25. ročník matematické olympiády

II. Přípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 25. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1975-1976. 18. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 35–43.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404672

II. Přípravné úlohy I. kola

KATEGORIE A, B, C

Mezi přípravné úlohy XXV. ročníku MO jsou převážně zařazeny úlohy známé z předchozích ročníků naší soutěže. U těchto úloh uvádíme pouze odkaz, v kterém ročníku byly již řešeny. Údaj o stránce se vztahuje k příslušné ročence. Komentovaná řešení uvádíme jen u úloh, které byly v MO zadány poprvé.

Do první skupiny (opakované úlohy) patří:

A – P – 1 (roč. XVII. MO, str. 95),
A – P – 2 (roč. XX. MO, str. 47),
B – P – 1 (roč. XXI. MO, str. 136),
B – P – 2 (roč. XXI. MO, str. 73),
C – P – 1 (roč. XXI. MO, str. 48),
C – P – 2 (roč. XVII. MO, str. 50),
C – P – 3 (roč. XIX. MO, str. 86),
C – P – 4 (roč. XV. MO, str. 54).

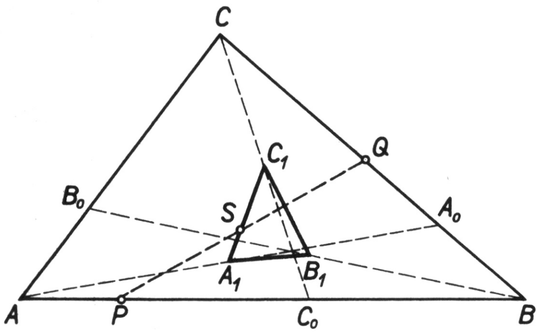
Do druhé skupiny (nové úlohy) patří:

A – P – 3, A – P – 4, B – P – 3, B – P – 4.

K nim uvádíme následující komentáře:

A – P – 3

V rovině je dán trojúhelník **T**. Najděte množinu středů všech takových úseček, které mají oba krajní body na hranici trojúhelníku **T** a které ji rozdělují na dvě stejně dlouhé části.



Obr. 1

Komentář. Uvažujme takto: Pohybuje-li se bod P po hranici daného trojúhelníku ABC stálou rychlostí, pohybuje se bod Q, který spolu s P dělí hranici na dvě stejně dlouhé části, také stálou a stejnou rychlostí. Platí však, jak se např. snadno dokáže metodou souřadnic: Pohybuje-li se v rovině bod P přímočaře rovnoměrně a bod Q přímočaře rovnoměrně, pohybuje se i střed úsečky PQ přímočaře rovnoměrně (popř. je pevný). Označme A_0 takový bod strany BC (proč je to vnitřní bod této strany?), pro který $AB + BA_0 =$ $= A_0C + CA$, obdobně B_0, C_0 příslušné body na AC a AB, a dále A_1, B_1, C_1 středy AA_0, BB_0, CC_0 (obr. 1). Probíhá-li bod P úsečku AC_0, probíhá bod Q úsečku A_0C, a tedy střed úsečky PQ pak probíhá úsečku A_1C_1. Pokračujeme-li dále, dostaneme, že hledanou množinou je hranice trojúhelníku (proč je to trojúhelník?) $A_1B_1C_1$. Uvedený nástin potřebuje ovšem propracovat.

Poznámka. Metodou souřadnic nebo pomocí Cevovy věty lze dokázat, že přímky AA_0, BB_0, CC_0 procházejí týmž bodem.

A – P – 4

Je-li trojúhelník $\mathbf{T}_1$ obsažen v trojúhelníku $\mathbf{T}_2$, pak

(1) délka nejdelší strany trojúhelníku $\mathbf{T}_1$ nepřevýší délku nejdelší strany trojúhelníku $\mathbf{T}_2$;

(2) délka nejmenší výšky trojúhelníku $\mathbf{T}_1$ nepřevýší délku nejmenší výšky trojúhelníku $\mathbf{T}_2$.

Dokažte a zjistěte, kdy v případě (1) a kdy v případě (2) nastane rovnost délek.

Nástin řešení. První tvrzení vyplývá z toho, že délka nejdelší strany trojúhelníku je největší vzdálenost dvou bodů trojúhelníku. Druhé pak z toho, že délka nejmenší výšky trojúhelníku je šířkou nejužšího pásu mezi rovnoběžkami, který daný trojúhelník obsahuje. (To se dokáže např. takto: Je-li $\mathbf{P}$ libovolný pás obsahující daný trojúhelník ABC, lze $\mathbf{P}$ tak „zúžit" rovnoběžným zužováním v pás $\mathbf{P}'$, že na každé hraniční přímce už leží alespoň jeden vrchol trojúhelníku. Nechť to jsou vrcholy A a B; nechť π^+ je polorovina s hranicí AB, která obsahuje vrchol C. Pak alespoň jeden z úseků AA', BB' kolmic k hraničním přímkám je obsažen v π^+; nechť je to AA'. Pak platí $\sphericalangle ABA' \geqq \sphericalangle ABC$, a proto je výška v_a daného trojúhelníku menší nebo rovna šířce pásu

P′, tedy i **P**. Přitom existuje pás, jehož šířka je rovna délce nejmenší výšky.)

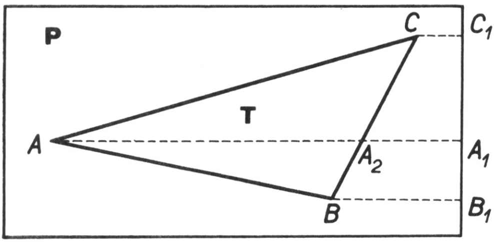
V případě (1) nastává rovnost délek, právě když některá z nejdelších stran trojúhelníku $\mathbf{T}_1$ splývá s některou z nejdelších stran trojúhelníku $\mathbf{T}_2$. V případě (2) nastává rovnost délek, právě když některá z nejmenších výšek (tj. úseček) trojúhelníku $\mathbf{T}_1$ je totožná s některou nejmenší výškou trojúhelníku $\mathbf{T}_2$.

B – P – 3

V rovině je dán pravoúhelník **P** a trojúhelník **T**, který je v něm obsažen. Dokažte, že o obsahu S_1 pravoúhelníku **P** a obsahu S_2 trojúhelníku **T** platí

$$2S_2 \leqq S_1$$

a najděte všechny případy, kdy nastane rovnost.



Obr. 2

Nástin řešení. Lze postupovat např. takto (obr. 2): Nechť z kolmých průmětů A_1, B_1, C_1 vrcholů trojúhelníku A, B, C na jednu stranu pravoúhelníku je např. A_1 bodem úsečky B_1C_1. Je-li A_2 průsečík strany BC s přímkou vedenou bodem A rovnoběžně se směrem tohoto promítání, platí o obsazích

$$S_2 = \triangle ABC = \triangle AA_2B + \triangle AA_2C =$$
$$= \tfrac{1}{2}AA_2(A_1B_1 + A_1C_1) = \tfrac{1}{2}AA_2 \, . \, B_1C_1 \leqq \tfrac{1}{2}S_1 \, .$$

Rovnost nastane, právě když dva vrcholy trojúhelníku jsou sousedními vrcholy pravoúhelníku a třetí leží v protější straně pravoúhelníku.

B – P – 4

Mají-li čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ vlastnost, že přímky AB a $A'B'$ splývají, přímky CD a $C'D'$ splývají a přitom platí $AB = A'B'$, $CD = C'D'$, pak mají stejný objem. Dokažte.

Komentář. Základní myšlenka je uvědomit si, že stačí tvrzení dokázat pro případ $C = C'$, $D = D'$ a tohoto tvrzení užít dvakrát. Uvedený speciální případ však ihned plyne z toho, že obsahy trojúhelníků ABD a $A'B'D'$ jsou si rovny a délky výšek k oběma čtyřstěnům z vrcholu C rovněž.

Z – P – 1

a) Rozhodněte nejprve, pro která a, b, c má smysl výraz

$$V = \frac{(a-b)^2}{c^2 - ac - bc + ab} + \frac{(b-c)^2}{a^2 - ab - ac + bc} + \frac{(c-a)^2}{b^2 - bc - ba + ca}.$$

b) Dokažte, že pro každou trojici čísel a, b, c, pro niž má smysl, je výraz V roven témuž číslu, a vypočtěte toto číslo.

Komentář. Úloha Z – P – 1 byla poprvé zadána v I. kole kategorie D v VI. roč. MO. Její podrobné řešení lze též nalézt v knížce *Vybrané úlohy z matematické olympiády kat. Z* na str. 44, kterou zpracovali doc. J. Vyšín, CSc., a dr. V. Macháček; v roce 1971 ji vydalo SPN.

Z – P – 2

Dokažte, že rozdíl každých dvou kladných trojciferných čísel, z nichž prvé je zapsáno v desítkové soustavě týmiž číslicemi jako druhé, avšak v opačném pořadí, je dělitelný 9 a 11.

Komentář. Úloha Z – P – 2 je přístupná i žákům 8. roč. ZDŠ. Pro její řešení stačí znát běžná pravidla dělitelnosti devíti a jedenácti.

Obě čísla uvažovaná v textu úlohy mají týž ciferný součet, a proto při jejich dělení devíti dostaneme stejné zbytky. Tedy jejich rozdíl je dělitelný devíti.

Pro dělitelnost jedenácti platí *pravidlo:*

Dělíme-li přirozené číslo vyjádřené v desítkové soustavě jedenácti, dostaneme týž zbytek, jako dělíme-li jedenácti součet jeho číslic sudých řádů zmenšený o součet jeho číslic lichých řádů.

Z tohoto pravidla vyplývá, že obě trojciferná čísla, o nichž se hovoří v textu úlohy, dávají při dělení jedenácti týž zbytek, takže jejich rozdíl je dělitelný jedenácti.

Žáci 9. ročníků k řešení úlohy asi využijí rovnosti

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99(x - z),$$

která platí pro libovolná čísla x, y, z. Avšak i žáci 9. ročníku by si měli všimnout řešení pomocí pravidel dělitelnosti v desítkové soustavě.

Z – P – 3

Je dán rovnoběžník $ABCD$. Potom pro každý bod X roviny rovnoběžníku platí

$$AX < BX + CX + DX\ ;$$

dokažte.

Komentář. Pro řešení úlohy Z – P – 3 je třeba vědět, že pro vzdálenosti každých tří bodů U, V, T platí

$$UV \leqq UT + TV\,.$$

Přitom rovnost nastane právě tehdy, když bod T náleží úsečce (nenulové či nulové) UV. Úloha je řešena a podrobně komentována v brožuře XXI. roč. MO na str. 66–69.

Z–P–4

Pro každý trojúhelník ABC se středem S vepsané kružnice platí:

Jestliže

$$\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA\,,$$

pak

$$AS < BS < CS\,.$$

Dokažte. Platí i věta obrácená k této větě?

Komentář. Řešení úlohy Z–P–4 se zakládá na znalosti konstrukce středu vepsané kružnice trojúhelníku a na větách o vztahu mezi stranami a úhly trojúhelníku.

Je-li S střed vepsané kružnice $\triangle ABC$, pak z předpokladu, že $\sphericalangle BCA < \sphericalangle ABC$, plyne, že $\sphericalangle SCB < \sphericalangle SBC$. V $\triangle BSC$ je tedy

$$BS < CS\,. \tag{1}$$

Z předpokladu $\sphericalangle ABC < \sphericalangle CAB$ dále plyne, že $\sphericalangle ABS < \sphericalangle SAB$. V $\triangle ABS$ je tedy

$$AS < BS\,. \tag{2}$$

Podle (1) a (2) platí

$$AS < BS < CS\,.$$

Věta obrácená k právě dokázané větě platí. Její důkaz plyne z věty I. uvedené na str. 22 v učebnici G 8. Výše jsme užili věty II. ze str. 23.