25. ročník matematické olympiády

VII. Zpráva o XVIII. mezinárodní matematické olympiádě

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 25. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1975-1976. 18. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 135–152.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404677

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

VII. Zpráva o XVIII. mezinárodní matematické olympiádě

XVIII. mezinárodní matematická olympiáda se konala ve dnech 7.–21. července 1976 v Rakousku. Zúčastnily se jí delegace z 19 zemí: Bulharska (BG), Československa (CS), Finska (SF), Francie (F), Holandska (NL), Jugoslávie (YU), Kuby (C), Maďarska (H), NDR (DDR), NSR (D), Polska (PL), Rakouska (A), Rumunska (R), Řecka (GR), SSSR (SU), Švédska (S), USA, Velké Británie (GB) a Vietnamu (VN). Z tradičních účastníků tedy tentokráte chybělo Mongolsko; nově se zúčastnila NSR – ovšem jen mimo soutěž. Některé další pozvané země (např. Švýcarsko, Itálie, Turecko) delegaci nevyslaly.

V celkových rysech sledovala organizace XVIII. MMO tradiční zavedené schéma, její provedení však bylo takřka perfektní. Rakouští pořadatelé nešetřili úsilím ani finančními prostředky k zajištění hladkého průběhu všech akcí, jež tvořily součást XVIII. MMO. Je vidět, že mezinárodním matematickým olympiádám je přikládán stále větší význam, který jasně přesahuje rámec odborné soutěže.

Soutěž MMO řídila jako obvykle mezinárodní jury složená z vedoucích jednotlivých delegací a jejich zástupců; v jejím čele stál předseda jury *prof. G. Baron* z vídeňské technické univerzity. Vedle něho působil ještě také prezident XVIII. MMO *prof. E. Hlawka*, jehož funkce byla spíše reprezentativní.

Přípravné práce s výběrem a formulací úloh pro soutěž probíhaly ve dnech 8. – 10. července ve městě Eisenstadt, kde měla jury k dispozici místnosti i velmi dobré technické vybavení tamějšího gymnázia. Přípravy pokračovaly poměrně rychle. Pro XVIII. MMO vybrala jury šest úloh – jak se později ukázalo – spíše obtížných. Z československého návrhu byla vybrána jedna snazší geometrická úloha, kterou jury zařadila jako první na začátek soutěže.

Výsledný výběr úloh nelze označit za ideální; to je ovšem v poslední době dost obvyklý důsledek nutných kompromisů, neboť úlohy musí být přijatelné pro všechny zúčastněné delegace.

Přípravné práce skončily 10. července překladem textů úloh do jazyků soutěžících žáků, pro žáky z ČSR do češtiny, pro žáky ze SSR do slovenštiny. Mezitím se už do Vídně sjížděla žákovská družstva se zástupci vedoucích delegací. Žáci ihned pokračovali v cestě autokary do východotyrolského města Lienz, kdežto jury přesídlila do korutanského turistického střediska Heiligenblut, vzdáleného asi 40 km od Lienzu.

Vlastní soutěž XVIII. MMO se konala ve dnech 12. a 13. července 1976 v Lienzu. Žáci řešili ve dvou soutěžních půldnech po třech úlohách; v dalších dnech pak již měli volno zpestřené výlety do okolních hor. Jury zatím v Heiligenblutu opravovala předložená řešení, klasifikovala a koordinovala. Díky dobré organizaci probíhaly opravy i koordinace rychle, takže již v pátek 16. července se jury mohla sejít k závěrečné schůzi, na níž stanovila rozdělení cen.

Oprava žákovských řešení ukázala, že některé úlohy, zvláště pátá, byly obtížné, resp. nezvyklé, takže celkové bodové hodnocení je v průměru slabší. Proto bylo přijato rozhodnutí udělovat ceny žákům, kteří získali alespoň 15 bodů ze 40 možných. Ceny byly tedy uděleny 82 žákům z celkového počtu 139 soutěžících.

Program olympiády pokračoval v neděli 18. července přesunem všech účastníků do Vídně. Cesta vedla přes Zell am See, Hallein a Solnohrad, kde byla delší přestávka spojená s prohlídkou města.

Ve Vídni již byli všichni účastníci ubytováni na jednom místě, v moderním studentském domově v Döblingu. Na programu dne 19. července byla prohlídka Vídně a výlet do Kloster Neuburg, v úterý 20. července odpoledne pak slavnostní zakončení XVIII. MMO ve vídeňském Hofburgu s rozdílením cen a večer závěrečná večeře ve sklípku vídeňské radnice.

Středa 21. července byla dnem loučení a odjezdů. Československá delegace odjížděla ve dvou skupinách: slovenská část do Bratislavy, česká část přes Břeclav do Prahy.

Při zakončení XVIII. MMO pozval vedoucí jugoslávské delegace všechny zúčastněné delegace na příští, XIX. MMO začátkem července 1977 v Bělehradě.

Úlohy XVIII. MMO

1. V konvexním rovinném čtyřúhelníku o obsahu 32 cm^2 je součet délek dvou protilehlých stran a jedné úhlopříčky roven 16 cm. Určete všechny možné délky druhé úhlopříčky.

Řešení. Vrcholy čtyřúhelníku označme A, B, C, D tak, že je

$$AB + BD + CD = 16\,.$$

Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ lze vyjádřit jako součet obsahů trojúhelníků ABD a BCD. Avšak obsah trojúhelníku ABD nemůže být větší než $\frac{1}{2}AB\,.\,BD$ a obdobně obsah trojúhelníku BCD není větší než $\frac{1}{2}BD\,.\,CD$. Celkem je tedy obsah čtyřúhelníku $ABCD$ nanejvýš roven

$$\tfrac{1}{2}AB\,.\,BD + \tfrac{1}{2}BD\,.\,CD = \tfrac{1}{2}BD(AB + CD) =$$
$$= \tfrac{1}{2}BD(16 - BD)\,.$$

Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je však 32, musí tedy platit

$$32 \leqq \tfrac{1}{2}BD(16 - BD)$$

neboli

$$BD^2 - 16\,.\,BD + 64 \leqq 0\,.$$

Tuto nerovnost můžeme napsat jako

$$(BD - 8)^2 \leqq 0\,.$$

To je ovšem možné jen tehdy, je-li $BD = 8$; potom ovšem také $AB + CD = 8$. Navíc musí zřejmě platit rovnost

$$32 = \tfrac{1}{2}AB\,.\,BD + \tfrac{1}{2}BD\,.\,CD\,,$$

tzn. že musí být $AB \perp BD$ a zároveň $CD \perp BD$.

Nyní na přímce CD sestrojme bod E tak, aby bod D ležel mezi C a E a aby $DE = AB$. Čtyřúhelník $ABDE$ je tedy obdélník. Délku úhlopříčky AC vypočteme podle Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku AEC. Je totiž

$$AE = BD = 8\,,$$

$$EC = ED + DC = AB + CD = 8\,,$$

takže $AC = 8\sqrt{2}$. Žádné jiné hodnoty nemůže délka úhlopříčky AC nabýt.

2. Nechť

$$P_1(x) = x^2 - 2$$

a pro $j = 2, 3, 4, \ldots$

$$P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x)).$$

Dokažte, že pro každé přirozené n jsou všechny kořeny rovnice

$$P_n(x) = x$$

reálné a vesměs různé.

Řešení. Z tvaru rovnice $P_n(x) = x$ plyne, že je vhodné provést do ní substituci

$$x = 2\cos y.$$

Budeme přitom předpokládat, že $y \in \langle 0, \pi \rangle$. Tím se ovšem omezujeme jen na hledání kořenů $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

Nejprve dokážeme indukcí, že pro mnohočleny $P_n(x)$ platí rovnosti

$$P_n(2\cos y) = 2\cos(2^n y) \tag{1}$$

pro $n = 1, 2, 3, \ldots; \ -\infty < y < \infty$.

Skutečně, pro $n = 1$ je $P_1(x) = x^2 - 2$, a tedy

$$P_1(2\cos y) = 4\cos^2 y - 2 = 2(2\cos^2 y - 1) = 2\cos(2y).$$

Předpokládejme nyní platnost vztahu (1) pro některé přirozené $n \geqq 1$, potom

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2\cos y) &= P_1(P_n(2\cos y)) = \\ &= P_n^2(2\cos y) - 2 = 4\cos^2(2^n y) - 2 = \\ &= 2(2\cos^2(2^n y) - 1) = 2\cos(2^{n+1} y). \end{aligned}$$

Rovnost (1) tedy platí pro všechna přirozená $n \geqq 1$.

Vezměme nyní rovnici

$$P_n(2\cos y) = 2\cos y\,;$$

podle (1) je to

$$2\cos(2^n y) = 2\cos y\,,$$

tj.

$$\cos(2^n y) = \cos y\,. \tag{2}$$

Řešením rovnice (2) je pak buď

$$y = \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1\,, \tag{3a}$$

anebo

$$y = \frac{2k\pi}{2^n + 1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}\,; \tag{3b}$$

pro $k = 0$ dostaneme ovšem v obou případech touž hodnotu, totiž $y = 0$. Celkem tedy máme $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ hodnot y vyhovujících rovnici (2). Snadno se přesvědčíme, že tyto hodnoty jsou vesměs různé, jakmile je $n > 1$. Pro přirozená čísla k, l totiž platí

$$\frac{2k\pi}{2^n - 1} = \frac{2l\pi}{2^n + 1},$$

právě když

$$k + l = 2^n(l - k)\,,$$

což pro $k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1$ a $l = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ neplatí, neboť $0 < k + l \leqq 2^n - 1$.

Rovnice $P_n(x) = x$ má tedy alespoň 2^n vesměs různých reálných kořenů daných vztahy

$$x_k = 2\cos\frac{2k\pi}{2^n - 1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1\,,$$

$$x_{2^{n-1}+k-1} = 2\cos\frac{2k\pi}{2^n + 1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\,.$$

Poněvadž však zřejmě je $P_n(x)$ polynom stupně 2^n, jsou tyto hodnoty právě všechny kořeny rovnice $P_n(x) = x$, a to pro libovolné $n \geqq 2$. Pro $n = 1$ je $P_1(x) = x^2 - 2$ a rovnice $P_1(x) = x$, tj.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

má právě dva reálné kořeny: 2 a -1.

Dokazované tvrzení tedy platí pro všechna přirozená $n \geqq 1$.

3. Krabice ve tvaru kvádru ~~je taková, že ji~~ lze zcela vyplnit krychlemi o objemu 1. Vložíme-li do ní co nejvíce krychlí o objemu 2 tak, aby hrany krychlí byly rovnoběžné s hranami krabice, vyplníme právě 40 % prostoru krabice. Určete vnitřní rozměry všech krabic s touto vlastností. (Použijte $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$.)

Řešení. Označme a, b, c délky (vnitřních) hran krabice; jsou to zřejmě přirozená čísla. Přitom můžeme předpokládát, že je $a \leqq b \leqq c$. Krychle o objemu 2 má hranu délky $\sqrt[3]{2}$, takže za podmínek úlohy je maximální počet těchto krychlí, které lze do krabice vložit, dán číslem

$$\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\cdot\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\cdot\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right],$$

přičemž symbol $[x]$ znamená celou část reálného čísla x, tj. celé číslo, pro které platí $[x] \leqq x < [x] + 1$.

Každá z těchto krychlí má objem 2 a všechny dohromady zaplní 40 %, tj. $\frac{2}{5}$ objemu krabice. Je tedy

$$\tfrac{2}{5}abc = 2 \,.\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right].\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right].\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]$$

neboli

$$abc = 5 \,.\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right].\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right].\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right].$$

Vyšetříme, jak se mění hodnoty

$$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right] \quad \text{a} \quad \frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}$$

s rostoucím n. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$ dostaneme tuto tabulku:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$	0	1	2	3	3	4	5	6	7	7
$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}$	–	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$

Přímo z tabulky můžeme již snadno najít dvě řešení úlohy tak, že hledáme ve třetím řádku tabulky tři čísla, jejichž součin je 5. Poněvadž $2 \,. \frac{3}{2} \,. \frac{5}{3} = 5$, vidíme, že řešením je jednak trojice $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, jednak trojice $a = 2$, $b = 5$, $c = 6$.

Nyní si ukážeme, že jiná řešení úloha již nemá. Snadným výpočtem zjistíme, že pro $n \geqq 8$ je vždy

$$\frac{n}{\left[\dfrac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]} < \frac{3}{2}.$$

Skutečně, je-li

$$n \geqq 8 > \frac{63}{8} = \frac{126}{100 - 84} = \frac{1{,}26}{1 - \frac{2}{3} \,.\, 1{,}26} > \frac{\sqrt[3]{2}}{1 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}},$$

pak ovšem

$$n\left(1 - \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right) > \sqrt[3]{2},$$

tj.

$$2n < 3\left(\frac{n}{\sqrt[3]{2}} - 1\right) < 3\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right],$$

takže

$$\frac{n}{\left[\dfrac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]} < \frac{3}{2}.$$

Odtud a z tabulky navíc plyne platnost nerovnosti

$$\frac{n}{\left[\dfrac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]} \geqq 2$$

pro všechna $n \geqq 2$.

Kdyby pro dvě z čísel a, b, c byly odpovídající hodnoty

$$\frac{a}{\left[\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]}, \quad \text{resp.} \quad \frac{b}{\left[\dfrac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]}, \quad \text{resp.} \quad \frac{c}{\left[\dfrac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]}$$

menší nebo rovné $\frac{3}{2}$, musela by třetí hodnota být větší než 2, což není možné. Dvě z čísel a, b, c tedy musí být rovna 2 anebo 5. Přitom není možné, aby $a = b = 2$, neboť pro žádné přirozené n není

$$\frac{n}{\left[\dfrac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]} = \frac{5}{4},$$

bylo by pak totiž $\sqrt[3]{2} \leqq \frac{5}{4} = 1{,}25$, což neplatí.

Z toho je vidět, že uvedené dvě trojice $a = 2, b = 3, c = 5$ a $a = 2, b = 5, c = 6$ jsou jediná řešení úlohy.

kterou

4. Určete největší hodnotu, ~~jíž~~ může nabýt součin několika přirozených čísel, jejichž součet je 1976.

Řešení. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou přirozená čísla, jejichž součet je 1976 a jejichž součin je maximální. Dokážeme si dvě pomocná tvrzení:

1. Mezi čísly x_j jsou nejvýše dvě dvojky.

Kdyby totiž tři z čísel x_j byly dvojky, nahradili bychom je dvěma trojkami; součet by se tím nezměnil, neboť $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, avšak součin by vzrostl, protože $3 \,.\, 3 = 9 > 8 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2$.

2. Žádné z čísel x_j není větší než 3.

Kdyby existovalo číslo $x_j \geqq 5$, nahradili bychom je dvěma čísly $x_j - 2$ a 2; součet by se nezměnil, protože $x_j - 2 + 2 = x_j$, avšak součin by vzrostl, poněvadž

$$2(x_j - 2) = x_j + (x_j - 4) > x_j\,.$$

Kdyby některé z čísel x_j bylo rovno 4, nahradili bychom je dvěma dvojkami. Tím se sice nezmění ani součet, ani součin, $2 + 2 = 4 = 2\,.\,2$, avšak vzroste počet dvojek, což může event. umožnit zvýšení součinu operací popsanou v bodě 1.

Z uvedených tvrzení plyne závěr: Maximálního součinu dosáhneme, volíme-li za čísla x_j pouze dvojky a trojky, přitom dvojky smějí být nejvýše dvě. Poněvadž však

$$1976 = 3\,.\,658 + 2\,,$$

vidíme, že řešení úlohy jsou čísla $x_1 = x_2 = \ldots = x_{658} = 3$, $x_{659} = 2$. Odpovídající (maximální) hodnota součinu je

$$3^{658}\,.\,2\,.$$

5. Je dána soustava p rovnic o $q = 2p$ neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q &= 0\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q &= 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

s koeficienty $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$. Dokažte, že existuje řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ soustavy (1) s těmito vlastnostmi:

a) všechna čísla $x_1, x_2, \ldots, x_q$ jsou celá,

b) $x_j \neq 0$ pro alespoň jedno $j = 1, 2, \ldots, q$,

c) $|x_j| \leqq q$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, q$.

Řešení. Označme $\mathbf{M}$ množinu všech q-tic celých čísel $x_1, x_2, \ldots, x_q$ takových, že $|x_j| \leqq p$ pro každé $j = 1, 2, \ldots, q$. Množina $\mathbf{M}$ má zřejmě $(2p + 1)^q$ prvků. Každé q-tici z $\mathbf{M}$ přiřadíme p-tici celých čísel $y_1, y_2, \ldots, y_p$ tak, že položíme

$$y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jq}x_q\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, q\,,$$

kde a_{jk} jsou koeficienty soustavy (1). Vzhledem k podmínce $a_{jk} \in \{0, 1, -1\}$ bude zřejmě vždy $|y_j| \leqq pq$. Množina $\mathbf{N}$ všech takových p-tic má $(2pq + 1)^p$ prvků. Avšak

$$(2p + 1)^q = (2p + 1)^{2p} = (4p^2 + 4p + 1)^p > (4p^2 + 1)^p = \\ = (2pq + 1)^p\,,$$

tedy množina $\mathbf{M}$ má více prvků nežli množina $\mathbf{N}$. Existují tedy nutně v $\mathbf{M}$ dvě různé q-tice

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_q) \quad \text{a} \quad (x''_1, x''_2, \ldots, x''_q)\,,$$

jimž je přiřazena táž p-tice čísel y_j. Položíme-li

$$x_j = x'_j - x''_j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, q\,,$$

budou mít čísla x_j vlastnosti a), b) i c) a zároveň budou též řešením soustavy (1).

6. Posloupnost $\{u_n\}$ je definována vztahy

$$u_0 = 2\,, \qquad u_1 = \tfrac{5}{2}\,,$$

$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \qquad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Dokažte, že pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$[u_n] = \sqrt[3]{2^{2^n} - (-1)^n}\,.^{*)} \tag{2}$$

Řešení. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ položme

$$f(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}\,. \tag{3}$$

Je $f(1) = 1$, $f(n)$ je vždy přirozené číslo, neboť rozdíl n-tých mocnin $2^n - (-1)^n$ je dělitelný rozdílem $2 - (-1) = 3$. Dále platí pro všechna přirozená n

$$f(n + 1) = f(n) + 2f(n - 1) \tag{4}$$

a

$$f(n) - 2f(n - 1) = (-1)^{n+1}\,, \tag{5}$$

jak se snadno ověří přímým výpočtem.

Nyní si dokážeme, že pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$u_n = 2^{f(n)} + 2^{-f(n)}\,. \tag{6}$$

Rovnost (6) dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ je skutečně

$$u_1 = \tfrac{5}{2} = 2 + \tfrac{1}{2} = 2^1 + 2^{-1} = 2^{f(1)} + 2^{-f(1)}\,.$$

Obdobně pro $n = 2$ je podle (1) $u_2 = \frac{5}{2}$ a podle (3) $f(2) = 1$, takže (6) platí.

Předpokládejme nyní, že jsme rovnost (6) dokázali pro všechna $n \leqq N$, kde $N \geqq 2$, a dokážeme si platnost (6) i pro $n = N + 1$. Podle (1) je

$$u_{N+1} = u_N(u_{N-1}^2 - 2) - u_1\,.$$

---

*) Symbol $[u_n]$ znamená celou část čísla u_n, viz str. 142.

Dosadíme do pravé strany podle (6) a dostaneme

$$\left(2^{f(N)} + 2^{-f(N)}\right)\left[\left(2^{f(N-1)} + 2^{-f(N-1)}\right)^2 - 2\right] - \tfrac{5}{2} =$$
$$= \left(2^{f(N)} + 2^{-f(N)}\right)\left(2^{2f(N-1)} + 2^{-2f(N-1)}\right) - \tfrac{5}{2} =$$
$$= 2^{f(N)+2f(N-1)} + 2^{-f(N)-2f(N-1)} + 2^{f(N)-2f(N-1)} +$$
$$+ 2^{-f(N)+2f(N-1)} - 2 - 2^{-1}.$$

Nyní použijeme vztahů (4) a (5) a dostaneme

$$2^{f(N+1)} + 2^{-f(N+1)} + 2 + 2^{-1} - 2 - 2^{-1} =$$
$$= 2^{f(N+1)} + 2^{-f(N+1)},$$

takže rovnost (6) platí i pro $n = N + 1$, a tedy pro všechna přirozená n.

Výše bylo dokázáno, že $f(n)$ je vždy přirozené číslo. Tedy $0 < 2^{-f(n)} < 1$. Z toho podle (6) pak plyne rovnost (2) pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Čs. účast na XVIII. MMO

Ve shodě s propozicemi XVIII. MMO zaslal ústřední výbor MO rakouským organizátorům návrh čtyř úloh pro soutěž; šlo vesměs o hodnotné originální úlohy. Jedna z nich pak byla skutečně vybrána — shodou okolností to nakonec byla jediná soutěžní úloha vybraná z návrhů socialistických zemí, poněvadž dvě pěkné bulharské úlohy byly zamítnuty, když se ukázalo, že příbuzné úlohy byly řešeny v sovětské matematické olympiádě.

Do soutěže na XVIII. MMO vyslala ČSSR osm žáků gymnázií z různých míst (viz připojený seznam). Žáci byli jako obvykle vybíráni podle výsledků v domácí MO i podle výkonů, které podávali v přípravných soustředěních, seminářích a podobných akcích. Přestože byla v tomto roce věnována přípravě žáků zvýšená pozornost, neprojevilo se to výrazným růstem výkonu na MMO. Zvláště od obou vítězů domácí MO se očekával přece jen trochu lepší výsledek. V připojené tabulce jsou uvedeny počty bodů, jež naši žáci získali za řešení jednotlivých úloh.

Z úloh XVIII. MMO činily našim žákům velké potíže úlohy č. 2, 3 a 5: každý žák měl aspoň za jednu z nich nulové ohodnocení, přitom úlohu č. 3 nikdo z nich nevyřešil ani z poloviny. To jsou jistě varovné signály, na něž bude třeba reagovat. I když v případě úlohy č. 5 lze na omluvu uvádět překvapivost řešení a poukázat na ještě slabší výsledky žáků z některých jiných zemí, není jasné, proč velmi názorná úloha č. 3 dopadla takřka katastrofálně. Zde totiž nešlo o konkrétní znalost vzorce či věty, ale především o schopnost obecné orientace v problému a o nalezení podstatných momentů řešení.

Vedle nedostatků v odborné přípravě se v průběhu XVIII. MMO opět projevily určité nedostatky taktické. Mnoha chyb se žáci dopustili zcela zbytečně, neboť nebyly zaviněny neznalostmi, ale nepozorností, nedostatečnou sebekontrolou, zbytečně rozvláčnými formulacemi nepodstatných detailů řešení. Bude zapotřebí posílit psychologickou přípravu žáků, aby lépe snášeli atmosféru velké a náročné soutěže.

Čs. delegace na XVIII. MMO

vedoucí: *dr. František Zítek, CSc.*
Matematický ústav ČSAV, Praha

zástupce: *doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.*
Vysoká škola dopravní, Žilina

družstvo:

Jan Bázler	3. r. gymnázia	Mladá Boleslav
Jiří Kolafa	3. r. gymnázia	Praha 2
Jan Kratochvíl	2. r. gymnázia	Pardubice
Jiří Navrátil	3. r. gymnázia	Olomouc-Hejčín
Pavol Quittner	3. r. gymnázia	Prievidza
Miroslav Šedivý	4. r. gymnázia	Jevíčko
Peter Takáč	3. r. gymnázia	Šafárikovo
Vladimír Technovský	4. r. gymnázia	Banská Bystrica

Vedoucí a sekretáři na XVIII. MMO

Země	**Vedoucí**	**Sekretář**
A	T. Mühlgassner	W. Ratzinger
BG	P. Kedorov	D. Serafimov-Angelov
C	N. del Prado	–
CS	F. Zítek	J. Moravčík
D	W. Frasch	H. Sewerin
DDR	H. Bausch	M. Noacková
F	G. Glaeser	D. Gerll
GB	R. C. Lyness	C. C. Goldsmith
GR	I. Merminghis	P. Sabatakos
H	E. Hódi	I. Reiman
NL	J. van de Craats	M. A. J. G. van der Vlugt

PL	A. Mąkowski	T. Iwaniec
R	I. Cuculescu	F. Haicaová
S	Å. Samuelsson	L.-Å. Lindahl
SF	M. Lehtinen	H. Valkama
SU	A. P. Savin	S. I. Mojsejevová
USA	S. L. Greitzer	M. S. Klamkin
VN	Le Hai Chau	Phan Duc Chinh
YU	Z. Kadelburg	L. Milin

Výsledky čs. družstva na XVIII. MMO

Jméno žáka	Počet bodů za úlohu č.						Součet bodů	Cena
	1	2	3	4	5	6		
J. Bázler	1	0	0	3	0	1	5	–
J. Kolafa	0	1	3	3	0	7	14	–
J. Kratochvíl	5	3	3	6	0	7	24	II.
J. Navrátil	5	0	2	5	0	7	19	III.
P. Quittner	1	0	1	6	0	0	8	–
M. Šedivý	5	0	2	1	7	7	22	III.
P. Takáč	0	6	1	6	0	4	17	III.
V. Technovský	5	1	1	0	0	0	7	–
Celkem	22	11	13	30	7	33	116	
Maximum	5	7	8	6	7	7	40	

Celkové výsledky XVIII. MMO

Země	Počet cen			Celkový počet bodů
	prvních	druhých	třetích	
A	1	2	5	167
BG	0	2	6	174
C	0	0	0	16*)
CS	0	1	3	116
D	–	–	–	**)
DDR	0	2	3	142
F	1	3	1	165
GB	2	4	1***)	214
GR	0	0	0	50
H	0	3	4	160
NL	0	0	1	78
PL	0	0	6	138
R	0	1	3	118
S	0	1	3	120
SF	0	0	1	52
SU	4	3	1	250
USA	1	4	1	188
VN	0	1	3	112
YU	0	1	3	116

*) V družstvu Kuby byli jen 3 žáci.

**) Dva žáci z NSR řešili úlohy jen mimo soutěž.

***) Jeden z britských žáků dostal navíc (jediný na XVIII. MMO) zvláštní cenu (za zobecnění úlohy č. 4).