24. ročník matematické olympiády

II. Přípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 24. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1974-1975. 17. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977. pp. 40–48.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404659

II. Přípravné úlohy I. kola

ÚV MO se rozhodl zařazovat do přípravného kola myšlenkově cenné a zajímavé úlohy v MO již použité. Toto rozhodnutí se začalo uplatňovat poprvé ve 24. roč. MO. Proto u úloh již známých z minulých ročníků uvádíme jen text úlohy a odkaz na příslušnou literaturu, kde najde čtenář komentář či řešení úlohy (viz str. 48).

KATEGORIE A

A – P – 1

Je dáno přirozené číslo a; vypočtěte součet

$$\sum_{k=1}^{1975} \left[\frac{k}{a}\right].$$

Poznámka: Pro každé reálné x značí $[x]$ jeho celou část, tj. celé číslo, pro které platí $[x] \leqq x < [x] + 1$.

Řešení: viz [22], str. 135.

A–P–2

Je dána sústava rovníc s troma neznámymi x, y, z a s parametrami a, b:

$$x + ay = b\,,$$
$$y - a^2 z = 1\,,$$
$$az + x = b + 1\,.$$

Určte všetky také hodnoty parametrov a, b, pre ktoré má daná sústava nekonečne mnoho riešení.

Řešení: viz [16], str. 63.

A–P–3

Dokážte, že pre všetky reálne čísla x rôzne od nuly platí:

$$1 + x \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{x} > 0\,.$$

Komentář. Doporučujeme řešitelům, aby si nejprve prostudovali 3. kapitolu knížky *Šmakal – Budinský*: Goniometrické funkce (20. svazek ŠMM). Funkce

$$f\colon x \to 1 + x \,.\, \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{x}$$

je zřejmě sudá. Toto zjištění je velmi cenné, neboť umožňuje omezit důkaz dané nerovnosti jen na kladná reálná čísla x. Načrtnou-li si řešitelé grafy funkcí $\cos\frac{1}{x}$, $\sin\frac{1}{x}$, $x.\ \sin\frac{1}{x}$, zjistí, že bude vhodné danou nerovnost dokázat nejprve pro $x = \dfrac{1}{\pi}$ a pak pro $x \in \left(\dfrac{1}{\pi}, +\infty\right)$ a $x \in \left(0, \dfrac{1}{\pi}\right)$. V případě $x \in \left(0, \dfrac{1}{\pi}\right)$ je třeba uvážit, že $\dfrac{1}{\pi} < \dfrac{1}{2}$.

A – P – 4

V rovině je dán kruh **K**. Určete množinu vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, o nichž platí, že $AC \leqq BD$ a že celá úhlopříčka BD leží v kruhu **K**.

Řešení: viz [21], str. 128.

KATEGORIE B

B – P – 1

Mějme posloupnost celých čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, v níž pro všechna $n \geqq 1$ platí

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_1 a_n .$$

a) Může být taková posloupnost posloupností aritmetickou?

b) Určete nutné a postačující podmínky pro to, aby v takové posloupnosti platilo:

$$a_{n+k} + a_{n-k} = a_k a_n$$

pro všechna $n, k,\ n \geqq k,\ k \geqq 0$.

c) Jestliže $a_0 = 2$, pak existuje komplexní číslo z takové, že pro všechna $n \geqq 0$ je

$$a_n = z^n + z^{-n};$$

dokažte.

Řešení: viz [20], str. 102.

B – P – 2

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n a pre všetky reálne čísla $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí nerovnosť:

$$n(n + 1)\,x^2 \geqq 2 \,.\, \sum_{i=1}^{n} i x_i (2x - x_i)\,.$$

Komentář. Důkazové úlohy tohoto typu se v MO vyskytují poměrně často. Je možno užít matematické indukce nebo přímo vzorce

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2} n(n + 1)\,,$$

který platí pro každé přirozené číslo n.

B – P – 3

Trojúhelník ABC má tu vlastnost, že kružnice procházející středy jeho stran se dotýká kružnice opsané.

Dokažte, že bod dotyku je jedním vrcholem trojúhelníku ABC a že vnitřní úhel při tomto vrcholu je pravý.

Řešení: viz [17], str. 73.

B – P – 4

Nájdite všetky hodnoty parametra a, pre ktoré je v kartézskej súradnicovej sústave so súradnicami x, y graf rovnice

$$|x + y| + a|y| = 1$$

obvodom pravoúholníka.

Řešení: viz [19], str. 111.

KATEGORIE C

C – P – 1

Určte všetky riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x(x + y) + z(x - y) &= 6, \\ y(y + z) + x(y - z) &= -2, \\ z(z + x) + y(z - x) &= 3. \end{aligned}$$

Řešení: viz [16], str. 34.

C – P – 2

Nechť p, q jsou prvočísla větší než 3. Potom číslo

$$p^2 + 7q^2 - 23$$

není prvočíslem. Dokažte.

Řešení: viz [20], str. 109.

C–P–3

Je dána kružnice $k = (S; r)$, bod A z vnútra kruhu ohraničeného kružnicou k a kladné číslo d. Bodom A je vedená tetiva kružnice k tak, že tento bod ju rozdeľuje na dve úsečky, ktorých dĺžky majú rozdiel d.

a) Vyjadrite dĺžku t tejto tetivy a jej vzdialenosť od stredu S pomocou parametrov $r, d,$ $v = SA$.

b) Zostrojte pomocou výsledku z úlohy a) všetky tetivy danej vlastnosti.

Řešení: viz [16], str. 39.

C–P–4

Nechť **M** je množina všech vrcholů čtverců dané šachovnice o 16 polích. Pro každý bod $X \in \mathbf{M}$ označme $p(X)$ počet všech čtverců, jejichž všechny vrcholy patří do množiny **M**, přičemž jedním z nich je bod X. Určete výčtem množinu všech čísel $p(X)$.

Komentář. Doporučujeme řešitelům, aby si nejprve prostudovali 6. úlohu I. kola XXI. roč. MO kategorie C. Pro řešení naší úlohy je důležité si uvědomit, že existují čtyři osy souměrnosti množiny **M**. Stačí pak najít číslo $p(X)$ jen pro jistých 6 bodů množiny **M**.

KATEGORIE Z

Z – P – 1

Součinem dvou kvadratických trojčlenů $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ je dvojčlen $x^4 + 4$. Určete koeficienty trojčlenů.

Řešení: viz [16], str. 102.

Z – P – 2

Kolikrát v době od 14.00 h. do 14.05 h. je centrální vteřinová ručička hodinek osou dutého úhlu sevřeného hodinovou a minutovou ručičkou? Udejte příslušné okamžiky s přesností na vteřiny.

Komentář. Při řešení vycházíme ze základního vztahu mezi velikostmi úhlů α, β, γ sevřenými po řadě minutovou, hodinovou a vteřinovou ručičkou s polopřímkou SO, kde S je střed číselníku a bod O označuje na číselníku 12 h. V hledané okamžiky je velikost úhlu γ aritmetickým průměrem velikostí úhlů α a β. Snadno se určí úhlové rychlosti ručiček ve stupních za sekundu. Lze užít i obloukové míry.

Pro velikosti úhlů α, β, γ opsané za čas t (s) dostaneme

$$\alpha = \frac{t}{10},$$

$$\beta = \frac{t}{120} + 60,$$

$$\gamma = 6t - k \,.\, 360,$$

kde k je celé nezáporné číslo udávající, kolikrát vteřinová ručička oběhla číselník za dobu t sekund po 14 h. Na základě uvedených fakt získáme po úpravách rovnici

$$1\,427t = 7\,200 + 86\,400k\,. \tag{1}$$

Z ní lehko určíme t.

Podle textu úlohy splňuje t nerovnici

$$0 \leqq t \leqq 300\,.$$

Tuto podmínku však splňuje pouze pět kořenů rovnice (1), totiž: 6; 66; 126; 186; 247 (s přesností na celé sekundy). O správnosti počtu řešení se ostatně můžeme přesvědčit jednoduchým úsudkem.

Z – P – 3

Trojúhelník ABC má velikosti vnitřních úhlů $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

a) Vyjádřete délky stran b, c pomocí strany a.

b) Vyjádřete poměr délek všech tří výšek trojúhelníku ABC.

Řešení: viz [17], str. 57.

Z – P – 4

Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a; K je střed strany AD, L je bod polopřímky BA, pro který platí $BL = \frac{3}{2}a$. Označme o takovou přímku procházející bodem D, že úsečka XY souměrně sdružená s KL podle osy o leží celá ve čtverci $ABCD$.

Jaký útvar vyplní všechny takto vytvořené úsečky XY? Narýsujte obrázek, vyšrafujte tento útvar a popište jeho konstrukci.

Řešení: viz [18], str. 55.

Literatura

[16] *Vyšín – Macháček*: Šestnáctý ročník MO, SPN 1968
[17] *Vyšín a kol.*: Sedmnáctý ročník MO, SPN 1969
[18] *Vyšín a kol.*: Osmnáctý ročník MO, SPN 1970
[19] *Vyšín a kol.*: Devatenáctý ročník MO, SPN 1971
[20] *Vyšín a kol.*: Dvacátý ročník MO, SPN 1972
[21] *Vyšín a kol.*: Dvacátý první ročník MO, SPN 1973
[22] *Vyšín a kol.*: Dvacátý druhý ročník MO, SPN 1974