25. ročník matematické olympiády

IV. Úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 25. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1975-1976. 18. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 84–114.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404674

IV. Úlohy II. kola

KATEGORIE A

A – II – 1a

Je dané prirodzené číslo $n \geqq 2$ a reálne čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, pre ktoré platí

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n\,, \quad 0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n\,.$$

Potom platí

I.:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n > a_1b_2 + \ldots + a_{n-1}b_n + a_nb_1\,,$$

II.:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n > a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1\,.$$

Dokažte.

Riešenie. I. Nerovnosť dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 2$ máme

$$0 < (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) = a_1b_1 + a_2b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\,,$$

z čoho hned vyplýva

$$a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1 .$$

Nech pre čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \dots, n, n + 1$ platí

$$0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1}\,, \quad 0 < b_1 < \dots < b_n < b_{n+1}\,, \tag{1}$$

a daná nerovnosť je správna pre prirodzené číslo n. Potom

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i + a_{n+1}b_{n+1} > a_1b_2 + \dots + \tag{2}$$

$$+ a_{n-1}b_n + a_nb_1 + a_{n+1}b_{n+1} .$$

Z toho, že $b_{n+1} > b_1$, $a_{n+1} > a_n$, vyplýva

$$a_nb_1 + a_{n+1}b_{n+1} > a_nb_{n+1} + a_{n+1}b_1 \tag{3}$$

a z (2), (3) vyplýva správnosť danej nerovnosti pre prirodzené číslo $n + 1$.

Opäť použijeme metódu matematickej indukcie. Pre $n = 2$ sme nerovnosť dokázali vyššie. Nech pre čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \dots, n, n + 1$ platí (1) a nech je daná nerovnosť správna pre prirodzené číslo n, pričom je budeme aplikovať na čísla $0 < a_1 < \dots < a_n$, $0 < b_2 < \dots < b_{n+1}$, tj.

$$a_1b_2 + \dots + a_nb_{n+1} > a_1b_{n+1} + \dots + a_nb_2 . \tag{4}$$

Ak ke každej strane nerovnosti (4) pripočítame $a_{n+1}b_1$ a použijeme nerovnosť I., dostaneme II. pre prirodzené číslo $n + 1$. Tým sú obe časti tvrdenia dokázané.

A–II–1b

Je daná funkcia

$$f(x) = \frac{12x - 6x^2}{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 9}.$$

Určete všetky reálne čísla x, pre ktoré $f(x)$ nadobúda najmenšiu hodnotu.

Riešenie. 1. *spôsob:* Čiteteľa zlomku, ktorým je daná funkcia definovaná možno písať v tvare $-6(x^2 - 2x)$. Keďže $(x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, možno menovateľa zlomku prepísať do tvaru

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 9 = (x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) + 9$$

a ak označíme $x^2 - 2x = z$, potom pre $x \neq 0$, $x \neq 2$, tj. $z \neq 0$, platí

$$y = \frac{-6}{\left(z + \frac{9}{z}\right) - 3}. \tag{1}$$

Keďže podľa Cauchyho nerovnosti pre $z > 0$ platí

$$z + \frac{9}{z} = 6, \tag{2}$$

pričom rovnosť v (2) nastane vtedy a len vtedy, keď $z = 3$, ľahko sa vidí, že pre všetky $z > 0$ je $y \geqq -2$; najmenšiu hodnotu $y = -2$ nadobúda daná funkcia pre $z = 3$ čiže pre $x^2 - 2x = 3$, odkiaľ dostaneme $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Pre $z = 0$ je totiž $y = 0$ a pre $z < 0$ je jmenovateĺ zlomku (1) záporný a $y > 0$.

Záver: Daná funkcia nadobúda najmenšiu hodnotu pre $x = -1$ a $x = 3$.

2. *způsob:* Funkci f upravíme na tvar

$$f(x) = \frac{k}{g(x)},$$

kde k je konstanta. Dělením zjistíme, že

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 9 = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3) + 9,$$

takže pro $x \neq 0$, $x \neq 2$ lze psát

$$f(x) = \frac{(-6)(x^2 - 2x)}{(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3) + 9} =$$

$$= \frac{-6}{x^2 - 2x - 3 + \dfrac{9}{x^2 - 2x}}.$$

Je zřejmé, že $f(x)$ bude minimální, právě když funkce

$$g(x) = x^2 - 2x - 3 + \frac{9}{x^2 - 2x}$$

bude minimální v kladných hodnotách. Derivujeme funkci g:

$$g'(x) = 2x - 2 - \frac{9(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} =$$

$$= 2(x - 1)\frac{(x^2 - 2x)^2 - 9}{(x^2 - 2x)^2}.$$

Odtud již snadno zjistíme, že $g'(x)$ se anuluje jednak pro $x = 1$ (ale $g(1) < 0$), jednak pro $x = -1$ a $x = 3$, což jsou právě hledané hodnoty. Je totiž

$$(x^2 - 2x)^2 - 9 = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 3)\,;$$

první trojčlen má kořeny -1 a 3, druhý nemá reálné kořeny.

3. *způsob:* Velmi jednoduché řešení vychází z faktu (který lze „objevit“, když si aspoň hruba nakreslíme průběh funkce f pro malé hodnoty argumentu), že graf funkce f je symetrický vzhledem k přímce $x = 1$.

Položme $x = 1 + y$; funkce f tak přejde ve funkci

$$h(y) = (-6)\frac{y^2 - 1}{y^4 - 5y^2 + 13},$$

která je zřejmě sudá. Položíme-li dále $y^2 = z$, přejde funkce h na funkci

$$q(z) = (-6)\frac{z - 1}{z^2 - 5z + 13}.$$

Funkci q snadno zderivujeme:

$$q'(z) = (-6)\,.\,\frac{z^2 - 5z + 13 - 2z^2 + 7z - 5}{(z^2 - 5z + 13)^2} =$$

$$= \frac{6}{(z^2 - 5z + 13)^2}(z^2 - 2z - 8)\,.$$

Funkce q' se anuluje pro

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}.$$

Zápornému kořenu neodpovídá reálné y; kořenu $z = 4$ odpovídají hodnoty $y = +2$ a $y = -2$, tzn. $x = 3$ a $x = -1$.

Zbývá ověřit, že v těchto bodech má f, resp. h skutečně *minimum*, což se provede obvyklým způsobem.

A – II – 2a

Jsou dány trojúhelníky $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$ s obsahy P_1 a P_2 a poloměry vepsaných kružnic ϱ_1 a ϱ_2. Je-li trojúhelník $\mathbf{T}_1$ obsažen v trojúhelníku $\mathbf{T}_2$, pak platí

$$\varrho_1 \geqq \frac{P_1}{P_2}\varrho_2 .$$

Dokažte.

Řešení. Označme o_1, o_2 délky obvodů prvního a druhého trojúhelníku. Platí tedy

$$P_1 = \tfrac{1}{2}o_1\varrho_1 ,$$

$$P_2 = \tfrac{1}{2}o_2\varrho_2 .$$

Proto je dokazovaná nerovnost ekvivalentní nerovnosti

$$o_1 \leqq o_2 ,$$

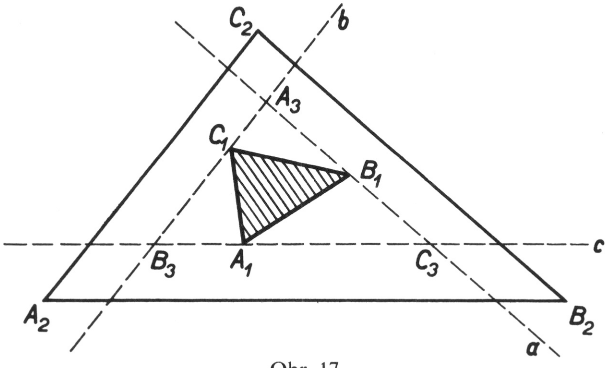
kterou nyní dokážeme.

1. *způsob:* Budiž $\mathbf{T}_1 = \triangle A_1B_1C_1$, $\mathbf{T}_2 = \triangle A_2B_2C_2$, $\mathbf{T}_1 \subset \subset \mathbf{T}_2$ (obr. 17).

Veďme rovnoběžku c se stranou A_2B_2 tím z vrcholů A_1, B_1, C_1, který má nejmenší vzdálenost od přímky A_2B_2 (na obr. 17 je to vrchol A_1); pak přímka c odděluje přímku A_2B_2 a trojúhelník $\mathbf{T}_1$. Obdobně sestrojme přímky a, b. Pak označme A_3, B_3, C_3 (v libovolném pořádku) vrcholy trojúhelníku $\mathbf{T}_3$, určeného přímkami a, b, c. Nyní stačí dokázat, že pro obvody o_1, o_2, o_3 trojúhelníků $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$ platí

$$o_1 \leqq o_3\,, \tag{1}$$

$$o_3 \leqq o_2\,. \tag{2}$$



Obr. 17

Ad (1). Všechny vrcholy A_1, B_1, C_1 leží na obvodě trojúhelníku $\mathbf{T}_3$. Je tedy např. $A_1B_1 \leqq A_1C_3 + B_1C_3$; tato nerovnost platí, ať leží body A_1, B_1 na různých stranách $\mathbf{T}_3$ nebo na téže straně. Sečtením tří takových nerovností dostaneme nerovnost (1).

Ad (2). Nerovnost (2) dokážeme, uvědomíme-li si, že každá strana trojúhelníku $\mathbf{T}_3$ je menší nebo rovna té straně trojúhelníku $\mathbf{T}_2$, s níž je rovnoběžná (např. na obr. 17 je $A_3B_3 < A_2C_2$, neboť body A_3, B_3 leží v trojúhelníku $\mathbf{T}_2$).

2. *způsob:* Prodloužíme stranu A_1B_1 trojúhelníku $\mathbf{T}_1$; její průsečíky s obvodem $\mathbf{T}_2$ označíme P, Q (obr. 18).

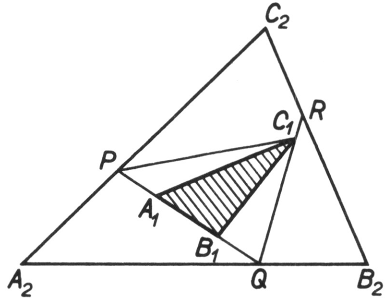
Pro obvod o_3 trojúhelníku PQC_1 platí podle trojúhelníkové nerovnosti

$$o_1 \leqq o_3 \,. \tag{3}$$

Je totiž $A_1C_1 \leqq A_1P + PC_1$, $B_1C_1 \leqq B_1Q + QC_1$.

Neleží-li bod C_1 na obvodě trojúhelníku $\mathbf{T}_2$, prodloužíme stranu QC_1 a její druhý průsečík s obvodem $\mathbf{T}_2$ označíme R. Pro obvod o_4 trojúhelníku PQR platí podle trojúhelníkové nerovnosti

$$o_3 \leqq o_4 \,. \tag{4}$$



Obr. 18

Spojením (3), (4) dostaneme nerovnost $o_1 \leqq o_4$. Trojúhelník PQR má všecky vrcholy na obvodě $\mathbf{T}_2$; je tedy

$$o_4 \leqq o_2 \,. \tag{5}$$

Spojením (3), (4), (5) dostaneme nerovnost $o_1 \leqq o_2$.

Najděte všechny hodnoty parametru t, pro které rovnice

$$|x| + |x - y| + y + t = 0 \tag{1}$$

je analytickým vyjádřením úhlu; přitom (x, y) jsou kartézské souřadnice bodu v rovině.

Řešení. Najdeme množinu dvojic (x, y) vyhovující rovnici (1) pro pevné $t = t_0$. Budeme tyto dvojice hledat ve čtyřech množinách:

$$\mathbf{M}_1 = \{(x, y) \mid x \geqq 0 \wedge x - y \geqq 0\},$$
$$\mathbf{M}_2 = \{(x, y) \mid x \geqq 0 \wedge x - y < 0\},$$
$$\mathbf{M}_3 = \{(x, y) \mid x < 0 \wedge x - y \geqq 0\},$$
$$\mathbf{M}_4 = \{(x, y) \mid x < 0 \wedge x - y < 0\}.$$

V $\mathbf{M}_1$ je (1) ekvivalentní s $x + (x - y) + y + t_0 = 0$ neboli

$$x = -\tfrac{1}{2}t_0 ; \tag{2}$$

v $\mathbf{M}_2$ je (1) ekvivalentní s $x - (x - y) + y + t_0 = 0$ neboli

$$y = -\tfrac{1}{2}t_0 ; \tag{3}$$

v $\mathbf{M}_3$ je (1) ekvivalentní s $-(x) + (x - y) + y + t_0 = 0$ neboli

$$t_0 = 0 ; \tag{4}$$

v $\mathbf{M}_4$ je (1) ekvivalentní s $-(x) - (x - y) + y + t_0 = 0$ neboli

$$x - y = \tfrac{1}{2}t_0 . \tag{5}$$

Rozlišujme nyní hodnoty parametru t_0.

1. Je-li $t_0 > 0$, nedostáváme v žádné z množin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$ řešení.

2. Je-li $t_0 = 0$, je v $\mathbf{M}_1$ řešení $x = 0$, $x - y \geqq 0$,
v $\mathbf{M}_2$ není žádné řešení,
v $\mathbf{M}_3$ je celé $\mathbf{M}_3$ řešením,
v $\mathbf{M}_4$ není žádné řešení.

Celkem jsou pro $t_0 = 0$ řešením všechny dvojice (x, y), pro něž je zároveň $x \leqq 0$ a $x - y \geqq 0$. Každá z těchto nerovností je v rovině souřadnic x, y analytickým vyjádřením (uzavřené) poloroviny. Průnikem těchto polorovin je konvexní úhel.

3. Je-li $t_0 < 0$, dostáváme v $\mathbf{M}_1$ polopřímku $x = -\frac{1}{2}t_0$, $y \leqq -\frac{1}{2}t_0$, v $\mathbf{M}_2$ úsečku $y = -\frac{1}{2}t_0$, $0 \leqq x < -\frac{1}{2}t_0$, v $\mathbf{M}_3$ prázdnou množinu a v $\mathbf{M}_4$ polopřímku $y = x - \frac{1}{2}t_0$, $x < 0$.

Je proto $t = 0$, jediná hodnota parametru t, jíž odpovídá v rovině souřadnic x, y úhel.

A – II – 3a

Sú dané reálne čísla x, y tak, že existujú

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(x + y)^2 = a\,, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(x - y)^2 = b\,.$$

Vyjadrite $\operatorname{tg}(xy)$ pomocou čísel a, b. Pre ktoré a, b nie je $\operatorname{tg}(xy)$ definované?

Řešení. Označme $u = \frac{1}{4}(x + y)^2$, $v = \frac{1}{4}(x - y)^2$. Protože $xy = u - v$, máme vyjádřit $\operatorname{tg}(xy)$, tj. $\operatorname{tg}(u - v)$, pomocí

$\operatorname{tg} u$ a $\operatorname{tg} v$. Užijeme vzorce:

$$\operatorname{tg}(u - v) = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v},$$

pokud $1 + \operatorname{tg} u \,.\, \operatorname{tg} v \neq 0$; je-li $1 + \operatorname{tg} u \,.\, \operatorname{tg} v = 0$, není $\operatorname{tg}(u - v)$ definován.

Dostáváme výsledek: Je-li $ab = -1$, není $\operatorname{tg}(xy)$ definován; je-li $ab \neq 1$, je

$$\operatorname{tg}(xy) = \frac{a - b}{1 + ab}.$$

A – II – 3b

Je dán ostroúhlý trojúhelník **T** s obsahem P. Sestrojte aspoň jeden pravoúhlý trojúhelník, který je obsažen v trojúhelníku **T** a má obsah větší nebo rovný $\frac{1}{3}P\sqrt{3}$.

Řešení. Pokusíme se sestrojit pravoúhlý trojúhelník obsažený v **T**, který má co největší obsah (aniž tuto vlastnost budeme dokazovat), a pak ukážeme, že jeho obsah je aspoň $\frac{1}{3}P\sqrt{3}$.

Budeme předpokládat, že **T** má vrcholy A, B, C a že jeho strany a, b, c splňují $a \geqq b \geqq c$ (tedy o úhlech α, β, γ platí $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$). Rozlišujme dva případy:

1. $\gamma < 45°$. Označme D patu výšky z bodu B. Zřejmě je D bodem trojúhelníku **T**; ukážeme, že trojúhelník BCD splňuje podmínky úlohy. Je pravoúhlý, a protože $CD =$

$= a\cos\gamma$, splňuje jeho obsah P' nerovnosti

$$\frac{P'}{P} = \frac{CD}{b} = \frac{a}{b}\cos\gamma \geqq \cos\gamma > \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. $\gamma \geqq 45°$. Označme V průsečík oblouku Thaletovy kružnice nad stranou BC a kolmicí k BC v jejím středu S. Protože

$$\sphericalangle VBC = 45° \leqq \gamma \leqq \beta = \sphericalangle ABC,$$

$$\sphericalangle VCB = 45° \leqq \gamma = \sphericalangle ACB,$$

je $V \in \mathbf{T}$. Ukážeme, že pravoúhlý trojúhelník BCV splňuje podmínky úlohy, tj. že jeho obsah P' není menší než $\frac{1}{3}P\sqrt{3}$. Protože $a \geqq b \geqq c$, leží vrchol A v oblasti $\mathbf{O}$ ohraničené úsečkou BC a dvěma oblouky kružnic se středy v B, popř. C a poloměry $BC = a$. Každý bod v $\mathbf{O}$ má od přímky BC vzdálenost nejvýše rovnou výšce rovnostranného trojúhelníku se stranou BC, tj. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Proto je $P \leqq \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Avšak $P' = \frac{1}{4}a^2$, takže $P' \geqq \dfrac{P}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}P\sqrt{3}$. Řešení je úplné.

KATEGORIE B

B – II – 1a

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla p, q platí: Jestliže

$$pq \leqq 1 \tag{1}$$

pak

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right) \geqq 4\,. \tag{2}$$

Řešení. Z předpokladu (1) vyplývá

$$p \leqq \frac{1}{q}\,.$$

Pak platí

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right) - 4 \geqq \left(1+\frac{1}{p}\right)(1+p) - 4 =$$

$$= \frac{(1+p)^2 - 4p}{p} = \frac{(1-p)^2}{p} \tag{3}$$

Číslo p je podle předpokladu kladné, dále pro každé číslo p platí $(1-p)^2 \geqq 0$, takže z nerovnosti a rovností (3) plyne dokazovaná nerovnost (2).

Jiné řešení. Poněvadž $pq \leqq 1$, je také $(pq)^2 \leqq pq$ a $\dfrac{1}{pq} \geqq 1$.

Dále je

$$(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = p^2 - 2pq + q^2 + 4pq =$$
$$= (p-q)^2 + 4pq \geqq 4pq \geqq 4(pq)^2\,,$$

a tedy

$$p + q \geqq 2pq$$

neboli

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqq 2\,.$$

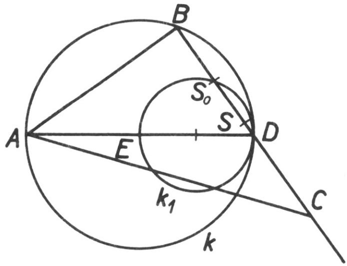
Máme tedy

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}\geqq 1+2+1=4\,.$$

B – II – 1b

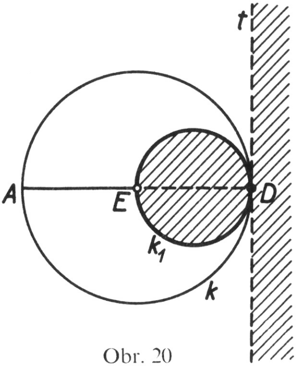
V rovině jsou dány různé body A, D. Najděte množinu středů odvěsen BC všech pravoúhlých trojúhelníků ABC, u nichž pouze tato odvěsna obsahuje bod D.

Řešení. Nechť ABC je jeden pravoúhlý trojúhelník vyhovující úloze. Jeden z úhlů $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ je pravý; jeho vrchol označme B (obr. 19). Bod D tedy leží na úsečce BC,



Obr. 19

takže vrchol B leží na Thaletově kružnici k nad úsečkou AD. Při pevném vrcholu B můžeme přitom bod C měnit tak, že probíhá polopřímku opačnou k polopřímce DB. Středy S proto probíhají (při pevném bodu B) polopřímku S_0D s počátkem ve středu S_0 úsečky BD. Měníme-li nyní bod B na kružnici k, ovšem tak, že $B \neq A$ a $B \neq D$, pak bod S_0 probíhá Thaletovou kružnici k_1 nad úsečkou DE, kde E je střed úsečky AD. Protože obráceně každý bod každé polopřímky



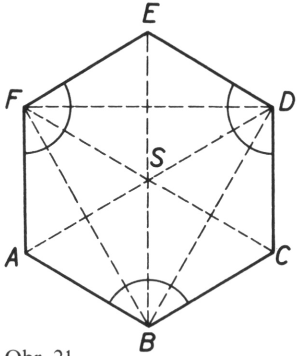
Obr. 20

S_0D, kde S_0 je bodem kružnice k_1, různým od D a E, je bodem hledané množiny **M**, je množina **M** zřejmě tvořena kruhem s hranicí k_1, s výjimkou průměru DE, avšak se započítaným bodem D, a otevřenou polorovinou s hranicí t, což je tečna ke kružnici k_1 v bodě D, neobsahující bod A (obr. 20).

B – II – 2a

Je daný konvexný šesťuholník $ABCDEF$. Ak jeho uhlopriečky vychádzajúce z vrcholu B delia uhol ABC na štyri rovnaké diely a analogickú vlastnosť majú uhlopriečky vychádzajúce z vrcholov D a F, potom daný šesťuholník je pravidelný. Dokážte.

Řešení. Na obr. 21 je znázorněn konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ s vlastnostmi uvedenými v textu úlohy. Protože BE je osa úhlu FBD, DA osa úhlu BDF a FC osa úhlu DFB,



Obr. 21

protínají se uvedené tři přímky v jednom bodě (středu kružnice vepsané trojúhelníku BDF), který označíme S. Protože $\sphericalangle SFB = \sphericalangle BFA$ a $\sphericalangle SBF = \sphericalangle FBA$ a BF odděluje body S a A, jsou tyto body A a S souměrně sdružené podle přímky BF. Tedy $SA \perp BF$, takže SD je výška trojúhelníku BDF. Z obdobné úvahy o dalších dvou přímkách vyplývá, že S je také průsečíkem výšek $\triangle BDF$ neboli, že trojúhelník BDF je rovnostranný. Protože A a S jsou souměrné podle BF a obdobně pro S, E a S, C, je daný šestiúhelník pravidelný.

B – II – 2b

Na vrchlíku kulové plochy o poloměru 1 s výškou 1 jsou umístěny čtyři různé body tak, že žádný z nich neleží na hraniční kružnici vrchlíku. Dokažte, že aspoň dva z nich mají vzdálenost menší než $\sqrt{2}$.

Řešení. Označme S „severní pól" vrchlíku. Každý bod vrchlíku, který neleží na hraniční kružnici, má od S vzdálenost menší než $\sqrt{2}$. Splývá-li tedy některý z daných bodů A_1, A_2, A_3, A_4 s bodem S, je výsledek správný.

Nyní předpokládejme, že žádný z daných bodů nesplývá se S. Pak čtyři „poledníky" vycházející z S a procházející body A_1, A_2, A_3, A_4 mají vlastnost, že alespoň dva z nich svírají u bodu S úhel nepřesahující 90°. Snadno se však vidí, že příslušné dva body mají vzdálenost menší než $\sqrt{2}$.

B – II – 3a

Určte všetky dvojice celých čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave nerovníc

$$x - |y^2 - 3y| + \tfrac{1}{3} > 0\,,$$
$$x + |y - \tfrac{3}{2}| < 2\,. \tag{1}$$

Riešenie. Z nerovníc (1) jednoduchou úpravou dostaneme

$$x + \tfrac{1}{3} > |y^2 - 3y|\,,$$
$$2 - x > |y - \tfrac{3}{2}|\,, \tag{2}$$

z čoho pre x vyplýva

$$-\tfrac{1}{3} < x < 2\,. \tag{3}$$

Nerovniciam (3) vyhovujú zrejme len celé čísla $x = 0$ a $x = 1$. Z druhej z nerovníc (2) pre $x = 0$ dostaneme

$$\left|y - \tfrac{3}{2}\right| < 2\,. \tag{4}$$

Nerovnici (4) vyhovujú zrejme len celé čísla $y = 0, 1, 2, 3$. Pre $x = 1$ dostávame z druhej nerovnice (2) nerovnicu

$$\left|y - \tfrac{3}{2}\right| < 1\,,$$

ktorej vyhovujú len celé čísla $y = 1, 2$.

Možné riešenia sústavy (1) zapíšeme v tabuľke:

x	0	0	0	0	1	1
y	0	1	2	3	1	2

Skúškou dosadením sa ľahko presvedčíme, že vyhovujú len dvojice $x = 0$, $y = 0$ a $x = 0$, $y = 3$. Ostatné štyri dvojice sústave (1) nevyhovujú, pretože nesplňajú prvú z daných nerovníc.

B – II – 3b

1. Dokážte, že pre každé reálne kladné číslo a platí

$$a + \frac{1}{a} \geqq 2\,. \tag{1}$$

Kedy nastane rovnosť?

2. Nájdite všetky kladné riešenia sústavy rovníc

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = 2\,, \tag{2}$$

$$x_2 + \frac{1}{x_3} = 2\,,$$

$$x_3 + \frac{1}{x_1} = 2\,.$$

Riešenie. 1. Nech $a > 0$ je ľubovólne reálne číslo. Potom

$$(a-1)^2 \geqq 0\,,$$

z čoho vyplýva postupne $a^2 - 2a + 1 \geqq 0$, $a^2 + 1 \geqq 2a$, $a + \frac{1}{a} \geqq 2$, čím je nerovnosť (1) dokázána. Rovnosť nastane len pre $a = 1$.

2. Ak predpokladáme, že (x_1, x_2, x_3) je kladné riešenie sústavy (2), sčítaním všetkých troch rovníc dostaneme

$$x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1} = 6$$

čiže

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) = 6\,, \tag{3}$$

Podľa 1. však platí

$$x_i + \frac{1}{x_i} = 2 \qquad \text{pre} \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{4}$$

Sčítaním všetkých 3 nerovností (4) dostaneme

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) \geqq 6,$$

pričom rovnosť (3) nastane vtedy a len vtedy, keď platí rovnosť v (4) pre všetky $i = 1, 2, 3$. Tá však podľa 1. nastane len pre $x_i = 1$ pre $i = 1, 2, 3$.

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že trojica $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ sústave (2) vyhovuje.

KATEGORIE C

C – II – 1a

Most Klementa Gottwalda v Praze je dlouhý 486 m. Chodec, který přes něj šel průměrnou rychlostí 1,5 m/s, počítal auta protijedoucího proudu. První z nich ho začalo míjet v okamžiku, kdy vstoupil na most, 55. auto v okamžiku jeho příchodu do poloviny mostu. Vypočtěte, jakou průměrnou rychlostí se pohyboval proud, jestliže vzdálenost předních čel každých dvou bezprostředně po sobě jedoucích aut byla 45 m.

Řešení. Vzdálenost čel 1. a 55. auta je

$$54 \,.\, 45 = 2\,430 \quad \text{(metrů)}.$$

Lze si představit, že v okamžiku, kdy chodec vstupuje na most, je čelo 55. auta vzdáleno od středu mostu

$$2\,430 - \tfrac{1}{2} \,.\, 486 = 2\,187 \quad \text{(metrů)}.$$

Tuto vzdálenost ujede za dobu, kterou potřebuje chodec k přejití poloviny mostu, tj. za

$$\frac{243}{1{,}5} = 243 \cdot \frac{2}{3} = 162 \quad \text{(sekund)}.$$

Průměrná rychlost proudu aut tedy byla v m/s

$$\frac{2\,187}{162} = \frac{27}{2} = 13{,}5\,,$$

tj. 48,6 km/h.

Zkouška. Jestliže se proud aut pohyboval rychlostí 48,6 km/h = 13,5 m/s, pak za dobu než chodec došel do poloviny mostu, tj. za

$$\frac{243}{1{,}5} = 162 \quad \text{(sekund)},$$

odjela z mostu část proudu dlouhá

$$13{,}5 \cdot 162 = 2\,187 \quad \text{(metrů)}.$$

To však znamená, že přes střed mostu přejelo celkem 2 430 : 45 = 54 aut a že 55. auto je právě před polovinou mostu, což odpovídá textu úlohy. Tím je zkouška provedena.

C – II – 1b

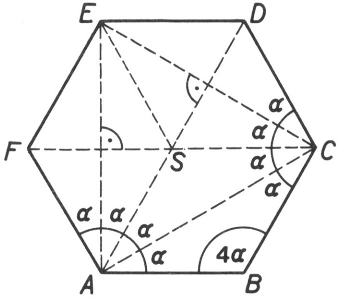
Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má shodné vnitřní úhly při vrcholech A, B a C, jeho úhlopříčky vycházející z vrcholu A dělí úhel BAF na čtyři shodné díly a jeho úhlopříčky vycházející z vrcholu C dělí obdobně úhel BCD. Dokažte, že šestiúhelník $ABCDEF$ je pravidelný.

Řešení. Označme 4α velikost úhlu BAF (obr. 22). Pak z $\triangle ABC$ plyne:

$$\alpha + 4\alpha + \alpha = 180°,$$

tj.

$$\alpha = 30°.$$



Obr. 22

Platí tedy

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 120°. \qquad (1)$$

Trojúhelník ACE je rovnostranný, neboť

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle ACE = 2\alpha = 60°.$$

Úhlopříčka AD je tedy kolmá na úhlopříčku EC. Označme S průsečík AD a FC. Z osové souměrnosti podle EC pak plyne, že

$$\sphericalangle CDE = \sphericalangle CSE = 120°. \qquad (2)$$

Obdobně dokážeme, že

$$\sphericalangle AFE = \sphericalangle ASE = 120°. \qquad (3)$$

Z rovností (1), (2) a (3) plyne, že šestiúhelník $ABCDEF$ je pravidelný.

C – II – 2a

Dokažte, že z 50 libovolně zvolených navzájem různých prvočísel lze vždy vybrat 13 čísel tak, že rozdíl každých dvou z nich je dělitelný pěti.

Řešení. Zvolme libovolně 50 navzájem různých prvočísel. Každé prvočíslo dává při dělení 5 zbytek 0 nebo 1 nebo 2 nebo 3 nebo 4. Zvolených 50 prvočísel lze podle toho roztřídit do pěti navzájem disjunktních tříd, označme je C_0, C_1, C_2, C_3, C_4. Prvočísla jsou navzájem různá, a proto je třída C_0 jednoprvková nebo prázdná, jejím prvkem může být jedině číslo 5. Tedy množina $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ má aspoň 49 prvků. Třídy jsou disjunktní, takže aspoň jedna ze tříd C_1, C_2, C_3, C_4 obsahuje 13 čísel. Jsou-li p, q dvě libovolná prvočísla patřící do této třídy, pak existují taková celá čísla x, y, z, že platí

$$p - q = (5x + z) - (5y + z) = 5(x - y),$$

což je číslo dělitelné pěti.

C – II – 2b

Určte všetky dvojice celých čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave nerovníc

$$y - |x^2 - 2x| + \tfrac{1}{2} > 0, \qquad (1)$$

$$y + |x - 1| < 2.$$

Riešenie. Jednoduchou úpravou z nerovníc (1) dostaneme

$$y + \tfrac{1}{2} > |x^2 - 2x|, \tag{2}$$
$$2 - y > |x - 1|,$$

z čoho vyplýva, že pre y musí platiť

$$y + \tfrac{1}{2} > 0 \wedge 2 - y > 0,$$

t. j.

$$-\tfrac{1}{2} < y < 2. \tag{3}$$

Nerovnosti (3) vyhovujú z celých čísel len $y = 0$ a $y = 1$. Z druhej nerovnosti (2) vyplýva, že sústave (1) môžu vyhovovať len nasledujúce dvojice celých čísel:

y	0	0	0	1
x	0	1	2	1

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že dvojica $x = 1$, $y = 0$ sústave (1) nevyhovuje, ostatně tri dvojice, t. j. $x = 0$, $y = 0$; $x = 2$, $y = 0$; $x = 1$ sú riešením.

C – II – 3a

Uvnitř kružnice o poloměru 1 jsou dány čtyři různé body. Dokažte, že jsou mezi nimi dva, jejichž vzdálenost je menší než $\sqrt{2}$.

Řešení. Je-li některý z daných bodů A, B, C, D totožný se středem kružnice S, tvrzení je pravdivé. Není-li tomu tak, utvoříme polopřímky SA, SB, SC a SD. Platí nyní: Alespoň dvě z těchto polopřímek svírají úhel nejvýše 90°. (Nepřímo: Kdyby ne, pak SB, SC, SD leží v téže polorovině a hranicí procházející středem S kolmo k SA; vedeme-li obdobnou polorovinu pro SB, zbude pro dvě polopřímky SC a SD úhel menší než 90°.) Jsou-li to např. polopřímka SA a SB, pak body A a B mají vzdálenost menší než $\sqrt{2}$ (jsou to body v pravoúhlém trojúhelníku o odvěsnách 1, různé od obou vrcholů u přepony). Tím je úloha rozřešena.

C – II – 3b

Do rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB je vepsán rovnoramenný lichoběžník $MNPQ$ tak, že jeho základna MN je částí strany AB, vrchol P náleží ramenu BC, vrchol Q ramenu AC a platí $MN = 3PQ$.

Vyšetřte množinu středů středních příček všech takových lichoběžníků.

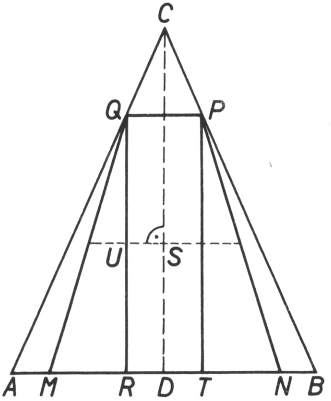
Řešení. Označme D střed základny AB. Místo lichoběžníků můžeme do $\triangle ABC$ vepisovat pravoúhelníky $RTPQ$, jejichž strana RT je částí strany AB, které jsou souměrné podle přímky CD a pro které platí

$$RT = PQ = \tfrac{1}{3}MN \leqq \tfrac{1}{3}AB\,.$$

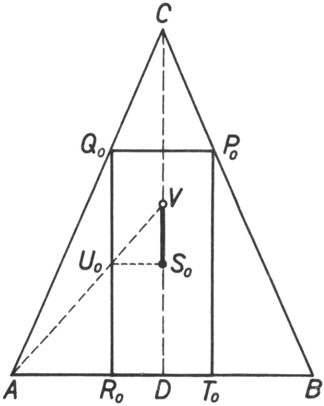
Na obr. 23 je nakreslen takový pravoúhelník $RTPQ$; střed S střední příčky lichoběžníku $MNPQ$ je zároveň středem pravoúhelníku $RTPQ$ a leží na úsečce CD. Bod S můžeme sestrojit také jako patu kolmice spuštěné na přímku CD ze středu U strany QR.

Sestrojíme obě mezní polohy bodu R: je to předně bod R_0, pro který platí $DR_0 = \frac{1}{3}DA$ a $R = D$. K nim sestrojíme příslušné body S: je to jednak bod S_0 (obr. 24), jednak bod $S = V$ (V je střed úsečky CD). Všechny body U leží totiž na úsečce AV.

Hledaná množina bodů je úsečka S_0V; počítá se k ní bod S_0, ale nikoli bod V.



Obr. 23



Obr. 24

KATEGORIE Z

Z – II – 1

Rozložte v součin dvojčlenů prvního stupně:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) - x + 1\,.$$

Výsledek ověřte pro $x = -1$.

Řešení. Jednoduchými úpravami a postupným vytýkáním dostáváme:

$$(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)-x+1=$$
$$=(x-1)[(x-2)(x-3)+(x-2)-1]=$$
$$=(x-1)(x-3)(x-2+1)=(x-1)(x-3)(x-1)=$$
$$=(x-1)^2(x-3).$$

Z – II – 2

Je dán vypuklý čtyřúhelník $ABCD$. Označme M a N po řadě středy stran AD a BC.

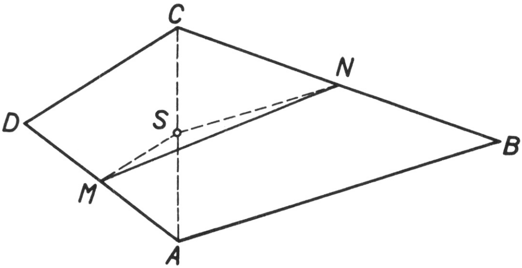
Dokažte následující tvrzení: Jestliže

$$MN=\tfrac{1}{2}(AB+CD), \tag{1}$$

pak střed S úhlopříčky AC leží uvnitř úsečky MN a $AB \parallel CD$.

Řešení. Úsečky MS a SN jsou po řadě středními příčkami (obr. 25) trojúhelníků ACD a ABC. Tedy

$$MS \parallel CD, \qquad SN \parallel AB \tag{2}$$



Obr. 25

a

$$MS = \tfrac{1}{2}CD\,, \qquad SN = \tfrac{1}{2}AB\,,$$

takže

$$MS + SN = \tfrac{1}{2}(AB + CD)\,.$$

Jestliže tedy platí (1), pak je bod C vnitřním bodem úsečky MN. Pak podle (2) platí

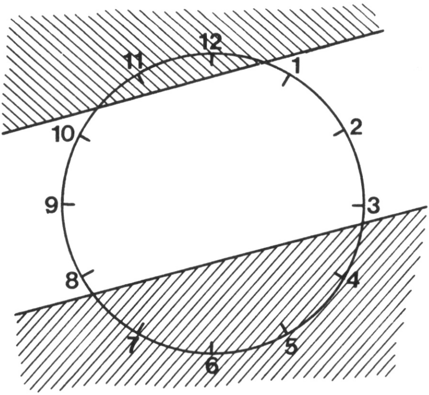
$$MN \parallel AB \quad \text{a} \quad MN \parallel CD\,,$$

tj.

$$AB \parallel CD\,.$$

Z – II – 3

Na obrázku je znázorněn hodinový ciferník a dvě rovnoběžné přímky (viz obr. 26), z nichž žádná neprochází žádným z bodů 1 až 12. Změňte polohu přímek tak, aby součet



Obr. 26

čísel ležících v každé z vyšrafovaných polorovin byl roven součtu čísel ležících v pásu rovnoběžek.

Řešení. Zjistíme nejprve součet všech čísel na ciferníku:

$$1 + 2 + \ldots + 12 = \tfrac{1}{2} . 12 . 13 = 2 . 3 . 13 .$$

Součet v každé z částí ciferníku musí být tedy 26. Určeme nejprve tu část, do níž patří číslo 12. Experimentováním zjistíme, že $26 = 12 + 1 + 11 + 2$. Jedna z hledaných polorovin obsahuje tedy body ciferníku označené 1, 2, 11, 12. Analogicky zjistíme, že $26 = 10 + 3 + 9 + 4$, takže pás obsahuje body ciferníku označené 3, 4, 9 a 10 a zbývající polorovina body ciferníku označené 5, 6, 7, 8.

Dalším experimentováním se přesvědčíme, že 12 nemůže ležet uvnitř rovnoběžkového pásu, neboť součty $11 + 12 + 3$, $12 + 1 + 6 + 7$, $12 + 1 + 2 + 5 + 6$ a $12 + 1 + 2 + 3 + 8$ nevedou k řešení.

Z – II – 4

Je dán čtverec $ABCD$ o straně 10 a přirozené číslo $n \geqq 2$. Sestrojte po řadě uvnitř úseček AB, BC, CD, DA body A_n, B_n, C_n, D_n tak, aby platilo

$$AA_n = BB_n = CC_n = DD_n = \frac{10}{n} . \qquad (1)$$

a) Dokažte, že body A_n, B_n, C_n, D_n jsou vrcholy čtverce.

b) Vyjádřete obsah P_n čtverce $A_nB_nC_nD_n$ pomocí čísla n.

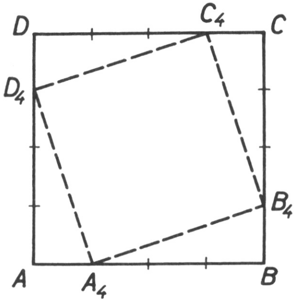
c) Dokažte, že ze všech čtverců $A_nB_nC_nD_n$ má nejmenší obsah čtverec $A_2B_2C_2D_2$, tj. že pro každé přirozené číslo $n \geqq 3$ je rozdíl $P_n - P_2$ kladné číslo.

Řešení. a) Z textu úlohy plyne, že

$$A_nB = B_nC = C_nD = D_nA = (n-1) \, . \, \frac{10}{n} \, . \qquad (2)$$

Z podmínek (1) a (2) a z toho, že čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec (obr. 27), dostáváme, že

$$\triangle A_nBB_n \cong \triangle B_nCC_n \cong \triangle C_nDD_n \cong \triangle D_nAA_n \, , \qquad (3)$$



Obr. 27

takže

$$A_nB_n = B_nC_n = C_nD_n = D_nA_n \, , \qquad (4)$$

tj. čtyřúhelník $A_nB_nC_nD_n$ je rovnostranný. Ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků (3) plyne, že

$$\sphericalangle D_nA_nA + \sphericalangle B_nA_nB = 90° \, ,$$

tj.

$$\sphericalangle D_nA_nB_n = 90° \, ,$$

takže čtyřúhelník $A_nB_nC_nD_n$ je podle (4) čtvercem.

b) Z $\triangle A_nBB_n$ dostáváme podle (1) a (2)

$$A_nB_n^2 = \left(\frac{10}{n}\right)^2 + \left(\frac{(n-1) . 10}{n}\right)^2 .$$

Tedy pro každé $n \geqq 2$ je

$$P_n = 100 . \frac{(n-1)^2 + 1}{n^2} . \tag{5}$$

c) Podle rovnosti (5) platí pro každé přirozené číslo $n \geqq 3$:

$$P_n - P_2 = 100 \left[\frac{(n-1)^2 + 1}{n^2} - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= 100 . \frac{2 . (n^2 - 2n + 1) + 2 - n^2}{2n^2} =$$

$$= 100 . \frac{n^2 - 4n + 4}{2n^2} = 100 . \frac{(n-2)^2}{2n^2} .$$

Pro každé $n \geqq 3$ je tedy skutečně $P_n - P_2 > 0$, c. b. d.