24. ročník matematické olympiády

III. Súťažné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 24. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1974-1975. 17. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977. pp. 49–92.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404660

III. Súťažné úlohy I. kola

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Riešte sústavu s neznámymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 2)$ a parametrami c, d:

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= c\,,\\
-x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad\quad &= 0\,,\\
- x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad\quad &= 0\,,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\
-x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n &= 0\,,\\
- x_{n-1} + 2x_n &= d\,.
\end{aligned}$$

Komentár. Počet rovníc je n. Druhá až predposledná rovnica sa dajú prepísať do tvaru

$$\begin{gathered}
x_1 - x_2 = x_2 - x_3; \quad x_2 - x_3 = x_3 - x_4; \quad \ldots; \\
\ldots; \quad x_{n-2} - x_{n-1} = x_{n-1} - x_n\,.
\end{gathered} \tag{1}$$

Prvú rovnicu danej sústavy možno napísať v tvare

$$x_1 = c - (x_1 - x_2)\,. \tag{2}$$

Rovnice (1) a (2) tvoria sústavu $n - 1$ rovníc s n neznámymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Všetky neznáme v nich možno však vyjadriť pomocou neznámej

$$\xi = x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \ldots = x_{n-1} - x_n, \tag{3}$$

v čom je „eliminačný trik". Z (2), (3) dostaneme

$$x_1 = c - \xi, \quad x_2 = c - 2\xi, \quad x_3 = c - 3\xi, \ldots, x_n = c - n\xi. \tag{4}$$

Poslednú rovnicu danej sústavy upravíme na tvar

$$x_n = d + \xi. \tag{5}$$

Posledná rovnica (4) a rovnica (5) tvoria sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi x_n, ξ, z ktorej vypočítame ξ:

$$\xi = \frac{1}{n+1}(c - d). \tag{6}$$

Rovnice (4) a (6) dávajú jediné možné riešenie danej sústavy

$$x_k = c - \frac{k}{n+1}(c - d), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Skúškou sa presvedčíme, že (7) je skutočne riešením danej sústavy. Domnievame sa, že účastníci kategórie A by mohli na uvedený trik prísť bez akejkoľvek pomoci.

A – I – 2

Nech sú a, b, c, d komplexné čísla. Majme kvadratickú rovnicu

$$x^2 - px + q^2 = 0, \tag{8}$$

kde $p = |a|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(b\bar{c})$, $q = |ad - bc|$. Dokážte: Ak má rovnica (8) záporný koreň, potom je to koreň dvojnásobný. (*Poznámka*: Zápis Re z znamená reálnu časť komplexného čísla z; $\bar{c}$ je číslo komplexne združené s číslom c.)

Komentár. Treba dokázať, že diskriminant rovnice, tj. číslo $\frac{1}{4}p^2 - q^2$, sa rovná nule. V tejto úlohe sa hodí dokázať rovnosť diskriminantu nule trochu neobvyklým spôsobom, a to dôkazom správnosti dvoch nerovností

$$\frac{p^2}{4} - q^2 \geqq 0\,, \qquad \frac{p^2}{4} - q^2 \leqq 0\,. \tag{9}$$

Pravdivosť prvej z nerovností (9) vyplýva z predpokladu o rovnici (8). Táto rovnica s reálnymi koeficientami má záporný koreň a teda oba korene reálne, z čoho vyplýva nezápornosť diskriminantu.

Pretože súčin oboch koreňov rovnice (8) je číslo $q^2 \geqq 0$, je druhý koreň rovnice (8) taktiež nekladný a súčet oboch koreňov — číslo p — je záporný. Druhá nerovnosť (9) je teda ekvivalentná s nerovnosťou

$$p + 2q \geqq 0\,. \tag{10}$$

Správnosť nerovnosti (10) dokážeme pomocou určenia čísel p, q. Použijeme pritom nerovnosti

$$|ad - bc| \geqq |bc| - |ad|\,, \quad \mathrm{Re}(b\bar{c}) + bc = \mathrm{Re}\,(b\bar{c}) + |b\bar{c}| \geqq 0\,.$$

Za „kľúčový“ krok dôkazu pokladáme dokazovanie oboch nerovností (9). Tým sa totiž vyhneme priamemu zdôvodňovaniu rovnosti $\frac{1}{4}p^2 - q^2 = 0$, resp. $\frac{1}{2}p + q = 0$ ($\frac{1}{2}p - q$ je totiž záporné), ktoré je formálne zložitejšie.

A – I – 3

Vyšetrite priebeh funkcie

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x}{k}\right]^{[k/x]}$$

na intervale $(0, \infty)$.

Komentár. Symbol $[z]$ znamená ako obvykle celú časť čísla z. Doporučujeme, aby riešitelia postupovali takto: Najskôr sa vyšetrí priebeh funkcie $f\colon a \mapsto [a]^{[1/a]}$ v intervale $(0, \infty)$.

Výsledok je

$$f(a) = 0 \qquad \text{pre} \quad a \in (0;\ 1),$$
$$f(a) = 1 \qquad \text{pre} \quad a \in \langle 1; \infty).$$

Dalej položíme $a = \dfrac{x}{k}$ a odvodíme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x}{k}\right]^{[k/x]} = [x].$$

Grafom tejto funkcie sú známe „schody". Úloha je teda len hranie sa s funkciou $z \mapsto [z]$. Pri riešení je treba správne interpretovať symbol súčtu a uvedomiť si, že v podstate nejde o súčet nekonečného radu.

A – I – 4

Nech a, b, c sú veľkosti strán trojuholníka ABC a r je polomer jemu opísanej kružnice. Označme $V = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2$. Trojuholník ABC je ostrouhlý práve vtedy, keď $V > 0$, pravouhlý práve vtedy, keď $V = 0$ a tupouhlý práve vtedy, keď $V < 0$. Dokážte.

Komentár. Pri riešení tejto úlohy nejde o nič iného ako o vyjadrenie výrazu V pomocou súčinu kosínov veľkostí uhlov trojuholníka ABC. Riešiteľ môže vyjsť napr. zo vzorcov

$$a^2 = 4r^2 \sin^2 \alpha = 2r^2(1 - \cos 2\alpha),$$
$$b^2 = 4r^2 \sin^2 \beta = 2r^2(1 - \cos 2\beta),$$
$$c^2 = 4r^2 \sin^2 \gamma = 2r^2(2 - 2\cos^2 \gamma).$$

Dalej použije vzorce

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = -2 \cos \gamma \cos (\alpha - \beta),$$

$$\cos (\alpha - \beta) - \cos \gamma = -2 \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta - \gamma}{2}$$

a dostane potrebnú formulu

$$V = 8r^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma .$$

A – I – 5

Ak sú $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ veľkosti ľubovoľných n uhlov, platí nerovnosť

$$\left|\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \ldots \sin \alpha_n - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_n\right| \leqq \leqq \sum_{k=1}^{n} \left|\sin \alpha_k - \cos \alpha_k\right| . \tag{11}$$

Dokážte. Kedy platí rovnosť?

Komentár. A. K dôkazu nerovnosti možno poradiť riešiteľom napr. tento trik autora úlohy: Vyjde sa z rovnosti

$$\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_{k-1}(\sin\alpha_k - \cos\alpha_k)\cos\alpha_{k+1} \ldots \cos\alpha_n\,,$$

kde vždy prvý člen k-tého sčítanca s druhým členom $(k + 1)$-tého sčítanca dáva nulu. Zostane teda len druhý člen prvého sčítanca a prvý člen n-tého sčítanca. Ak označíme súčet L, platí

$$L = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n\,.$$

Ďalší postup bude už potom jednoduchý. Platí zrejme

$$|L| \leqq \sum_{k=1}^{n} |\sin\alpha_1|\,|\sin\alpha_2| \ldots |\sin\alpha_{k-1}|\,|\sin\alpha_k - \cos\alpha_k| \times$$
$$\times\,|\cos\alpha_{k+1}| \ldots |\cos\alpha_n|$$

odkiaľ priamo vyplýva

$$|L| \leqq \sum_{k=1}^{n} |\sin\alpha_k - \cos\alpha_k|\,.$$

B. Pre riešenie druhej časti úlohy **A – I – 5** radíme riešiteľom, aby preskúmali najskôr prípady $n = 1$ a $n = 2$ a až potom prešli k prípadu $n \geqq 3$.

Pre $n = 1$ dostaneme rovnosť $|\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1| = |\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1|$, ktorá platí pre všetky α_1. Pre $n = 2$

nastane v (11) rovnosť práve vtedy, keď nastane rovnosť v týchto troch nerovnostiach:

$$|\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1| \, . \, |\cos\alpha_2| \leqq |\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1| \, , \qquad (12a)$$

$$|\sin\alpha_1| \, . \, |\sin\alpha_2 - \cos\alpha_2| \leqq |\sin\alpha_2 - \cos\alpha_2| \, , \qquad (12b)$$

$$|(\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1)\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1(\sin\alpha_2 - \cos\alpha_2)| \leqq$$
$$\leqq |(\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1)\cos\alpha_2| + |\sin\alpha_1(\sin\alpha_2 - \cos\alpha_2)| \, . \qquad (12c)$$

Rovnosť v (12a, b) vedie k týmto podmienkam:

a) $\sin\alpha_1 = \cos\alpha_1 \ \wedge \ \sin\alpha_2 = \cos\alpha_2$;
b) $\sin\alpha_1 = \cos\alpha_1 \ \wedge \ \sin\alpha_2 \neq \cos\alpha_2 \ \wedge \ |\sin\alpha_1| = 1$;
c) $\sin\alpha_1 \neq \cos\alpha_1 \ \wedge \ |\cos\alpha_2| = 1 \ \wedge \ \sin\alpha_2 = \cos\alpha_2$;
d) $\sin\alpha_1 \neq \cos\alpha_1 \ \wedge \ |\cos\alpha_2| = 1 \ \wedge$
$\wedge \ \sin\alpha_2 \neq \cos\alpha_2 \ \wedge \ |\sin\alpha_1| = 1$.

Prípady b), c) nemôžu nastať, pretože pre žiadne φ neplatí $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi = 1$. Prípad d) je ve spore s (12c), pretože (12c) nadobúda v tomto prípade tvar

$$|\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2| \leqq$$
$$\leqq |\sin\alpha_1\cos\alpha_2| + |-\sin\alpha_1\cos\alpha_2| \, .$$

Pravá strana sa rovná 2, ľavá 0, takže rovnosť nenastáva.

Zostáva len prípad a). V tomto prípade

$$\alpha_k = \frac{\pi}{4} + m_k\pi \, , \qquad k = 1, 2 \, , \qquad (13)$$

kde m_1, m_2 sú celé čísla. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že vzorce (13) dávajú skutočne riešenie úlohy **B** v prípade $n = 2$.

V prípade $n \geqq 3$ postupujeme analogicky ako pri $n = 2$. Dostaneme výsledok: rovnosť v (11) nastane práve vtedy, keď

$$\alpha_k = \frac{\pi}{4} + m_k\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

kde m_k sú celé čísla.

A–I–6

Je daná guľa **G**. Určte množinu **M** všetkých bodov A, pre ktoré možno zostrojiť taký rovnoběžník $ABCD$, že celá jeho uhlopriečka BD sa nachádza v guľi **G** a o veľkostiach uhlopriečok AC, BD platí $AC \leqq BD$.

Komentár. Riešenie sa skladá z troch častí:

1. Odvodí sa, že každý vrchol A leží v guli **G**′ sústrednej s **G**, ktorej polomer je $r\sqrt{2}$ (r je polomer gule **G**).

2. Vysloví sa hypotéza, že hľadaná množina **M** je guľa **G**′.

3. Dokáže sa inklúzia **G**′ $\subset$ **M**. Pretože v časti 1. bola dokázaná inklúzia **M** $\subset$ **G**′, bude tak dokázaná rovnosť **M** $=$ **G**′.

Ad 1. Ak označíme S stred rovnobežníka $ABCD$, je podľa predpokladu $SA \leqq SB = SD$, tj. bod A leží v kruhu zostrojenom nad priemerom BD. Preto je $\sphericalangle BAD \geqq 90°$. Rovina ABD pretne guľu **G** v kruhu, ktorý z bodu A vidno pod uhlom $\omega \geqq \sphericalangle BAD \geqq 90°$ alebo ktorý bod A obsahuje.

Ad 2. Z predchádzajúcej úvahy vyplýva hypotéza, že **M** $=$ **G**′.

Ad 3. Pri dôkaze inklúzie **G**′ $\subset$ **M** zvolíme bod $A \in$ **G**′, ktorý leží mimo gule **G**. Stredom gule **G** a bodom A preložíme rovinu ϱ, ktorá pretne **G** v kružnici $\varkappa$. Z bodu A vedieme ku $\varkappa$ dotýčnice s bodmi dotyku B, D. Potom je bod A vrcholem rovnobežníka $ABCD$, ktorý vyhovuje požiadavkám úlohy.

Ako je zrejmé z vyššie uvedených komentárov, sú úlohy **A—I—1, 2, 5** náročnejšie, ich riešenie vyžaduje isté triky. Úlohy **A—I—3, 4, 6** patria zasa k úlohám, ktorých riešenie nevyžaduje od riešiteľa takmer žiadnu vynaliezavosť.

KATEGORIE B

B—I—1

Pro číslo 3 025 platí: $3\,025 = (30 + 25)^2$. Najděte všechna dvojciferná a čtyřciferná čísla této vlastnosti:

Komentář. Text úlohy je poněkud nejasný. Snad by se měl interpretovat tak, že jde jednak o čísla tvaru $10x + y$, kde x, y jsou čísla jednociferná, a jednak o čísla tvaru $100x + y$, kde x, y jsou čísla dvojciferná. Přitom číslo x **nesmí** začínat cifrou 0, číslo y **může** začínat cifrou 0.

Při řešení by se měla vyžadovat podrobná analýza. V první úloze se vychází z rovnice

$$10x + y = (x + y)^2, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\,. \quad (14)$$

Úlohu lze řešit experimentálně přezkoušením všech devíti možných případů. Malým trikem odvodíme z (14) ekvivalentní rovnici

$$9x = (x + y)(x + y - 1)\,. \quad (15)$$

Tato úprava umožňuje podstatně zúžit obor řešení. Oba činitelé na pravé straně (15) jsou totiž nesoudělná čísla, proto jeden z nich je násobkem devíti, tj. roven $9k$ $(k \geqq 1)$. Druhý činitel je $9k \pm 1 \geqq 9 \pm 1 \geqq 8$. Z (15) pak plyne $9x \geqq 9k \,.\, 8$, neboli $x \geqq 8$. Protože je $x < 10$, zužuje se obor řešení na dvě čísla $x = 8$ nebo 9. Zkouška ukáže, že jediné řešení je $81 = (8 + 1)^2$.

V druhé úloze se ukáže, že předchozí postup řešení je schopný přenesení. Výchozí rovnice v tomto případě zní

$$99x = (x + y)(x + y - 1) \,. \tag{16}$$

Nesoudělnost obou činitelů na pravé straně (16) vede k závěru, že a) buď jeden z nich je násobkem čísla 99, nebo b) jeden je násobkem čísla 9, druhý násobkem čísla 11.

V případě a) jsou činitelé na pravé straně (16), $99k$, $k \geqq 1$, $99k \pm 1 \geqq 99 \pm 1 \geqq 98$; z (16) pak plyne $99x \geqq 99k \,.\, 98$, tj. $x \geqq 98k$. Odtud dále $k = 1$, $x = 98$ nebo 99. Zkouška ukáže, že jediné řešení v případě a) je $9\,801 = (98 + 1)^2$. Poněvadž rozdíl obou činitelů na pravé straně (16) je roven 1, platí v případě b) rovnice

$$9z + 11t = 1 \,, \tag{17}$$

kde z, t jsou shodná čísla celá. Diofantickou rovnici (17) rozřeší žáci známým způsobem ($9z = 1 - 11t$, $9u = 1 - 2t$, $2t = 1 - 9u$, $2v = 1 - u$, $u = 1 - 2v$, odtud $z = 5 - 11v$, $t = 9v - 4$).

Pro řešení rovnice (17) pořídíme výpis z tabulky:

v	-2	-1	0	1	2	3
z	27	16	5	-6	-17	-28
t	-22	-13	-4	5	14	23
$9z$	243	144	45	-54	-153	-252
$11t$	-242	-143	-44	55	154	253

Řešení dává jen tlustě orámovaná část tabulky, tj. dvojice 44, 45 a 54, 55. Příslušné hodnoty x jsou podle (16) $x = 20$ nebo 30; řešení jsou

$$2\,025 = (20 + 45)^2, \qquad 3\,025 = (30 + 25)^2\,.$$

Primitivněji lze k řešením rovnice (16) dospět tak, že vzhledem k (16) sestavíme tabulku násobků čísla 11 až do $18 \,.\, 11$ (neboť $x + y < 200$) a zkoumáme dělitelnost devíti těchto násobků a čísel sousedních.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$11k$	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198
$11k-1$	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	120	131	142	153	164	175	186	197
$11k+1$	12	23	34	45	56	67	78	89	100	111	122	133	144	155	166	177	188	199

Odtud vyjde např. $x + y = 45$, $99x = 44 \,.\, 45$, $x = 20$, ale $x + y = 154$, $99x = 154 \,.\, 153$, $x = 238 > 100$. Vyjdou tedy opět jen tři řešení z levé části tabulky. Úloha dobře ukazuje, jak závisí obsáhlost zkoušky na „úplnosti“ analýzy úlohy.

B – I – 2

Dokážte platnosť nerovnosti

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{x_i}{x}\right)^2 \left(2 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^2\right) \leqq n(n+1)(2n+1),$$

kde n je prirodzené číslo a x, x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, reálne čísla. Kedy nastane rovnosť?

Komentář. Úloha je velmi jednoduchá a nepotřebuje takřka komentáře; poměrně komplikovaný koeficient při i^2 má za úkol jen trochu zmást řešitele. Označíme-li ho

$$y_i = \left(\frac{x_i}{x}\right)^2 \left(2 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^2\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

pak stačí dokázat, že platí

$$y_i i^2 \leqq i^2 . \tag{18}$$

To je evidentní, pokud je $y_i < 0$. Je-li $y_i \geqq 0$, pak nerovnost $y_i \leqq 1$ vyplývá ze studia průběhu funkce $t \mapsto t(2 - t)$. Sečteme-li nerovnosti (18) pro $i = 1$ až $i = n$, vyjde dokazovaná nerovnost ze vzorce $1^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Pokud řešitel tento vzorec nezná, odvodí dokazovanou nerovnost přímo matematickou indukcí.

Rovnost nastane, právě když ve všech nerovnostech (18) nastane rovnost, tj. když

$$(\forall i)\, y_i = 1 \quad \text{neboli} \quad (\forall i) \left(\frac{x_i}{x}\right)^2 \left(2 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^2\right) = 1\,,$$

$$\text{neboli} \quad (\forall i)\, |x_i| = |x|\,.$$

B – I – 3

Nechť pro $a \geqq 0$ je

$$r_a(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x > a\,, \\ 0 & \text{pro} \quad |x| \leqq a\,, \\ x & \text{pro} \quad x < -a\,. \end{cases}$$

Řešte rovnici s reálým parametrem k

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i(x) = kx\,.$$

Komentář. Klíčem k řešení této jednoduché úlohy je podrobná analýza průběhu funkce

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(x)\,.$$

Ukáže se, že pro $x \in \langle -n; -n+1) \cup (n-1; n\rangle$ (n přirozené), je $R(x) = nx$. Přesný důkaz je třeba provést indukcí, řešitelé by si měli načrtnout graf funkce $R(x)$.

Diskuse se provede podle parametru k a za pomoci náčrtků. Řešením jsou tyto množiny kořenů:

$k < 1$	$k = 1$	$1 < k < 2$	$\ldots \quad k = n$	$n < k < n+1$
$\{0\}$	$\langle -1; 1\rangle$	$\{0\}$	$\mathbf{K}$	$\{0\}$

kde $\mathbf{K} = \langle -n; \ -n + 1) \cup (n - 1; \ n\rangle$.

Úloha **B – I – 3** rozšiřuje opět zásobu elementárních nespojitých funkcí, s kterými se pracuje na střední škole.

B – I – 4

Jsou dány čtyři různé body A, B, C, D ležící v téže přímce. Určete množinu všech bodů X v prostoru, pro něž platí:

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC = \sphericalangle CXD\,. \tag{19}$$

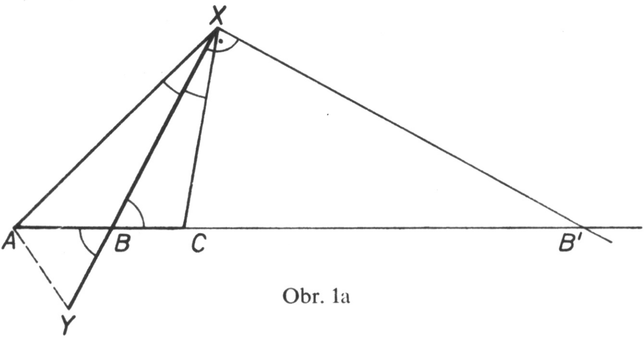
Komentář. Dvě úvodní poznámky: 1. Je vidět, že prostorová varianta úlohy je jen formální; je-li totiž $\mathbf{M}_1$ množina všech bodů X, které leží v rovině svazku (AB) a splňují podmínky (19), vznikne hledaná množina $\mathbf{M}_2$ rotací množiny $\mathbf{M}_1$ kolem osy AB.

2. Pokud má být $\mathbf{M}_2 \neq \emptyset$, pak pro uspořádání bodů A, B, C, D plyne z (6), že B leží mezi A, C a C mezi B, D; je tedy pořádek bodů A, B, C, D.

Řešení rovinné varianty úlohy **B – I – 4** se opírá o *Apolloniovu kružnici*, resp. o vlastnost osy úhlu trojúhelníku; tyto poznatky by si měli řešitelé připomenout. Na obrázku 1a je $\overrightarrow{XB}$ osa úhlu $\sphericalangle AXC$, úhel $\sphericalangle XBC$ je ostrý. (Případy, v nichž je $\sphericalangle XBC$ pravý nebo tupý, přenecháváme čtenáři.) Na polopřímce $\overrightarrow{XB}$ je sestrojen bod $Y \neq B$ tak, že je $AY = AB$. Z podobnosti $\triangle AXY \sim \triangle CXB$ plyne

$$\frac{AX}{AY} = \frac{AX}{AB} = \frac{CX}{CB},$$

neboli $\dfrac{AX}{CX} = \dfrac{AB}{CB}$; bod X leží tedy na Apolloniově kružnici

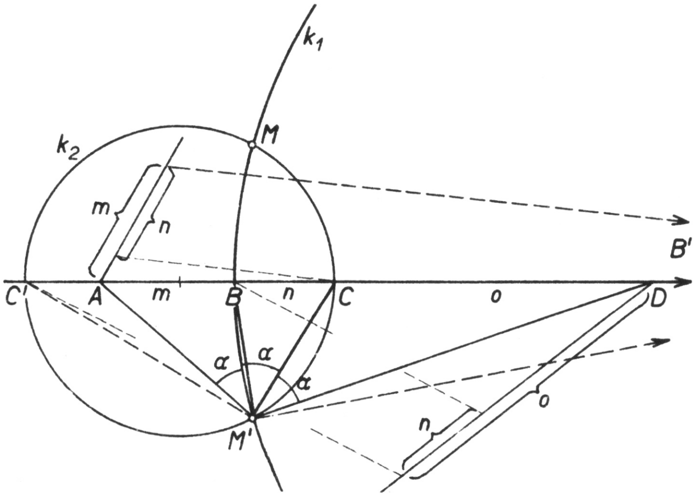


Obr. 1a

k_1, sestrojené nad průměrem BB'; přitom B' je bod ležící *vně* úsečky AC na polopřímce $\overrightarrow{BC}$, pro který platí $AB' : CB' = AB : CB$.

Obdobně: není-li $BC = CD$, leží bod X na Apolloniově kružnici k_2 sestrojené nad průměrem CC', přičemž $BC : DC = BC' : DC'$. Bod C' leží vždy vně úsečky BB' (protože úhly $\sphericalangle BXB'$, $\sphericalangle CXC'$ jsou pravé a bod C leží mezi B a B'), a proto se obě Apolloniovy kružnice k_1, k_2 protínají ve dvou různých bodech M, N souměrně sdružených podle osy AB (obr. 1b). Jejich rotací vznikne kružnice.

Také úloha **B—I—4** nevyžaduje žádný vtip; jediným impulsem by snad mohlo být upozornění na souvislost osy úhlu s Apolloniovou kružnicí. Pozornost je třeba vě-



Obr. 1b

novat diskusi; zvláště se nesmí zapomenout na případy, kdy body *X* neleží na Apolloniově kružnici, nýbrž na jisté přímce.

B—I—5

V rovině je dán trojúhelník. Najděte aspoň jeden lichoběžník, jehož všechny čtyři vrcholy leží na hranici daného trojúhelníku tak, že dělí jeho obvod na čtyři stejně dlouhé části.

Komentář. Je to v podstatě úloha na manipulaci s nerovnostmi, zejména s nerovností trojúhelníkovou. Postup řešení žáci najdou pravděpodobně snadno, náročnější je detailní provedení. Důležité je připomenutí, že úloha žádá jen určení (sestrojení) *aspoň jednoho* lichoběžníku žádané vlastnosti. Postup řešení lze rozčlenit do těchto bodů:

1. Hledaný lichoběžník má jednu stranu z ve straně trojúhelníku. Pokusíme se o to, aby tato strana z byla základna lichoběžníku a aby ležela v nejdelší straně c trojúhelníku.
2. Výpočtem určíme krajní body druhé základny z'.
3. Pokusíme se umístit stranu z v úsečce c tak, aby dvě další části hranice trojúhelníku měly délky rovnající se čtvrtině jeho obvodu.
4. Dokážeme, že výsledný čtyřúhelník není rovnoběžník.

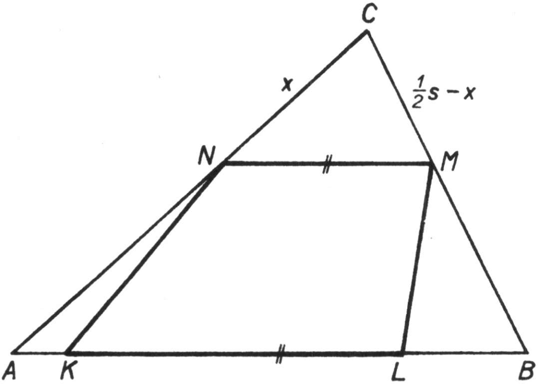
Toto členění by mohlo být instrukcí pro řešení úlohy.

Ad 1. Označíme vrcholy a strany trojúhelníku obvyklým způsobem, jeho obvod označíme $2s$; $KLMN$ bude hledaný lichoběžník (obr. 2). Je-li AB nejdelší strana daného trojúhelníku ABC, je $3c \geqq a + b + c = 2s$, tj. $c \geqq \frac{2}{3}s > \frac{1}{2}s$, a do strany AB lze umístit úsečku délky $\frac{1}{2}s$.

Ad 2. Označíme $CN = x$; pak je $CM = \dfrac{a}{b}x$, jak plyne z podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle NMC$. Na druhé straně je $CM = \frac{1}{2}s - x$. Porovnáním dostaneme

$$x = \frac{bs}{2(a + b)}. \qquad (20)$$

Bod N padne mezi body A, C, neboť není $x \geqq b$; jinak by totiž platilo $\frac{bs}{2(a+b)} \geqq b$, tj. $s \geqq 2(a+b)$, $2s \geqq 4(a+b)$, $c \geqq 3a + 3b > a + b$, a to je spor.



Obr. 2

Ad 3. Víme už, že $x < b$. Jde ještě o ostřejší omezení čísla x shora; jeho účelem je ukázat, že naneseme-li na polopřímku $\overrightarrow{NA}$ úsečku délky $\frac{1}{2}s$, překročíme bod A. Toto odůvodnění je asi nejobtížnější část důkazu; provedeme důkaz sporem.

Nechť je $x + \frac{1}{2}s \leqq b$; dosadíme-li sem x ze (20), dostaneme

$$\frac{s}{2} \cdot \frac{2+\lambda}{1+\lambda} = b\,, \tag{21}$$

kde $\lambda = \frac{a}{b}$. Z (21) plyne dále

$$\frac{2s}{b} \leqq \frac{4+4\lambda}{2+\lambda}\,;$$

tuto nerovnost spojíme s nerovností $\frac{2s}{b} = \frac{a+b+c}{b} =$ $= 1 + \lambda + \frac{c}{b} \geqq 2 + \lambda$ (je totiž $c \geqq b$); vyjde

$$2 + \lambda \leqq \frac{4 + 4\lambda}{2 + \lambda},$$

odtud $\lambda^2 \leqq 0$. Protože platí $\lambda^2 \geqq 0$, je $\lambda = \frac{a}{b} = 0$, což je spor.

Ad 4. Dokážeme nepřímo, že je $MN \neq KL = \frac{1}{2}s$. Z podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle NMC$ plyne podle (20)

$$MN = c \cdot \frac{x}{b} = c \cdot \frac{bs}{2b(a+b)} = \frac{cs}{2(a+b)}.$$

Kdyby bylo

$$\frac{cs}{2(a+b)} = \frac{s}{2},$$

platilo by $c = a + b$, což je nemožné.

B – I – 6

V pravoúhlé soustavě souřadnic v rovině jsou dány body $A = [2; 0]$, $B = [0; 3]$, $C = [0; 0]$. Určete výraz $V(x, y)$ tak, aby grafem rovnice

$$V(x, y) = 0$$

byla hranice $\triangle ABC$. Přitom v této úloze definujeme výraz takto:

[1] $1, x, y$ jsou výrazy.
[2] Jsou-li $V_1(x\ y)$, $V_2(x, y)$ výrazy, jsou výrazy také $V_1(x, y) + V_2(x, y)$, $V_1(x, y) - V_2(x, y)$, $V_1(x, y) \,.\, V_2(x, y)$.
[3] Je-li $V(x; y)$ výraz, je $|V(x, y)|$ výraz.

Komentář. Úloha je jakási kuriózní hříčka; pomocí absolutních hodnot se tu snažíme „odstranit nerovnosti", ačkoli běžný postup bývá právě opačný.

Impulsem – snad jediným – by řešitelům mohly být být tyto věty platné pro reálná čísla i „výrazy" (kvantifikátory vynecháváme):

I. $\alpha = 0 \wedge \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$.
II. $\alpha = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$.
III. $\alpha = 0 \vee \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = 0$.
IV. $\alpha = 0 \vee \beta = 0 \vee \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 0$.
V. $\alpha \geqq 0 \Leftrightarrow \alpha - |\alpha| = 0$.
VI. $\alpha \leqq 0 \Leftrightarrow \alpha + |\alpha| = 0$.

Na základě těchto vět odvodí řešitelé snadno analytické vyjádření úseček AC, BC, AB:

$$AC : V_1 = (x - |x|)^2 + (2 - x - |2 - x|)^2 + y^2 = 0,$$
$$BC : V_2 = (y - |y|)^2 + (3 - y - |3 - y|)^2 + x^2 = 0,$$
$$AB : V_3 = (3x + 2y - 6)^2 + (x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 0.$$

Analytické vyjádření hranice trojúhelníku ABC je $V_1V_2V_3 = 0$.

KATEGORIE C

C–I–1

Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 1)$ sú prvočísla všetky väčšie než 3. Potom číslo $a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2 - 1$ je deliteľné číslom 24. Dokážte.

Komentár. Predpoklad, že každé z prvočísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je väčšie než 3, upozorňuje na jednu vlastnosť týchto prvočísel: Každé prvočíslo $p > 3$ sa dá vyjadriť v tvare $p = 6k \pm 1$, kde k je prirodzené číslo (vetu však nie je možné obrátiť!). Pretože p je prvočíslo, musí byť jeho zvyšok pri delení šiestimi buď 1 alebo 5.

Prirodzené je overiť si pravdivosť dokazovanej vety najskôr pre $n = 1$:

$$p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k = 12k(3k \pm 1).$$

Ak je k párne, je $12k$ násobkom čísla 24. Ak je k nepárne, je $3k \pm 1$ párne a $12k(3k \pm 1)$ je tiež násobkom čísla 24. V každom prípade je teda

$$p^2 = 24b + 1. \tag{22}$$

Pomocou (22) sa potom ľahko vypočíta, že

$$a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2 = (24b_1 + 1)(24b_2 + 1)\ldots(24b_n + 1) = 24N + 1, \tag{23}$$

kde N je vhodné prirodzené číslo. Tým je veta dokázaná.

Ako je z uvedeného vidieť, kľúčom k riešeniu úlohy je vyjadrenie prvočísla $p > 3$ v tvare $p = 6k \pm 1$. Z rovnosti

(23) však možno vyčítať ešte tento výsledok: Druhá mocnina každého nepárného čísla, ktoré nie je násobkom troch, dáva pri delení číslom 24 zvyšok 1.

C – I – 2

Určte množinu všetkých bodov v rovine, pre ktorých pravouhlé súradnice x, y platí

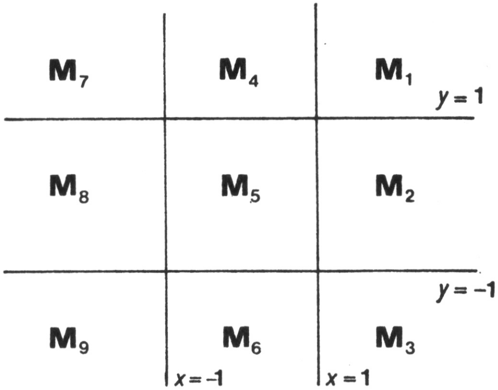
$$x + s(x) + y + s(y) < 1\,,$$

kde

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre} \quad x > \ \ 1\,, \\ 0 & \text{pre} \quad |x| \leqq \ \ 1\,, \\ -1 & \text{pre} \quad x < -1\,. \end{cases}$$

Komentár. Riešiteľom radíme, aby rovinu rozdelili na $3 \,.\, 3 = 9$ oblastí vzhľadom na definíciu funkcie $s(x)$ a zapísali príslušné množiny:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 &= \{[x; y]\colon\ x > 1 \wedge y > 1\}\,, \\
\mathbf{M}_2 &= \{[x; y]\colon\ x > 1 \wedge |y| \leqq 1\}\,, \\
\mathbf{M}_3 &= \{[x; y]\colon\ x > 1 \wedge y < -1\}\,, \\
\mathbf{M}_4 &= \{[x; y]\colon\ |x| \leqq 1 \wedge y > 1\}\,, \\
\mathbf{M}_5 &= \{[x; y]\colon\ |x| \leqq 1 \wedge |y| \leqq 1\}\,, \\
\mathbf{M}_6 &= \{[x; y]\colon\ |x| \leqq 1 \wedge y < -1\}\,, \\
\mathbf{M}_7 &= \{[x; y]\colon\ x < -1 \wedge y > 1\}\,, \\
\mathbf{M}_8 &= \{[x; y]\colon\ x < -1 \wedge |y| \leqq 1\}\,, \\
\mathbf{M}_9 &= \{[x; y]\colon\ x < -1 \wedge y < -1\}\,.
\end{aligned}$$



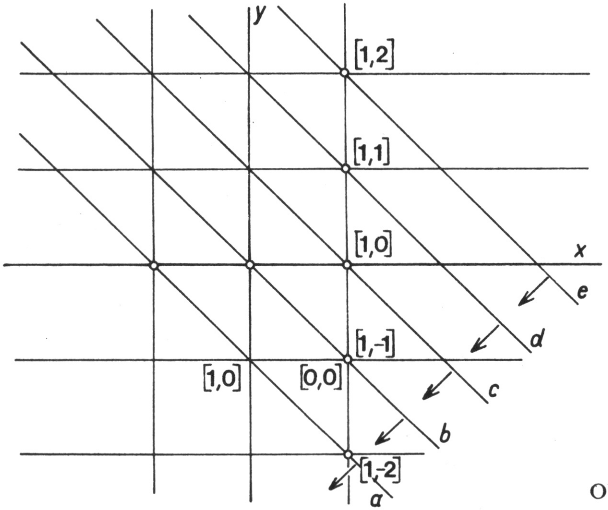
Obr. 3

Príslušný náčrtok oblastí je na obr. 3. Ďalšou úlohou bude prepísať danú nerovnosť pre jednotlivé oblasti tak, že sa nahradia $s(x)$ a $s(y)$ príslušnými hodnotami. Výsledok možno výhodne zapísať do tabuľky:

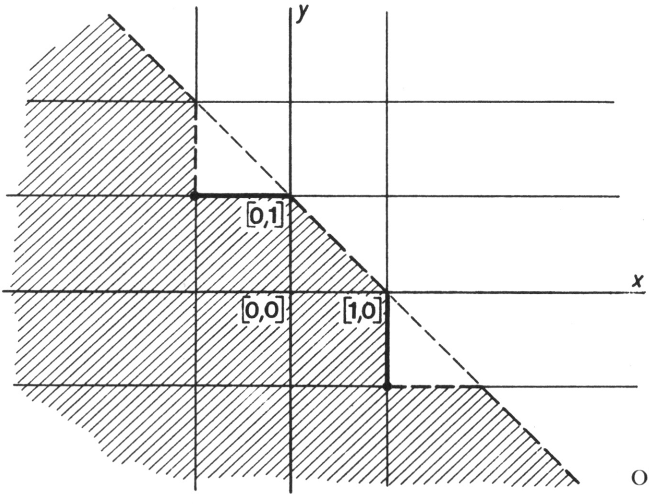
$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_3$	$\mathbf{M}_4$	$\mathbf{M}_5$
$x + y < -1$	$x + y < 0$	$x + y < 1$	$x + y < 0$	$x + y < 1$

$\mathbf{M}_6$	$\mathbf{M}_7$	$\mathbf{M}_8$	$\mathbf{M}_9$
$x + y < 2$	$x + y < 1$	$x + y < 2$	$x + y < 3$

Tieto nerovnosti vyjadrujú polroviny, ktorých hranicami sú v uvedenom poradí priamky *a*, *b*, *c*, *b*, *c*, *d*, *c*, *d*, *e* a na obr. 4 sú vyznačené šípkami. Hľadanú množinu **M** dosta-



Obr. 4



Obr. 5

neme, ak určíme prieniky týchto polrovín v uvedenom poradí s množinami $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_9$ a výsledky zjednotíme. Túto časť vyšetrovania možno prehľadne zapísať v tabuľke. Výsledná množina $\mathbf{M}$ bodov je na obr. 5, kde plne vytiahnuté časti hranice patria k $\mathbf{M}$, čiarkované nie a z vrcholov lomenej čiary patria do $\mathbf{M}$ len body vyznačené krúžkami.

C – I – 3

Riešte v reálnom obore sústavu rovníc s neznámymi x_1, x_2, x_3, x_4 a s parametrom p:

$$\begin{aligned} x_1(x_2+x_3) &= p\,, & x_2(x_3+x_4) &= p\,, \\ x_3(x_4+x_1) &= p\,, & x_4(x_1+x_2) &= p\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Komentár. Táto úloha je cvičením na zložitejšie diskusie. Na prvý pohľad sa núka vetviť riešenie sústavy pre prípady $p=0$ a $p \neq 0$.

A. Ak je $p = 0$, rozlíšia sa dva prípady: $\mathbf{A}_1$ – žiadne z čísel x_i sa nerovná nule; $\mathbf{A}_2$ – aspoň jedno z čísel x_i je rovné nule.

V prípade $\mathbf{A}_1$ vyplýva z (24)

$$x_2+x_3=0, \quad x_3+x_4=0, \quad x_4+x_1=0, \quad x_1+x_2=0,$$

čiže

$$x_2 = -x_1\,, \quad x_4 = -x_1\,, \quad x_3 = x_1\,;$$

pritom za x_1 možno zvoliť ľubovoľné číslo rôzne od nuly.

Pri skúmaní prípadu $\mathbf{A}_2$, keď z čísel x_i je aspoň jedno rovné nule, je potrebné upozorniť na to, že sústava (24) má cyklickú štruktúru, čo znamená, že stačí nájsť riešenie sústavy (24) pre prípad $x_1 = 0$, čím už bude prípad $p = 0$ v podstate vybavený.

Ak teda $x_1 = 0$, potom tretia a štvrtá rovnica (24) dávajú

$$x_3 x_4 = 0\,, \qquad x_2 x_4 = 0\,. \tag{25}$$

Je teda buď $x_4 = 0$ a z druhej rovnice (24) vyplýva $x_2 = 0 \vee x_3 = 0$ alebo je $x_4 \neq 0$ a z rovníc (25) dostávame

$$x_2 = x_3 = 0\,.$$

Ak je $p = 0$, sú teda v každom prípade aspoň tri z čísel x_i rovné nule. Obrátene: ak zvolíme štvoricu čísel $x_1 = 0$. $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, x_4 ľubovoľné, bude sústava (24) splnená.

B. V tomto prípade ($p \neq 0$) sú všetky x_i čísla rôzne od nuly. (Logická štruktúra riešenia je obvyklá: predpokladáme, že sústava (24) má riešenie, a hľadáme preň nutné podmienky.) Z prvej a tretej a z druhej a zo štvrtej rovnice sústavy (24) dostaneme

$$x_1 x_2 = x_3 x_4\,, \qquad x_2 x_3 = x_1 x_4\,. \tag{26}$$

Z rovníc (26) po vydelení a jednoduchej úprave dostaneme

$$\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^2 = 1\,,$$

tj. buď

$$x_4 = x_2\,, \qquad x_3 = x_1\,, \tag{27}$$

alebo

$$x_4 = -x_2\,; \qquad x_3 = -x_1\,. \tag{28}$$

V prípade (27) prvé dve rovnice (24) majú tvar

$$x_1x_2 + x_1^2 = p\,, \qquad x_1x_2 + x_2^2 = p \tag{29}$$

a rovnaký tvar má druhá dvojica rovníc (24). Odčítaním rovníc (29) dostaneme $x_1^2 = x_2^2$, tj. $x_1 = x_2$, pretože prípad $x_2 = -x_1$ je vzhľadom na $p \neq 0$ nemožný (pozri štvrtú rovnicu (24)). Vzhľadom na (27) môžu vyhovovať len štvorice, pre ktoré platí $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, tj.

$$x_i = \pm\sqrt{\frac{p}{2}}\,, \qquad i = 1, 2, 3, 4\,. \tag{30}$$

Skúška ukáže, že pre $p > 0$ sú obe možné štvorice čísel (30) riešeniami sústavy (24).

Zostáva preskúmať *prípad* (28). Rovnice (24) sa v tomto prípade redukujú na dve rovnice

$$x_1x_2 - x_1^2 = p\,, \qquad -x_1x_2 - x_2^2 = p\,. \tag{31}$$

Odčítaním rovníc (31) a delením číslom x_1^2 dostaneme

$$\frac{x_2^2}{x_1} + 2\frac{x_2}{x_1} - 1 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \frac{x_2}{x_1} = -1 \pm \sqrt{2}\,.$$

Pomocou (28) vyjadríme x_2, x_3, x_4 v závislosti na x_1:

$$x_2 = (-1 \pm \sqrt{2})\,x_1\,; \quad x_3 = -x_1\,; \quad x_4 = (1 \mp \sqrt{2})\,x_1\,. \tag{32}$$

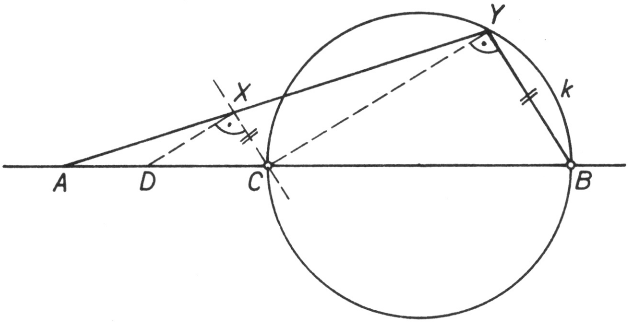
Dosadením do prvej rovnice (24) dostaneme

$$x_1^2(-2 \pm \sqrt{2}) = p \tag{33}$$

a stadiaľ x_1, x_2, x_3, x_4 v dosť zložitom tvare. Pre x_1 vyjdú z rovnice (33) pri $p < 0$ štyri možnosti. Ak určujeme x_2, x_3, x_4 z (32), musíme preskúšať voľbu znamienok skúškou – dosadením vypočítaných čísel do rovníc (24). Aj toto počítanie pre účastníka kategórie C je dosť náročné.

C – I – 4

V rovine je daná úsečka AB a jej vnútorný bod C. Zostrojme pravouhlý trojuholník BCY s pravým uhlom pri vrchole Y. Označme X taký bod na úsečke AY, že $CX \parallel BY$. Dokážte, že všetky také body X ležia na kružnici. Vyjadrite jej polomer pomocou vzdialeností AC, BC.



Obr. 6

Komentár. Formulácia úlohy nie je úplná. Je treba doplniť, že zostrojíme všetky pravouhlé trojuholníky s preponou BC. Takto určené body Y vyplnia kružnicu k zostrojenú nad priemerom BC, z ktorej sme vylúčili body B, C (obr. 6). Je zrejmé, že bod X je obrazom bodu Y v rovnoľahlosti, ktorá má stred A a prevádza bod B do bodu C, tj. má konštantu $\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AC + BC}$. Táto rovnoľahlosť prevádza bod C do bodu D polpriamky AB a kružnicu k do kružnice k' zostrojenej nad priemerom CD. Polomer kružnice k' je $\frac{AC}{AC + BC} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{AC \cdot BC}{2(AC + BC)}$.

Úloha je triviálna, nezaujímavá. Jediný zisk z riešenia je, že si riešiteľ uvedomí užitočnosť zobrazenia (rovnoľahlosť).

C–I–5

Je daný ostrý uhol $\sphericalangle MVN$. Na ramene VM sú dané body A, B a C, pre ktoré platí

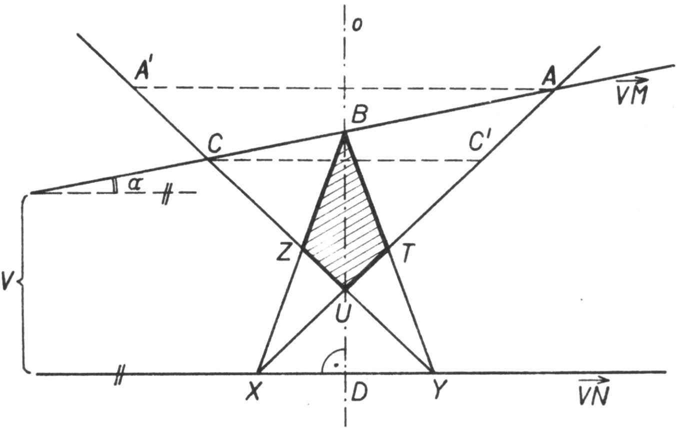
$$AV > BV > CV.$$

Zostrojte na ramene VN také body X, Y, aby prienikom trojuholníkov AXB a CYB bol štvoruholník osove súmerný podľa osi predchádzajúcej bodom B. Nájdite podmienku riešiteľnosti.

Komentár. Prvým impulzom k riešeniu by mohol byť náčrt pre vykonanie rozboru úlohy. Načrtneme štvoruholník (deltoid) $BZUT$ súmerný podľa osi $o = BU$ a zostrojíme priesečníky $\{X\} = BZ \cap TU$, $\{Y\} = BT \cap ZU$ (obr. 7). Pretože symetria podľa osi o vymieňa priamky UZ, UT i priamky BZ, BT, vymieňa aj body X, Y, tj. $o \perp XY = VN$. Aby prienikom trojuholníkov ABX, BCY bol štvoruholník, musí priamka o oddeľovať dvojice AX a CY. Načrtneme teda priamku VN a zvolíme priamku VM

tak, aby prechádzala bodom B a aby priesečník V priamok VN, VM ležal v polrovine oX. Nakoniec označme body A, C.

Pomocou popísaného náčrtku riešitelia ľahko urobia rozbor úlohy aj konštrukciu. Priamka o je daná bodom B a smerom $(o \perp VN)$. Vrcholy Z, U, T zostrojíme pomocou priamok AC', $A'C$, kde A', C' sú body súmerne združené s bodmi A, C podľa priamky o.



Obr. 7

Obťažnejšia je diskusia. Nech si riešitelia uvedomia, že úloha je riešiteľná práve vtedy, keď priamka o oddeľuje dvojice AX a CY (ide o prienik trojuholníkov ABX, BCY). Ak chceme podmienku riešiteľnosti vyjadriť analyticky, zvolíme parametre takto: $\alpha = \sphericalangle MVN$, $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$.

Pretože ide o záležitosť usporiadania, je vhodné použiť sústavu ortonormálnych súradnic, napr. $VN \equiv$ os x, $o \equiv$ os y. Súradnice bodov A, C, C' sú potom $A = [(a-b)\cos\alpha; a\sin\alpha]$,

$C = [(c - b)\cos\alpha; c \sin\alpha]$, $C' = [(b - c)\cos\alpha; c\sin\alpha]$. Pre súradnicu x_1 bodu X (priesečníka priamok VN, AC') odvodíme rovnicu

$$\frac{x_1(a - c)}{\cos\alpha} = ab + bc - 2ac\,.$$

Podmienkou riešiteľnosti je potom $x_1 < 0$ a pretože $a - c > 0$, $\cos\alpha > 0$, možno ju vyjadriť v tvare

$$b(a + c) < 2ac\,.$$

C–I–6

Je daná rovina a v nej jednotková štvorcová sieť. Vyšetrite postupnosti bodov

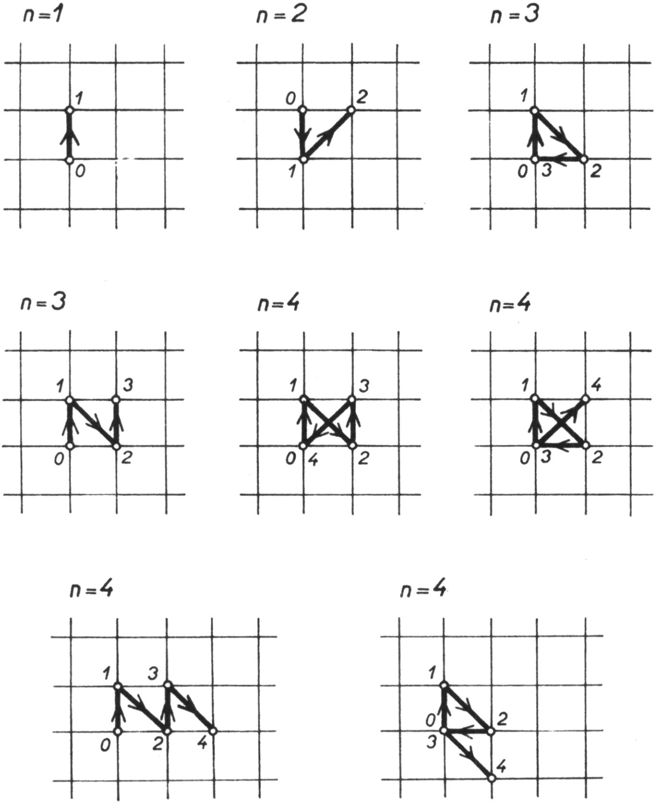
$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \tag{34}$$

s týmito vlastnosťami: Všetky body postupnosti (34) ležia vo vrcholoch danej štvorcovej siete, a to tak, že úsečky A_kA_{k+1}, $k = 0, 1, 2, \ldots$ sú striedavo vždy buď stranou alebo uhlopriečkou niektorého jednotkového štvorca siete. Ak pre niektoré $k = 1, 2, 3, \ldots$ je A_kA_{k+1} uhlopriečkou niektorého jednotkového štvorca danej siete, sú $A_{k-1}A_k$ a $A_{k+1}A_{k+2}$ stranami toho istého štvorca.

a) Pre ktoré prirodzené n môže byť $A_n = A_0$?

b) Pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ určte maximálnu a minimálnu možnú vzdialenosť bodu A_n od A_0.

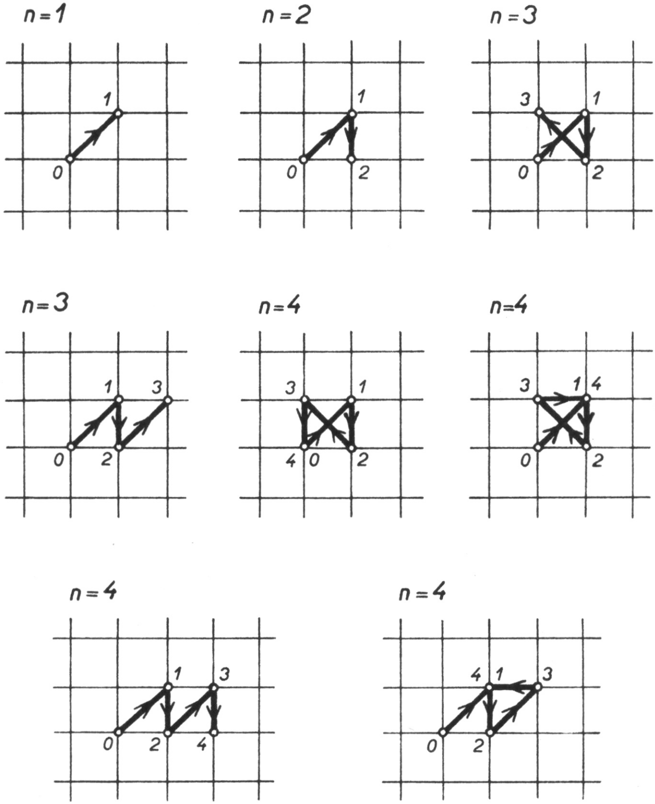
Komentár. Úloha **C–I–6** je pomerne náročná. Jej riešenie nevyžaduje síce takmer žiadne matematické znalosti,



Obr. 8

ale spôsob riešenia je pre väčšinu účastníkov MO neobvyklý.

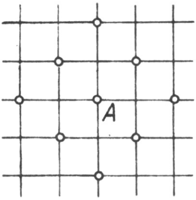
Otázku a) by bolo treba asi vysvetliť: majú sa nájsť všetky prirodzené čísla n, pre ktoré môže platiť (pri vhodnej



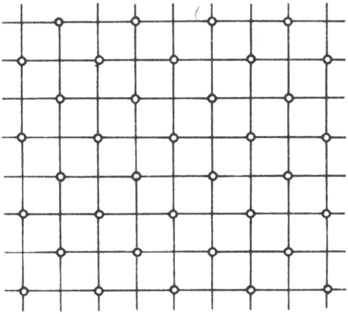
Obr. 9

voľbe bodov A_k) $A_n = A_0$. Odporúčame riešiteľom, aby si zaobstarali štvorčekový papier a experimentovali pre $n =$ $= 1, 2, 3, 4$. Všetky typy príslušných postupností bodov sú zakreslené na obr. 8 (v jeho popise je všade k namiesto A_k), a to najskôr pre *prípad I*, že A_0A_1 je strana štvorca siete.

Analogický experiment urobíme pre *prípad II*, tj. pre postupnosti, kde A_0A_1 je uhlopriečkou štvorca základnej siete (pozri obr. 9). Pritom sú v obr. 8 a 9 typy postupností $n = 3$ obe možnosti nadväzujúce na typ $n = 2$, typy postupností $n = 4$ sú všetky možnosti nadväzujúce na oba typy $n = 3$.



Obr. 10



Obr. 11

Pre riešenie úlohy a) pri postupnostiach *I* i *II* odporúčame riešiteľom, aby si načrtli všetky vrcholy siete dosiahnuteľné z jedného z nich pre $n = 4$. Vzhľadom na obr. 8, 9 vyjde situácia načrtnutá na obr. 10, kde východzím bodom je bod A. Z tohto obrázku je zrejmé, že pre $n = 4r$ (r prirodzené) sú vzájomne „dosiahnuteľné“ ktorékoľvek dva body siete Σ z obr. 11. Vzhľadom na druhé náčrty z obr. 8 i 9 je zrejmé, že pre $n = 4r + 2$ (r celé nezáporné) nemôže platiť $A_n = A_0$ pre žiadny bod A_0. A_n je podľa obr. 11 vždy susedným bodom k niektorému bodu siete Σ.

Pre $n = 4r + 1$ (r celé nezáporné) analogicky zistíme, že rovnosť $A_n = A_0$ môže nastať len pre postupnosti skupiny *II*, ale nie I. Pre $n = 4r + 3$ (r celé nezáporné) zistíme, že rovnosť $A_n = A_0$ môže nastať len pre postupnosti skupiny I, ale nie II.

Tieto výsledky si je treba demonštrovať pre určité n, napr. $n = 5, 6, 7, 8$, a to postupnosti skupiny I aj II. Postupnosti budeme konštruovať s tendenciou dosiahnuť rovnosť $A_n = A_0$.

b) Je evidentné, že minimum δ vzdialeností bodov A_n, A_0 je pre $n > 1$ buď 0 alebo 1. Pre $n = 1$ pre skupinu II je $\delta = \sqrt{2}$.

Pre maximálnu vzdialenosť Δ dostaneme pri párnom n v skupine I i II podľa siedmich náčrtkov na obr. 8 a $\Delta = \frac{1}{2}n$. Pre nepárne n dostaneme

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 1} \qquad \text{v skupine } I;$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + 1} \qquad \text{v skupine } II.$$

Tieto výsledky si budeme demonštrovať asi len na numerických príkladoch. Úloha **C—I—6** je myšlienkove najhodnotnejšou úlohou I. kola.

KATEGORIE Z

Z—I—1

Určete všecky takové dvojice čísel a, b, pro něž je mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ možno vyjádřit jako součin mnohočlenů 2. stupně, z nichž jeden je $x^2 + ax + b$.

Komentář. Úloha **Z – I – 1** navazuje bezprostředně na úlohu **Z – P – 1** a opírá se o určení koeficientů polynomu (polynomické funkce), který vyplývá z rovnosti dvou takových funkcí platící pro všecky hodnoty proměnné. V našem případě jde o rovnost

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d);$$

neboli

$$x^4 + ax^2 + b =$$
$$= x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd. \tag{35}$$

Z (35) plyne

$$a + c = 0, \quad b + d + ac = a, \quad ad + bc = 0, \quad bd = b. \tag{36}$$

Čtvrtá rovnice (36) vede k tomu, abychom začali rozlišením případů $b \neq 0$ a $b = 0$. Radíme, aby si řešitelé pro koeficienty a, b, c, d sestavili tabulku, kterou budou postupně doplňovat. V případě $b \neq 0$ dostaneme z čtvrté rovnice (36) $d = 1$, takže začátek tabulky je

a	b	c	d
			1

K tomu přistupují rovnice

$$c = -a, \qquad b + 1 - a^2 = a, \qquad a(1 - b) = 0. \tag{37}$$

Třetí rovnice (37) vede k rozlišení $a = 0$, $a \neq 0$. Rovnice (37) nám dávají toto doplnění tabulky

a	b	c	d
0	-1	0	1
1	1	-1	1
-2	1	2	1

Pro $b = 1$ dává totiž druhá rovnice (37) dvě možnosti:

$$a^2 + a - 2 = 0, \tag{38}$$

$$\left(a + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4}, \tag{39}$$

$$a + \tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{3}{2},$$

tj. $a = 1$ nebo -2. Jinak: (38) můžeme napsat ve tvaru $(a^2 - 1) + (a - 1) = 0$, neboli $(a - 1)(a + 1) + (a - 1) = 0$, neboli $(a - 1)(a + 2) = 0$
a odtud opět $a = 1$ nebo $a = -2$. Jak patrno, „obcházíme" tu řešení kvadratické rovnice, ale „doplnění" na druhou mocninu dvojčlenu (39) by měl být pro účastníky olympiády kategorie Z běžný obrat.

V doplňování tabulky pokračujeme pro $b = 0$. Soustava (36) má pak tvar

$$c = -a, \qquad d = a(1 + a), \qquad ad = 0\,. \tag{40}$$

Poslední rovnice (40) nás vede k rozlišení případů $a \neq 0$

a $a = 0$. Je-li $a \neq 0$, je $d = 0$, z druhé rovnice (40) je $a = -1$, z první $c = 1$. Další řádek tabulky je tedy

a	b	c	d
-1	0	1	0
....	....	....	....

Je-li $a = 0$, plyne z (40) $c = d = 0$ a dostaneme tedy celkem 5 *možných* řešení:

a	b	c	d
0	-1	0	1
1	1	-1	1
-2	1	2	1
-1	0	1	0
0	0	0	0

Zkouškou se přesvědčíme, že uvedené čtveřice čísel a, b, c, d jsou skutečně řešeními; např. je pro všechna x

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1).$$

Jak je patrné, jádro úlohy je v rozboru a diskusi soustavy (36).

Z – I – 2

Na výstavě hraček jezdí dvě elektrické lokomotivy po kolejích položených na dvou soustředných kružnicích $k_1(S; r_1)$ a $k_2(S; r_2)$, $r_2 > r_1$, ve stejném smyslu stálou rychlostí v. Vyjely z polohy, v níž byly sobě nejblíže. V kterých okamžicích po startu budou od sebe a) poprvé nejdále; b) poprvé nejblíže? Řešte nejprve obecně, pak pro: $r_1 = 60$ cm, $r_2 = 70$ cm, $v = 20$ cm/s, $\pi \doteq \frac{22}{7}$.

Komentář. Doporučujeme řešit nejprve úlohu:

Na kruhové dráze o poloměru r společně trénovali dva běžci. Spolu vyběhli z téhož místa ve stejném smyslu se stálými rychlostmi v_1 a v_2 $(v_1 > v_2)$ a běželi tak dlouho, dokud rychlejší z nich nezískal před druhým náskok tři okruhů. V kterých okamžicích po startu byli od sebe a) poprvé nejdále; b) poprvé nejblíže?

Vzdušná vzdálenost mezi oběma běžci byla vždy největší, právě když byli v krajních bodech téhož průměru dráhy. Poprvé se tak stalo, když rychlejší běžec měl náskok poloviny okruhu. Pro tento okamžik t tedy platí

$$v_1 t - v_2 t = \pi r ,$$

tj.

$$t = \frac{\pi r}{v_1 - v_2} . \tag{41}$$

Po startu si běžci byli vždy nejblíže, když rychlejší pomalejšího předbíhal. Poprvé se tak stalo, když rychlejší měl náskok jednoho okruhu. Pro tento okamžik T platí:

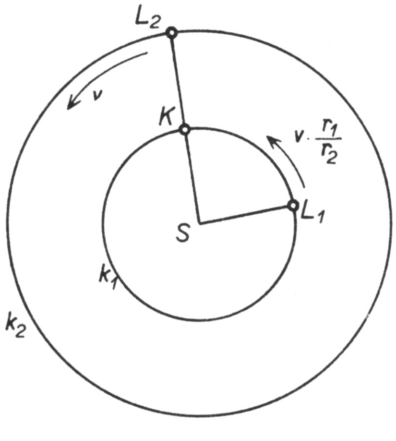
$$v_1 T - v_2 T = 2\pi r ,$$

tj.

$$T = 2 \cdot \frac{\pi r}{v_1 - v_2} = 2t. \tag{42}$$

Tuto úlohu je možno řešit např. pro $r = 50$ m, $v_1 = 10$ km/h, $v_2 = 13{,}6$ km/h.

Přejdeme k řešení úlohy **Z–I–2**. Nechť body L_1 a L_2 na obr. (12) znázorňují obě lokomotivy v jistém časovém



Obr. 12

okamžiku. Označme K průsečík polopřímky SL_2 s kružnicí k_1. Pohybuje-li se bod L_2 po kružnici k_2 rychlostí v, pak se bod K pohybuje po kružnici k_1 rychlostí

$$v \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Body L_1 a L_2 jsou si zřejmě nejblíže (nejdále), právě když jsou si nejblíže (nejdále) body L_1 a K. V okamžiku startu lokomotivy body L_1 a K splývaly. Položíme-li

$$v_1 = v, \qquad v_2 = v \cdot \frac{r_1}{r_2}, \qquad r = r_1,$$

lze pro řešení úlohy **Z–I–2** užít výše uvedených vzorců (41) a (42). Z těchto vzorců pak plyne pro případ a)

$$t = \frac{\pi r_1 r_2}{v(r_2 - r_1)},$$

tj. pro dané údaje $t \doteq 66$ s;
pro případ b) je

$$T = 2t,$$

tj. pro dané údaje $T \doteq 132$ s.

Z–I–3

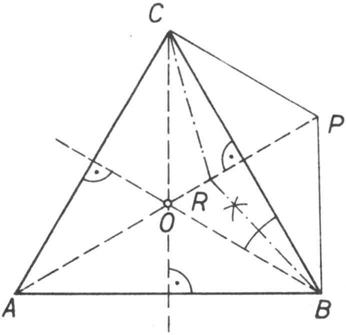
Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, jehož strana má velikost a. Sestrojte bod O, jenž je průsečíkem jeho výšek, a bod P, jenž je s bodem O souměrně sdružen podle přímky BC. Dokažte, že čtyřúhelníku $ABPC$ lze vepsat i opsat kružnici. Vypočítejte poloměry obou těchto kružnic.

Komentář. Úloha **Z–I–3** navazuje volně na úlohu **Z–P–3**. Situace je načrtnuta na obr. 13. Impuls, který lze dát řešitelům, je tento: Kružnice, která se dotýká polopřímek XY, XZ, má střed na ose úhlu $\sphericalangle YXZ$.*)

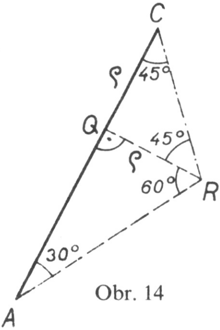
*) Kružnice, která prochází body X, Y, má střed na ose úsečky X, Y.

Existuje-li tedy kružnice vepsaná čtyřúhelníku $ABPC$, má svůj střed na osách úhlů $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABP$, $\sphericalangle BPC$, $\sphericalangle PCA$, tj. na polopřímkách $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{CR}$, $\overrightarrow{BR}$ (osy obou úhlů $\sphericalangle ABP$, $\sphericalangle ACP$ se protínají vzhledem k symetrii podle přímky AP v témž bodě R přímky AP). R je tedy střed kružnice vepsané.

Protože $\triangle OBP$ je rovnostranný (všechny jeho úhly mají velikost $60°$), procházejí všechny čtyři osy úseček AB, AC, BP, CP bodem O, který je středem kružnice opsané čtyřúhelníku $ABPC$.



Obr. 13



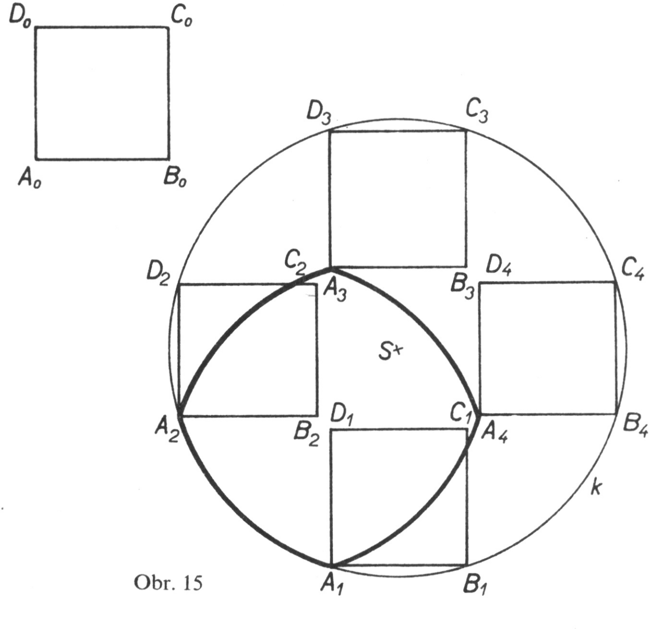
Obr. 14

Pro poloměr r kružnice opsané platí $r = OA = OB = OC = OP = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ (dvě třetiny výšky trojúhelníku ABC). Poloměr ϱ kružnice vepsané lze vypočítat buď z $\triangle PCR$ podle úlohy **Z–P–3** nebo z $\triangle ACR$ (viz obr. 14). Zde je $CQ = \varrho$, $AQ = \varrho\sqrt{3}$, $AQ + CQ = a$, tj. $\varrho = \frac{a}{\sqrt{3}+1} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$. Stačí v $\triangle ACR$ zakreslit úsečku $QR = \varrho$ a zajistit velikosti úhlů obou trojúhelníků AQR, CQR.

Z – I – 4

V rovině je dána kružnice k o poloměru 6 cm a čtverec $A_0B_0C_0D_0$, jehož strana má délku 3,5 cm. Označme $ABCD$ čtverec těchto vlastností:

1. Vznikne rovnoběžným posunutím čtverce $A_0B_0C_0D_0$;
2. náleží kruhu s hranicí k;
3. aspoň jeden jeho vrchol náleží kružnici k.



Obr. 15

Narýsujte čáru, kterou vyplní vrcholy A všech takových čtverců.

Komentář. Úloha **Z – I – 4** je úloha na určení množiny bodů v rovině, vytvořené pohybem; hlavní roli tu hraje pochopení textu a znázornění situace. Deduktivně pak má řešitel odůvodnit, že hledaná množina bodů **M** se skládá ze čtyř navzájem shodných oblouků kružnice $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, $\overset{\frown}{A_3A_4}$, $\overset{\frown}{A_4A_1}$, z nichž první je částí kružnice k, druhý vznikne posunutím $(D_2 \to A_2)$ z oblouku $\overset{\frown}{D_2D_3}$, třetí vznikne posunutím $(C_3 \to A_3)$ z oblouku $\overset{\frown}{C_3C_4}$ a čtvrtý vznikne posunutím $(B_4 \to A_4)$ z oblouku $\overset{\frown}{B_4B_1}$. S tímto výkladem a jeho odůvodněním se asi spokojíme. Situace je nakreslena na obr. 15; k výkladu patří i popis konstrukce čtverců $A_iB_iC_iD_i$.