležalo na hranici štvorca *ABCD* (obr. 26). Osemuholník vznikne oddelením vyšrafovaných trojuholníkov od štvorca *ABCD*.

Z obr. 26 môžeme ľahko odvodiť konštrukciu, ak si povšimneme, že $\sphericalangle KSA = \sphericalangle ASL = 22°30'$; pritom je S stred štvorca *ABCD*. Ďalšia konštrukcia podľa obr. 27; tu sú oba vyšrafované trojuholníky zhodné (prečo?). Ak osemuholník doplníme v tieto štyri trojuholníky, ktoré ležia mimo štvorca, vznikne nový štvorec $A'B'C'D'$, zhodný s pôvodným. Aj keď nepoznáte zo školskej geometrie otočenie okolo streda, môžete ľahko „objaviť", že štvorec $A'B'C'D'$ vznikne zo štvorca



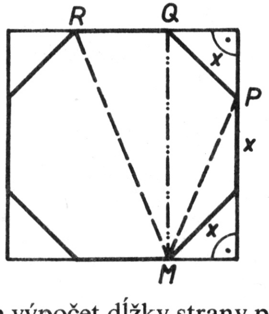
Obr. 26



Obr. 27

ABCD otočením o uhol veľkosti 45° v kladnom zmysle okolo stredu *S* (*S* je stred štvorca *ABCD*). Tento štvorec *A'B'C'D'* sa dá ľahko zostrojiť, pri jeho konštrukcii záleží veľmi na presnosti rysovania, tak ako pri prvom spôsobe. Dá sa povedať, že kontrola zistením zhodnosti všetkých strán a všetkých uhlov výsledného osemuholníka je náročnou skúškou presného rysovania. Za jednotku dĺžky volíme asi 6 cm.

Druhá a tretia časť úlohy je cvičením na použitie Pythagorovej vety a na výpočty s odmocninami. Výpočty sa síce dajú previesť úplne numericky, ale bolo by veľmi cenné porovnať eleganciu a presnosť „algebraického postupu" s ťažkopádnosťou bezduchého numerického výpočtu.



Obr. 28

Pre výpočet dĺžky strany použijeme obr. 28. Dĺžku strany osemuholníka označíme x; potom je

$$KL = LM = MN = x\,, \qquad AL = BM = \frac{x}{\sqrt{2}},$$

teda

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + x + \frac{x}{\sqrt{2}} = 1\,, \tag{5}$$

tj.

$$\frac{2x}{\sqrt{2}} + x = 1\,, \qquad x\sqrt{2} + x = 1\,, \qquad x(\sqrt{2} + 1) = 1\,,$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}\,. \tag{6}$$

V predchádzajúcich výpočtoch môžeme pracovať s $\sqrt{2}$ ako s parametrom r; prevádzať algebraické úpravy a používať pri nich stále vzťah $r^2 = 2$ (napr. je $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$).

Vzorec (6) je nepohodlný, pretože v jeho menovateli nie je celé číslo. Preto prevedieme známu úpravu (tzv. rozšírenie)

$$x = \frac{1}{r + 1} = \frac{r - 1}{(r + 1)(r - 1)} = \frac{r - 1}{r^2 - 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1\,. \tag{7}$$

Až teraz dosadíme napr. $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$ a vyjde

$$x \doteq 0{,}414\,.$$

Numerický výpočet by vyšiel od vyčíslenej rovnice

$$\frac{x}{1{,}414} + x + \frac{x}{1{,}414} = 1$$

a dospel by k rovnici

$$3{,}414x = 1{,}414$$

a odtiaľ by sa po nepríjemnom počítaní určilo x numericky.

Dĺžky uhlopriečok MP, MQ, MR (každá iná uhlopriečka pravideľného osemuholníka je zhodná s niektorou z nich) vypočítame pomocou Pythagorovej vety. Vyjde

$$MP^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + x\right)^2 = x^2(2 + \sqrt{2}),$$

$$MQ = 1,$$

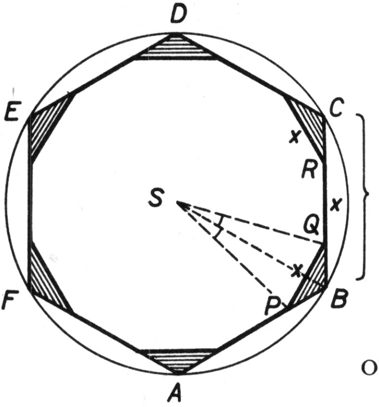
$$MR^2 = 1 + x^2.$$

Po úprave (dosadenie za x zo (7)) dostaneme

$$MP^2 = 2 - \sqrt{2}, \qquad MR^2 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Ak sem dosadíme $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$, môžeme pomocou tabuľky druhých mocnín vypočítať MP a MR.

Ako cvičnú úlohu odporúčame „vpísať do jednotkového pravideľného šesťuholníka pravidelný dvanásťuholník“ a vypočítať dĺžku jeho strany (obr. 29). Pri konštrukcii použijeme



Obr. 29

tú skutečnosť, že $\sphericalangle PSB = \sphericalangle BSQ = 15°$ alebo otočíme daný jednotkový pravideľný šesťuholník okolo jeho stredu S o $30°$. Pri výpočte postupujeme takto: Označíme $PQ = x$, pretože $\sphericalangle PQB = 30°$, $\sphericalangle SBQ = 60°$, je $BQ = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Zo vzťahu $BQ + QR + RC = 1$ plynie

$$\frac{2x}{\sqrt{3}} + x = 1\,,$$

čiže

$$x(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\,.$$

Odtiaľ vypočítame

$$x = 2\sqrt{3} - 3 \doteq 0{,}464\,. \tag{8}$$

Tiež v tejto cvičnej úlohe je vhodné nahradiť $\sqrt{3}$ parametrom r. Výpočet má potom túto podobu:

$$\frac{x}{r} + \frac{x}{r} + x = 1\,,$$

$$\frac{2x + rx}{r} = 1\,,$$

$$(2 + r)\,x = r\,,$$

$$x = \frac{r(2 - r)}{(2 + r)(2 - r)}\,,$$

$$x = \frac{2r - r^2}{4 - r^2}\,. \tag{9}$$

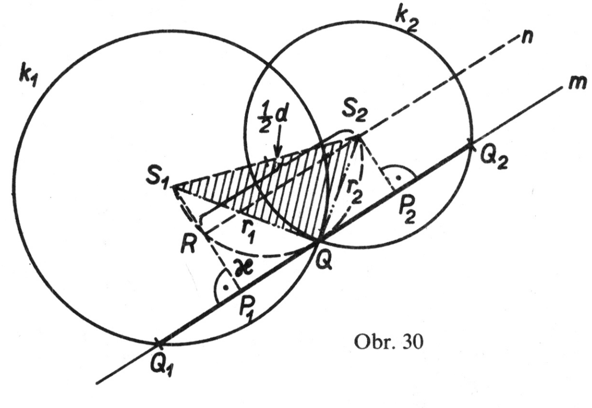
Ak sem dosadíme $r = \sqrt{3}$ a $r^2 = 3$, vyjde (8). Stojí azda za pozornosť, že pri dosadení $r = \sqrt{2}$, $r^2 = 2$ do (9) vyjde (7). To naznačuje, že vzorec (9) má obecnejšiu platnosť. Úlohou zostáva výpočet dĺžok uhlopriečok dvanásťuholníka. Pri zobecňovaní úlohy sa uplatní miesto Pythagorovej vety jej zobecnenie – kosínová veta.

Z–P–4

Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, které se protínají v bodě Q, přičemž je $r_1 \neq r_2$, $\sphericalangle S_1QS_2 = 90°$. Dále je dáno kladné číslo d. Bodem Q veďte přímku tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vyťaly dvě nepřekrývající se tětivy, jejichž délky mají součet d. Proveďte diskusi řešení úlohy.

KOMENTÁŘ

Úloha Z–P–4 otvírá tematiku ortogonálních kružnic: přímka QS_1 (QS_2) se v bodě Q dotýká kružnice k_2 (k_1); protože je $QS_1 \perp QS_2$, protínají se kružnice k_1, k_2 v bodě Q ortogonálně (obr. 30).



Obr. 30

Do postupu řešení úlohy vnikneme upozorněním na skutečnost, že $P_1P_2 = \frac{1}{2}d$ (P_1, P_2 jsou paty kolmic spuštěných z bodů S_1, S_2 na přímku m). Přímka n vedená bodem S_2 rovnoběžně s přímkou m (předpokládáme $r_1 > r_2$) protne úsečku S_1P_1 v bodě R. Pravoúhlý trojúhelník S_1S_2R má přeponu délky $c = S_1S_2$ a odvěsnu délky $S_2R = \frac{1}{2}d$; může se ovšem redukovat na úsečku S_1S_2, je-li $S_1S_2 = \frac{1}{2}d$. Z pravoúhlého trojúhelníka S_1S_2Q plyne

$$c^2 = r_1^2 + r_2^2\,. \tag{10}$$

Body Q, R leží na polokružnici $\varkappa$ sestrojené nad průměrem S_1S_2. Trojúhelník S_1S_2R udává směr (S_2R) přímky m. To je druhý pokyn pro řešení úlohy.

Diskuse je poměrně obtížná. Je třeba zajistit sestrojitelnost bodu R; podmínkou pro to je vztah $\frac{1}{2}d \leqq S_1S_2$, neboli podle (10)

$$d^2 \leqq 4(r_1^2 + r_2^2)\,. \tag{11}$$

Dále je třeba uplatnit podmínku, že obě tětivy Q_1Q a Q_2Q se nepřekrývají. Zde asi budou řešitelé zkoušet a k výsledku dojdou cestou vždy trochu intuitivní, neboť jde o otázku uspořádání. Pravděpodobně zkoušením objeví (nutnou a postačující) podmínku $\frac{1}{2}d \geqq r_2$ neboli

$$d \geqq 2r_2\,. \tag{12}$$

To vyplyne ze sledování polohy bodu R na obloucích S_1Q, S_2Q polokružnice $\varkappa$. Spojením podmínky $r_1 > r_2$ s podmínkami (11) a (12) dostaneme tzv. podmínku řešitelnosti v současné platnosti nerovností

$$r_1 > r_2, \qquad d \geqq 2r_2, \qquad d^2 \leqq 4(r_1^2 + r_2^2).$$

Délka d tedy náleží intervalu

$$2r_2 \leqq d \leqq 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Zbývá vyšetřit případ $r_1 = r_2$ (i když ho znění textu úlohy vylučuje). Vzhledem k choulostivé diskusi by bylo asi nejvýhodnější řešit úlohu metodou souřadnic.