25. ročník matematické olympiády

V. Úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 25. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1975-1976. 18. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 115–125.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404675

V. Úlohy III. kola kategorie A

A – III – 1

Určete všecky trojice celých čísel x, y, z, pro které platí

$$x^2 + y^2 = 3z^2 . \tag{1}$$

Řešení. Existuje alespoň jedna trojice celých čísel vyhovující (1), totiž trojice

$$x = y = z = 0 . \tag{2}$$

Předpokládejme, že existují ještě jiné trojice (x, y, z) vyhovující (1); v nich je pak nutně $z \neq 0$. Vezměme takovou trojici vyhovující (1), v níž je z^2 minimální (tedy $z^2 > 0$).

Čísla x, y vyjádříme ve tvaru

$$x = 3a + p , \qquad y = 3b + q ,$$

kde a, b, p, q jsou celá čísla, $0 \leqq |p| \leqq 1$, $0 \leqq |q| \leqq 1$. Pro čísla x^2, y^2 pak bude možno psát

$$x^2 = 9a^2 + 6ap + p^2 = 3k + p^2 ,$$

$$y^2 = 9b^2 + 6bq + q^2 = 3l + q^2 ,$$

takže

$$3z^2 = x^2 + y^2 = 3(k + l) + p^2 + q^2 .$$

Z toho je vidět, že číslo $p^2 + q^2$ musí být dělitelné třemi. Přitom

$$0 \leqq p^2 \leqq 1\,,$$

$$0 \leqq q^2 \leqq 1\,,$$

takže

$$0 \leqq p^2 + q^2 \leqq 2\,.$$

Jediné celé číslo dělitelné třemi v těchto mezích je 0. Platí

$$p^2 + q^2 = 0\,,$$

takže

$$p = q = 0\,,$$

a tedy

$$x = 3a\,, \qquad y = 3b\,.$$

Potom však

$$x^2 + y^2 = 9(a^2 + b^2) = 3z^2\,,$$

tedy

$$3(a^2 + b^2) = z^2\,.$$

Odtud je vidět, že číslo z^2, a tedy i z, je dělitelné třemi: $z = 3c$, $z^2 = 9c^2$. Platí tedy

$$a^2 + b^2 = 3c^2\,,$$

takže trojice (a, b, c) vyhovuje (1) a přitom zřejmě

$$0 < c^2 < 9c^2 = z^2\,.$$

To je však spor s předpokladem, že z^2 je minimální.

Neexistují tedy trojice x, y, z vyhovující (1), v nichž by bylo $z \neq 0$.

Jediná trojice vyhovující (1) je trojice (2).

A – III – 2

Dokažte, že pro každé reálné číslo x z intervalu $0 \leqq x \leqq 1$ platí

$$\frac{(1-x)x^2}{(1+x)^3} < \frac{1}{25}. \tag{1}$$

Řešení. Důkaz provedeme nepřímo. Předpokládejme, že existuje takové číslo $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pro něž platí

$$\frac{(1-x)x^2}{(1+x)^3} \geqq \frac{1}{25}, \tag{2}$$

tj. po odstranění zlomků

$$25(1-x)x^2 \geqq (1+x)^3$$

a po další úpravě

$$26x^3 - 22x^2 + 3x + 1 \leqq 0. \tag{3}$$

Pro každé číslo x platí

$$(2x-1)^2(7x+1) = 28x^3 - 24x^2 + 3x + 1,$$

a proto nerovnost (3) lze psát ve tvaru

$$(2x-1)^2(7x+1) - 2x^3 + 2x^2 \leqq 0,$$

tj.

$$(2x-1)^2(7x+1) + 2x^2(1-x) \leqq 0. \tag{4}$$

Pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je

$$(2x-1)^2(7x+1) \geqq 0,$$

přičemž rovnost nastává jen pro $x = \frac{1}{2}$; pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$

je též

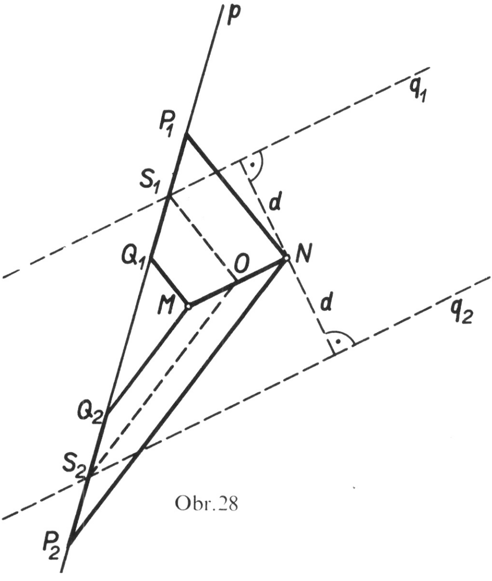
$$2x^2(1 - x) \geqq 0$$

a rovnost platí pouze pro $x = 0$ nebo $x = 1$. Tedy pro žádné $x \in \langle 0, 1 \rangle$ neplatí nerovnost (4), a tedy ani nerovnost (2). Tím je nerovnost (1) dokázána pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Poznámka. Úlohu můžeme řešit též tak, že nalezneme maximum funkce $f(x) = \dfrac{(1 - x)\,x^2}{(1 + x)^3}$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

A – III – 3

V dané polorovině s hranicí p jsou dány dva body M, N v různých vzdálenostech od přímky p. Sestrojte lichoběž-



Obr. 28

ník $MNPQ$, jehož vrcholy P, Q leží na přímce p a jehož obsah je roven obsahu čtverce o straně MN.

Řešení. Nechť $MNPQ$ je lichoběžník vyhovující úloze. Pak je $MQ \parallel PN$. Označíme-li S střed ramena PQ, pak obsah trojúhelníku MNS je roven polovině obsahu lichoběžníku $MNPQ$. Má proto bod S od přímky MN vzdálenost $d = MN$, a přitom ovšem $S \in p$.

Odtud vyplývá konstrukce (obr. 28). K přímce MN vedeme ve vzdálenosti $d = MN$ dvě rovnoběžky q_1 a q_2, které protnou přímku p po řadě v bodech S_1 a S_2. Označíme-li ještě O střed úsečky MN, pak lichoběžníky MNP_1Q_1, pro který $NP_1 \parallel OS_1 \parallel MQ_1$, a MNP_2Q_2, pro který $NP_2 \parallel \parallel OS_2 \parallel MQ_2$, vyhovují úloze a jsou to všechna řešení.

A – III – 4

Najděte řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rl}
x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - & - x_n = 2a\,, \\
-x_1 + 3x_2 - x_3 - \ldots - & - x_n = 4a\,, \\
-x_1 - x_2 + 7x_3 - \ldots - & - x_n = 8a\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
-x_1 - x_2 - x_3 - \ldots + & (2^n - 1)\,x_n = 2^n a\,.
\end{array}$$

s neznámými $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ a daným reálným parametrem a.

Řešení. Označíme-li $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$, můžeme přepsat danou soustavu takto:

$$\begin{aligned} -s + 2x_1 &= 2a\,, \\ -s + 4x_2 &= 4a\,, \\ -s + 8x_3 &= 8a\,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ -s + 2^n x_n &= 2^n a\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$x_i = a + \frac{s}{2^i} \tag{1}$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Sečtením všech rovnic (1) dostáváme

$$s = na + s\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right). \tag{2}$$

Užijeme-li vzorec pro součet n prvních členů geometrické posloupnosti, plyne z rovnice (2)

$$s = na + s\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

takže

$$s = na \,.\, 2^n\,. \tag{3}$$

Z rovnic (1) pak podle (3) obdržíme řešení dané soustavy rovnic:

$$x_i = a(1 + n \,.\, 2^{n-1})\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{4}$$

Zkouška. Dosadíme podle (4) do levé strany k-té rovnice

$(k = 1, 2, \ldots, n)$ dané soustavy. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned}
&-x_1 - x_2 - \ldots - x_{k-1} + \\
&+ (2^k - 1)\, x_k - x_{k+1} - x_{k+2} - \ldots - x_n = \\
&= -\sum_{i=1}^{n} x_i + 2^k x_k = \\
&= -\sum_{i=1}^{n} a(1 + n \,.\, 2^{n-i}) + 2^k a(1 + n \,.\, 2^{n-k}) = \\
&= -na - na \,.\, 2^n \,.\, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + 2^k a + na \,.\, 2^n = \\
&= -na - na \,.\, 2^n \,.\, \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 2^k a + na \,.\, 2^n = 2^k a \,.
\end{aligned}$$

Pravá strana k-té rovnice dané soustavy je také $2^k a$. Vzorce (4) tedy skutečně dávají řešení dané soustavy rovnic.

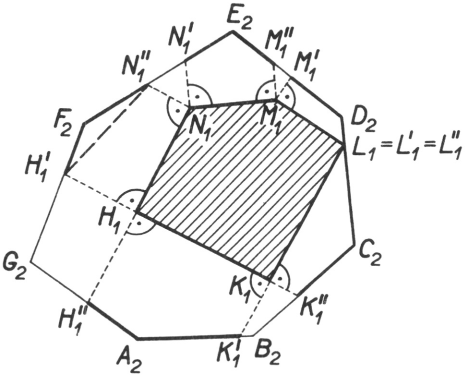
Závěr: Daná soustava rovnic má pro každou hodnotu parametru a jediné řešení. Je dáno vzorci (4).

A – III – 5

Je-li vypuklý mnohoúhelník s obvodem o_1 obsažen ve vypuklém mnohoúhelníku s obvodem o_2, pak platí $o_1 \leqq o_2$. Dokažte.

Řešení provedeme pro případ znázorněný na obr. 29. Použitá metoda řešení však bude zcela obecná.

Na obr. 29 mnohoúhelník $H_1K_1L_1M_1N_1$ s obvodem o_1 leží v mnohoúhelníku $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2$ s obvodem o_2. Ve všech vrcholech vnitřního mnohoúhelníku vztyčíme kolmice ke každé jeho straně s a určíme jejich průsečíky s hranicí vnějšího mnohoúhelníku, a to na každé kolmici ten z průsečíků, který leží v polorovině s hranicí s opačné k polorovině, v níž leží vnitřní mnohoúhelník. Tak dostaneme body H'_1, H''_1, K'_1, K''_1, L'_1 $(= L''_1 = L_1)$, M'_1, M''_1, N'_1, N''_1.



Obr. 29

Každá tlustě vytažená lomená čára na obr. 29 má délku aspoň takovou jako její pravoúhlý průmět do hranice $H_1K_1L_1M_1N_1$. Je totiž např.

$$N''_1F_2H'_1 \geqq N''_1H'_1 \geqq N_1H_1 \tag{1}$$

a obdobně

$$H''_1A_2K'_1 \geqq H_1K_1\,, \qquad K''_1C_2L'_1 \geqq K_1L_1\,,$$
$$L''_1D_2M'_1 \geqq L_1M_1\,, \qquad M''_1E_2N'_1 \geqq M_1N_1\,. \tag{2}$$

Spojením (1), (2) dostaneme pro délku o'_2 tlustě vytažené části hranice vnějšího mnohoúhelníku:

$$o'_2 \geqq o_1 \,. \tag{3}$$

Protože každý vnitřní úhel konvexního mnohoúhelníku $H_1K_1L_1M_1N_1$ je dutý, je na hranici vnějšího mnohoúhelníku $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2$ pořadí průmětů vrcholů H_1, K_1, L_1, M_1, N_1 následující:

$$H'_1, H''_1, K'_1, K''_1, L'_1, M'_1, M''_1, N'_1, N''_1 \text{ *)},$$

a platí tedy

$$o'_2 \leqq o_2 \,. \tag{4}$$

Rovnost nastane v tom případě, když všecky vrcholy vnitřního mnohoúhelníku leží na hranici vnějšího.

Spojením (3), (4) dostaneme

$$o_1 \leqq o_2 \,,$$

což jsme měli dokázat.

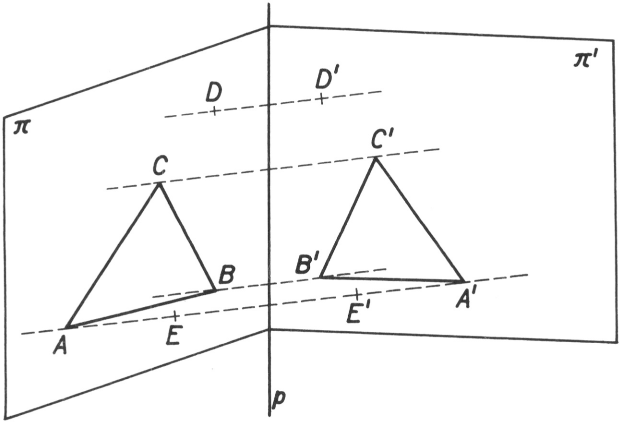
A – III – 6

V prostoru jsou dány poloroviny π a π' se společnou hraniční přímkou p tak, že neleží v jedné rovině. V polorovině π jsou umístěny body A, B, C, D a v polorovině π' body A', B', C', D' tak, že žádný z nich neleží na přímce p, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, a přitom body A, B, C a D' jsou vrcholy čtyřstěnu.

Dokažte, že také A', B', C' a D jsou vrcholy čtyřstěnu a že oba tyto čtyřstěny mají stejný objem.

*) Dva sousední z těchto bodů mohou splynout; viz např. $L'_1 = L''_1$ na obr. 29.

Řešení. Body A, B a C neleží v přímce, tedy ani A', B' a C' neleží v přímce. Kdyby body A', B', C' a D ležely v rovině, byla by to rovina poloroviny π' a bod $D \in \pi$ by ležel na přímce p, což odporuje předpokladu. Tvoří tedy body A', B', C' a D opět vrcholy čtyřstěnu (obr. 30).



Obr. 30

Z předpokladu rovnoběžnosti $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ plyne existence bodů E, E' na přímce AA', pro něž platí:

$$E - A = D' - D ,$$

$$E' - A' = D - D' .$$

Je patrno, že body E a D' (resp. E' a D) jsou stejně vzdáleny od roviny, jež obsahuje polorovinu π (resp. π'), a proto se objemy čtyřstěnů $ABCD'$ a $ABCE$ (resp. $A'B'C'D$ a $A'B'C'E'$)

sobě rovnají. Stačí proto dokázat rovnost objemů čtyřstěnů $ABCE$ a $A'B'C'E'$.

Platí $AE = A'E' = DD'$ a dále bod B má od přímky AE touž vzdálenost jako bod B' od přímky $A'E'$, a proto mají trojúhelníky ABE a $A'B'E'$ týž obsah.

Roviny ABE a $A'B'E'$ splývají a $CC' \parallel ABE$, takže výška čtyřstěnu $ABCE$ obsahující bod C má stejnou velikost jako výška čtyřstěnu $A'B'C'E'$ obsahující bod C'. Proto jsou si rovny objemy čtyřstěnů $ABCE$ a $A'B'C'E'$, a tedy i objemy čtyřstěnů $ABCD'$ a $A'B'C'D$.

Autorem tohoto řešení je *Ilja Turek* ze třídy 2.g gymnázia v Hradci Králové. Získal za ně cenu Matematického ústavu ČSAV, která se uděluje za nejlepší řešení soutěžní úlohy III. kola kategorie A.