# 26. ročník matematické olympiády

## II. Přípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); Lev Bukovský (editor): 26. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 35–60.

## *KATEGORIE A*

### A — P — 1

Určete všecky trojice nezáporných celých čísel $x$, $y$, $z$, pro které platí

$$x^2 + y^2 = z^2 . \tag{1}$$

**Riešenie.** Predpokladajme, že trojica nezáporných celých čísiel $x$, $y$, $z$ je riešením rovnice (1).
Nech $d$ je najväčší spoločný deliteľ čísiel $x$, $y$, $z$. Označíme $a = x : d$, $b = y : d$, $c = z : d$. Čísla $a$, $b$, $c$ sú nesúdeliteľné a sú riešením rovnice (1). Rozlíšime dva prípady.

(i) Číslo $a$ je párne. Keďže $a$, $b$, $c$ sú nesúdeliteľné, tak čísla $b$, $c$ nemôžu byť obidve párne. Keby bolo $b$ párne, tak musí byť aj $c$ párne a naopak, ak $c$ je párne, musí byť aj $b$ párne. Teda nevyhnutne čísla $b$, $c$ sú nepárne. Upravíme rovnicu

$$a^2 + b^2 = c^2$$

na tvar

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c+b}{2} \cdot \frac{c-b}{2} . \tag{2}$$

Čísla $\frac{a}{2}$, $\frac{c+b}{2}$, $\frac{c-b}{2}$ sú celé. Označíme

$$u = \frac{c+b}{2}, \quad v = \frac{c-b}{2}.$$

Teda $u$, $v$ sú celé čísla.

Nech $q$ je spoločný deliteľ čísiel $u$, $v$. Potom $q$ delí čísla $u + v = c$, $u - v = b$ a $q^2$ delí číslo $4uv = a^2$. Keďže $a$, $b$, $c$ boli nesúdeliteľné, tak musí byť $q = 1$ alebo $q = -1$. Teda aj čísla $u$, $v$ sú nesúdeliteľné.

Po dosadení do rovnice (2) máme

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = u \,.\, v\,,$$

pričom celé čísla $u$, $v$ sú nesúdeliteľné. Teda existujú nezáporné celé čísla $k$, $l$ také, že $u = k^2$, $v = l^2$. Keďže $b$ je nezáporné, tak $u \geqq v$ a tiež $k \geqq l$. Úhrnom teda máme

$$\begin{aligned} x &= d \,.\, a = 2\,d\,k\,l\,, \\ y &= d \,.\, (u - v) = d \,.\, (k^2 - l^2)\,, \\ z &= d \,.\, (u + v) = d \,.\, (k^2 + l^2)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

kde $d$, $k$, $l$ sú nezáporné celé čísla, $k \geqq l$. Výpočtom ľahko zistíme, že všetky tieto trojice sú riešením rovnice (1).

(ii) $a$ je nepárne. Ukážeme, že potom $b$ je párne. Keby bolo aj $b$ nepárne, tak $c$ je párne, a teda existujú celé čísla $e$, $f$, $g$ také, že

$$\begin{aligned} a &= 2e + 1\,, \\ b &= 2f + 1\,, \\ c &= 2g\,. \end{aligned}$$

Potom $a^2 + b^2 = 4e^2 + 4e + 4f^2 + 4f + 2$ nie je deliteľné číslom 4, zatiaľ čo $c^2 = 4g^2$ je deliteľné číslom 4.

Úvahou rovnakou ako v časti (i) zistíme, že

$$\begin{aligned} x &= d\,.\,(k^2 - l^2)\,, \\ y &= 2\,d\,k\,l\,, \\ z &= d\,.\,(k^2 + l^2)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

kde $d$, $k$, $l$ sú nezáporné celé čísla, $k \geqq l$.

Teda (3) a (4) sú všetky trojice nezáporných celých čísiel, ktoré vyhovujú rovnici (1).

## A – P – 2

Je-li $z$ komplexní číslo, označujeme $\mathrm{Re}\, z$ reálnou část čísla $z$ (tj. $\mathrm{Re}\, z = a$ pro $z = a + ib$).

Dokažte:

a) Je-li $z$ komplexní číslo takové, že $\mathrm{Re}\, z > 0$, je i $\mathrm{Re} \dfrac{1}{z} > 0$.

b) Jsou-li $z_1$ a $z_2$ komplexní čísla taková, že $\mathrm{Re}\, z_1 > 0$, $\mathrm{Re}\, z_2 > 0$, pak číslo $z_1 z_2$ není reálné záporné.

**Riešenie.** a) Nech $z = a + ib$, kde $a$, $b$ sú reálne čísla. Platí teda $a > 0$. Potom

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\,\frac{-b}{a^2 + b^2}\,.$$

Takže

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0\,.$$

b) Nech $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, kde $a_1$, $b_1$ $a_2$, $b_2$ sú reálne čísla. Podľa predpokladu úlohy je $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Predpokládajme, že tvrdenie b) neplatí, tj. $z_1 \,.\, z_2 = -c$, kde $c$ je kladné reálne číslo.

Keďže

$$z_1 \,.\, z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{i}\,(a_1b_2 + a_2b_1)\,,$$

tak máme

$$a_1a_2 - b_1b_2 = -c\,, \tag{1}$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = 0\,. \tag{2}$$

Čísla $a_1$, $a_2$ sú kladné. Podľa (2) potom platí: ak $b_1 \geqq 0$, tak $b_2 \leqq 0$ a naopak, ak $b_2 \geqq 0$, tak $b_1 \leqq 0$. V obidvoch prípadoch je $b_1b_2 \leqq 0$. Teda

$$a_1a_2 - b_1b_2 \geqq a_1a_2 > 0$$

a to je hľadaný spor s rovnosťou (1).

## A — P — 3

Z úseček, jejichž délky jsou $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, lze sestrojit trojúhelník právě tehdy, platí-li pro všecky dvojice $x$, $y$, pro něž je $x + y = 1$,

$$a^2x + b^2y > c^2xy\,. \tag{1}$$

**Riešenie.** Do nerovnosti (1) dosadíme $y = 1 - x$:

$$a^2x + b^2(1 - x) > c^2x(1 - x)\,.$$

Po úprave dostaneme

$$x^2c^2 + x(a^2 - b^2 - c^2) + b^2 > 0\,. \tag{2}$$

Nerovnosť (2) platí pre každé reálne číslo $x$ vtedy a len vtedy, keď kvadratická rovnica

$$x^2c^2 + x(a^2 - b^2 - c^2) + b^2 = 0$$

nemá reálny koreň. To je ekvivalentné tomu, že diskriminant je záporný, tj.

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4\,b^2c^2 < 0\,. \tag{3}$$

Výraz na ľavej strane nerovnosti upravíme

$$\begin{aligned}
&(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4\,b^2c^2 = \\
&= (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)\,.\,(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) = \\
&= [a^2 - (b + c)^2]\,.\,[a^2 - (b - c)^2] = \\
&= (a - b - c)\,.\,(a + b + c)\,.\,(a - b + c)\,.\,(a + b - c)\,.
\end{aligned}$$

Čísla $a$, $b$, $c$ sú kladné. Nerovnosť (3) je teda ekvivalentná nerovnosti

$$(b + c - a)\,.\,(a - b + c)\,.\,(a + b - c) > 0\,. \tag{4}$$

Dva súčinitele na ľavej strane nerovnosti (4) nemôžu byť záporné, lebo súčet každých dvoch je kladný:

$$\begin{aligned}
(b + c - a) + (a - b + c) &= 2c > 0\,,\\
(b + c - a) + (a + b - c) &= 2b > 0\,,\\
(a - b + c) + (a + b - c) &= 2a > 0\,.
\end{aligned}$$

Teda nerovnosť (4) platí vtedy a len vtedy, keď všetky súčinitele na ľavej strane sú kladné, tj. keď

$$b + c > a\,,$$

$$a + c > b\,,$$

$$a + b > c\,.$$

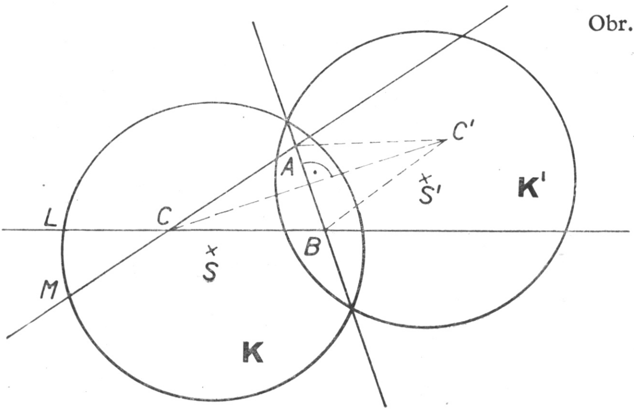
Nerovnosti (5) platia vtedy a len vtedy, keď možno zostrojiť trojuholník, ktorého strany majú postupne dĺžky $a$, $b$, $c$.

## A – P – 4

Je dán kruh **K**; dokažte, že nelze zvolit tři body $A$, $B$, $C$ uvnitř **K** tak, aby přímky $AB$, $AC$, $BC$ rozdělily **K** na sedm částí stejného obsahu.

**Riešenie.** Predpokladajme, že tvrdenie neplatí, tj. existujú tri body $A$, $B$, $C$ v kruhu **K** o strede $S$ a polomere $r$

Obr. 1



také, že priamky $AB$, $BC$, $AC$ delia kruh **K** na sedem častí s rovnakým obsahom (obr. 1).

Body $A$, $B$, $C$ neležia na jednej priamke. Aspoň dva z vnútorných uhlov trojuholníka $ABC$ sú ostré. Nech sú to uhly pri vrcholoch $A$ a $B$. Označíme $M$, $L$ priesečníky polpriamok $AC$, $BC$ s kružnicou o strede $S$ a polomere $r$.

Nech $C'$ je bod súmerne združený s bodom $C$ podľa osi súmernosti $AB$. Keďže uhly $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ sú ostré, bod $C'$ leží vnútri uhla $\sphericalangle ACB$.

Bod $C'$ nemôže ležať vnútri kruhu **K**, lebo obsah $\triangle ABC'$ je rovnaký ako obsah $\triangle ABC$ a ten je rovnaký ako obsah časti kruhu **K** ležiacej v polrovine $ABC'$ a v uhle $\sphericalangle ACB$.

Teda bod $C'$ leží mimo kruhu **K**. Nech **K**$'$ je kruh súmerne združený s kruhom **K** podľa osi súmernosti $AB$. Potom bod $C$ neleží v kruhu **K**$'$. Kruh **K** je rozdelený na tri časti: odsek určený priamkou $AB$, k nemu symetricky združený odsek kruhu **K**$'$ a na množinu **K**$-$**K**$'$. Obsah prvých dvoch častí je rovnaký a to $\frac{3}{7}$ obsahu kruhu **K**. Teda časť **K**$-$**K**$'$ má obsah rovný $\frac{1}{7}$ obsahu kruhu **K**.

To je však spor, lebo táto časť obsahuje časť trojuholníka $ABC$ a časť spoločnú kruhu **K** a uhlu $\sphericalangle MCL$. Posledná časť má obsah rovný $\frac{1}{7}$ obsahu kruhu.

## B – P – 1

Je daná množina funkcií

$$f(x) = x^2 + b|x| + c\,,$$

kde $b$, $c$ sú reálne parametre. Nájdite všetky funkcie z tejto množiny, ktoré majú v intervale $\left\langle -\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ najväčšiu hodnotu 2 a najmenšiu hodnotu 1.

**Riešenie.** Pre $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 0\right\rangle$ možno danú funkciu vyjadriť v tvare

$$f(x) = x^2 - bx + c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4},$$

z čoho pre $-x = y$, $y \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ dostaneme

$$f(y) = \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

Pre $x \in \langle 0,1\rangle$ máme

$$f(x) = x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}. \qquad (1)$$

Z toho vyplýva, že pre dané $b$, $c$ nadobúda daná funkcia v intervaloch $\left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$ a $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ rovnaké hodnoty. Stačí preto, ak sa obmedzíme na skúmanie hodnôt funkcií z danej množiny v intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

Z vlastností kvadratickej funkcie vyplýva, že môžu nastať len tieto tri prípady:

a) $f(x)$ nadobúda minimum v bode 0, maximum v bode 1,

b) $f(x)$ nadobúda minimum v bode 1, maximum v bode 0,

c) $f(x)$ nadobúda minimum v niektorom vnútornom bode intervalu $(0, 1)$, maximum v niektorom krajnom bode tohto intervalu.

Všimnime si, že $f(0) = c$, $f(1) = 1 + b + c$.

Z toho vyplýva, že v prípade a) musí byť $c = 1$, $b = 0$, a teda $f(x) = x^2 + 1$, čo vyhovuje podmienkam úlohy, ako sa ľahko presvedčíme. V prípade b) analogicky dostaneme $c = 2$, $b = -2$ a $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$, čo opäť je funkcia s požadovanými vlastnosťami.

V prípade c) z (1) máme, že $f(x)$ nadobúda minimum len pre $x = -\frac{b}{2}$, a ak má tento bod ležať vo vnútri intervalu $(0,1)$, musí byť $b \in (-2,0)$, pričom súčasne platí (vzhľadom na podmienky úlohy) $c - \frac{b^2}{4} = 1$ čiže

$$b^2 = 4c - 4 \qquad (2)$$

a zároveň buď $c = 2$, z čoho vzhľadom na (2) máme $b^2 = 4$, alebo $1 + b + c = 2$ čiže $c = 1 - b$, z čoho po dosadení do (2) pre $b$ dostaneme kvadratickú rovnicu

$b^2 + 4b = 0$ s koreňmi 0 a $-4$, z ktorých žiaden neleží v intervale $(-2,0)$.

Úloha má teda práve 2 riešenia: $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = x^2 - 2|x| + 2$.

## B – P – 2

Určte všetky reálne korene rovnice

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}. \qquad (1)$$

**Riešenie.** Z (1) po umocnení na tretiu a jednoduchej úprave dostaneme

$$3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}[\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}] = 2x^3 - 2x. \qquad (2)$$

Do (2) dosadíme z (1) za súčet tretích odmocnín $x\sqrt[3]{2}$ a po úprave dostaneme

$$3\sqrt[3]{x^2-1}\,\sqrt[3]{2x} = 2x(x^2-1). \qquad (3)$$

Rovnici (3) vyhovujú zrejme čísla

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1 \qquad (4)$$

a pre $x \neq -1, 0, 1$ z (3) dostaneme

$$x^2 - 1 = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

z čoho

$$x_4 = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}},\quad x_5 = -\sqrt{1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}. \qquad (5)$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že $x_1, x_2, x_3$ vyhovujú tiež rovnici (1). K tomu, aby sme vykonali skúšku pre $x_4, x_5$, si upravme rovnicu (1) na tvar

$$(x+1)+(x-1)+3\sqrt[3]{x^2-1}\,\sqrt[3]{2}\,x = 2x^3. \qquad (1')$$

Je zrejmé, že s číslom $x$ vyhovuje (1′) aj číslo $-x$. Stačí preto urobiť skúšku len pre $x_4$.

Označme

$$a=\sqrt[3]{x_4-1}\,,\quad b=\sqrt[3]{x_4+1}\,,\quad c=\sqrt[3]{2}\,x_4\,. \qquad (6)$$

Zrejme platí $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ a po dosadení do (1′) dostaneme

$$b^3 + a^3 + 3abc = c^3\,,$$

z čoho po jednoduchých úpravách máme

$$c^3 - 3abc - (a^3 + b^3) = 0$$

$$[c-(a+b)]\,[c^2+(a+b)c+(a^2-ab+b^2)] = 0\,.$$

Keďže faktor v druhej hranatej zátvorke je zrejme pre každú reálnu hodnotu $c$ kladný, musí platiť $c = a + b$, čo vzhľadom na (6) znamená, že $x_4$ (a teda aj $x_5$) vyhovuje rovnici (1).

**Záver:** Rovnica (1) má 5 rôznych reálnych koreňov určených vzťahmi (4), (5).

## B — P — 3

Na kulovém vrchlíku o poloměru 1 a výšce 1 jsou dány čtyři body, z nichž žádný neleží na hraniční kružnici.

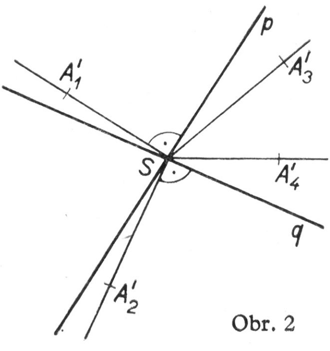
Potom alespoň dva z těchto bodů mají vzdálenost menší než $\sqrt{2}$. Dokažte.

**Řešení.** Označme $S$ střed kulové plochy a $V$ bod vrchlíku, jehož vzdálenost od roviny hraniční kružnice je 1. Každý bod vrchlíku, který neleží na hraniční kružnici, má od $V$ vzdálenost menší než $\sqrt{2}$. Splývá-li tedy některý z daných bodů $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ s bodem $V$, pak tvrzení platí.

Nechť žádný z daných bodů nesplývá s bodem $V$. Označme $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, $A'_4$ pravoúhlé průměty daných bodů do roviny hraniční kružnice. Mezi těmito průměty pak existují takové dva body $A'_i$, $A'_j$, kde $i \neq j$, že platí

$$\sphericalangle A'_i S A'_j \leqq 90°. \tag{1}$$

Toto tvrzení dokážeme nepřímo. Nechť takové dva body neexistují. V rovině hraniční kružnice (obr. 2) veďme bodem $S$ přímky $p$, $q$, které jsou po řadě kolmé k $SA'_1$ a $SA'_2$. Pak polopřímky $SA'_2$, $SA'_3$, $SA'_4$ leží v polorovině



Obr. 2

opačné k polorovině $pA_1'$ a polopřímky $SA_1'$, $SA_3'$, $SA_4'$ leží v polorovině opačné k polorovině $qA_2'$. Tedy v průniku uvažovaných polorovin, což je úhel o velikosti $180° - \sphericalangle A_1'SA_2' < 90°$, leží úhel $\sphericalangle A_3'SA_4' > 90°$, což je spor.

Dále dokážeme, že z nerovnosti (1) plyne

$$\sphericalangle A_iSA_j < 90° . \qquad (2)$$

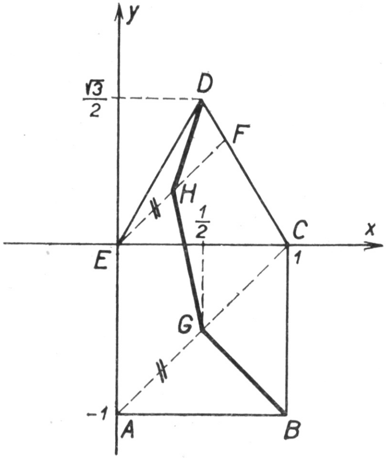
Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, aby bylo $S = [0, 0, 0]$, $V = [0, 0, 1]$ a aby body $A_i'$ a $A_j'$ měly první dvě souřadnice nezáporné, což vzhledem k (1) zřejmě lze. Pak ovšem body $A_i$ a $A_j$ mají také první dvě souřadnice nezáporné a třetí souřadnice kladné. Odtud již plyne, že skalární součin vektorů $A_i - S$ a $A_j - S$ je kladný, tj. kosinus úhlu $A_iSA_j$ je kladný, takže platí (2).

Z nerovnosti (2) již vyplývá, že vzdálenost bodů $A_i$ a $A_j$ je menší než $\sqrt{2}$.

## B – P – 4

Konvexný päťuholník $ABCDE$ sa skladá zo štvorca $ABCE$ so stranou dĺžky 1 a rovnostranného trojuholníka $CDE$. Vyšetrite množinu **M** stredov všetkých úsečiek rovnobežných s priamkou $AC$, ktorých oba krajné body patria hranici päťuholníka $ABCDE$, a vypočítajte dĺžku čiary **M**.

**Riešenie** (obr. 3). Úlohu budeme riešiť metódou súradníc. Ortonormálnu súradnicovú sústavu zvolíme tak, aby vrchol $E$ daného päťuholníka bol jej začiatkom, os $x$ bola



Obr. 3

totožná s priamkou $EC$ a os $y$ totožná s priamkou $AE$. Potom vrcholy päťuholníka majú tieto súradnice: $A[0, -1]$, $B[1, -1]$, $C[1, 0]$, $D\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E[0, 0]$.

Priamka $AC$ má rovnicu $y = x - 1$. Rovnobežka s ňou prechádzajúca vrcholom $E$ má preto rovnicu $y = x$ a priamku $CD \equiv y = -\sqrt{3}(x - 1)$ pretína v bode $F\left[\frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right]$. Priamky $AC$, $EF$ rozdeľujú daný päťuholník na trojuholníky $ABC$, $EFD$ a lichobežník $ACFE$. Ak označíme $G$ stred úsečky $AC$ a $H$ stred úsečky $EF$, potom hľadaná množina **M** stredov všetkých úsečiek rovnobežných s priamkou $AC$, ktorých oba krajné body ležia na hranici daného päťuholníka, je lomená čiara pozostávajúca z úsečiek $\overline{BG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HD}$.

Keďže $G\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $H\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right]$, možno túto lomenú čiaru popísať rovnicami:

$$\overline{BG} \equiv y = -x, \quad x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle;$$

$$\overline{GH} \equiv y = -(1 + 2\sqrt{3})x + \sqrt{3}, \quad x \in \left\langle \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2} \right\rangle;$$

$$\overline{HD} \equiv y = 3x - \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \quad x \in \left\langle \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

a pre jej dĺžku $d$ platí:

$$d = \overline{BG} + \overline{GH} + \overline{HD} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{8 - 3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}(\sqrt{30} - \sqrt{10}).$$

## C – P – 1

Určete všecka celá čísla $x$, která jsou řešením rovnice

$$3\,|\,x - 1\,| - 2x = 2\,|\,3x + 1\,|\,.$$

**Řešení.** Protože $3\,|\,x - 1\,| = 2\,|\,3x + 1\,| + 2x$, je na pravé straně číslo sudé, proto $x - 1$ je sudé, $x$ je liché. Rozlišíme případy (I) $x \geqq 1$, (II) $x \leqq -1$.

(I) Je-li $x \geqq 1$, je $|\,x - 1\,| = x - 1$, $|\,3x + 1\,| = 3x + 1$ a dále $y = 3\,|\,x - 1\,| - 2x - 2\,|\,3x + 1\,| = 3x - 3 - 2x - 6x - 2 = -5x - 5 < 0$.

V případě (I) nemá daná rovnice řešení.

(II) Je-li $x \leqq -1$, je $|\,x - 1\,| = 1 - x$, $|\,3x + 1\,| = -3x - 1$ a dále $y = 3 - 3x - 2x + 6x + 2 = x + 5$
$y = 0$ právě když $x = -5$; toto číslo je jediný celočíselný kořen dané rovnice.

## C – P – 2

Auto jelo z města $A$ do města $B$ stálou rychlostí. Po hodině jízdy pokračuje rychlostí sníženou na $\frac{3}{5}$ rychlosti původní. Tím se jeho příjezd do $B$ opozdí o 2 hodiny. Kdyby k tomuto snížení došlo o 50 km blíže k $B$, opozdilo by se jen o 80 minut. Vypočtěte vzdálenost $AB$ a původní rychlost auta.

**Řešení.** Na obr. 4 je naznačena jízda s dvouhodinovým a jízda s osmdesátiminutovým zpožděním. V bodě $C$, resp. $D$ nastalo snížení počáteční rychlosti $v$ na rychlost $\frac{3}{5}v$.

Obr. 4


V tabulkách jsou zaznamenány dráhy (v km) i časy (v hodinách) obou jízd. Vzdálenost $AB$ je označena $x$.

| 1. jízda | $AC$ | $CB$ | $AB$ |
|---|---|---|---|
| rychlost | $v$ | $\frac{3}{5}v$ | — |
| dráha | $v$ | $x - v$ | $x$ |
| čas | 1 | $\frac{5}{3}\left(\frac{x}{v} - 1\right)$ | $\frac{x}{v} + 2$ |

| 2. jízda | $AD$ | $DB$ | $AB$ |
|---|---|---|---|
| rychlost | $v$ | $\frac{3}{5}v$ | — |
| dráha | $v + 50$ | $x - v - 50$ | $x$ |
| čas | $\frac{v + 50}{v}$ | $\frac{5}{3}\left(\frac{x}{v} - 1 - \frac{50}{v}\right)$ | $\frac{x}{v} + \frac{4}{3}$ |

Plánovaná doba jízdy byla v obou případech $\frac{x}{v}$ (h).

Skutečná doba 1. jízdy byla $\frac{x}{v} + 2$, 2. jízdy $\frac{x}{v} + \frac{4}{3}$ $\left(80 \text{ min} = \frac{4}{3}\text{h}\right)$. Z posledních řádek obou tabulek plyne soustava

$$\begin{aligned} 1 + \frac{5}{3}\left(\frac{x}{v} - 1\right) &= \frac{x}{v} + 2 \\ 1 + \frac{50}{v} + \frac{5}{3}\left(\frac{x}{v} - 1 - \frac{50}{v}\right) &= \frac{x}{v} + \frac{4}{3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Z první rovnice (1) dostaneme po úpravě

$$\frac{x}{v} = 4. \tag{2}$$

Z druhé rovnice (1) dostaneme po úpravě

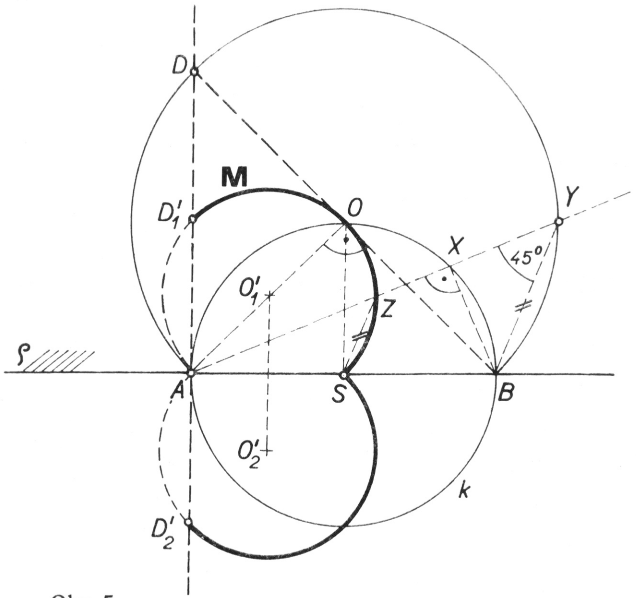
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{v} - \frac{2}{3} \cdot \frac{50}{v} = 2. \tag{3}$$

Spojením (2), (3) vyjde $v = 50$ a z (2) pak $x = 200$. Zkouška ověří správnost řešení.

## C — P — 3

Je dána kružnice $k$ s průměrem $AB$. Na kružnici $k$ zvolíme bod $X \neq A$, $B$ a na polopřímce $AX$ sestrojíme bod $Y$ tak, aby platilo $AY = AX + XB$. Vyšetřte množinu středů $Z$ úseček $AY$ pro všechny takové body $X$.

**Řešení** (obr. 5). Vyšetřujeme nejprve část hledané množiny **M**, která leží v jedné polorovině $\varrho$ s hranicí $AB$. Protože je $AY \perp BX$, $XB = XY$, je $\triangle BXY$ pravoúhlý



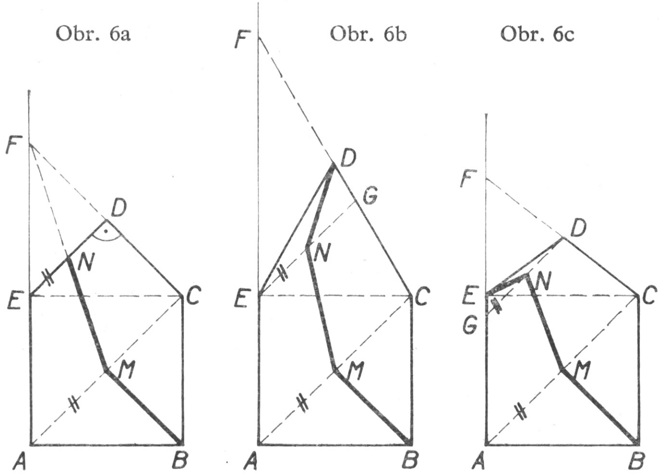

Obr. 5

rovnoramenný s přeponou $BY$, a platí tedy $\sphericalangle AYB = 45°$. Přitom $\sphericalangle BAY$ je ostrý. Vyšetřovaná část množiny **M** vznikne takto: množina všech bodů $Y$ ležících v polorovině $\varrho$ je půlkružnice bez krajních bodů nad přeponou $BD$ pravoúhlého rovnoramenného $\triangle ABD$. Množina $\mathbf{M} \cap \varrho$, tj. množina středů $Z$ úseček $AY$ je obraz uvedené půlkružnice (bez krajních bodů) ve stejnolehlosti se středem $A$ a koeficientem $\frac{1}{2}$. Symetrií podle osy $AB$ vznikne zbývající část množiny **M**. Body $S$, $D_1'$, $D_2'$ do množiny **M** nenáležejí.

## C – P – 4

Pětiúhelník $ABCDE$ se skládá ze čtverce $ABCE$ a z rovnoramenného trojúhelníku $CDE$ se základnou $CE$. Vyšetřte množinu středů všech úseček rovnoběžných s přímkou $AC$, jejichž oba krajní body náležejí hranici pětiúhelníku $ABCDE$.

**Řešení.** Rozlišíme tři případy: (I) $\sphericalangle\, CDE = 90°$, (II) $\sphericalangle\, CDE < 90°$, (III) $\sphericalangle\, CDE > 90°$ (obr. 6 abc). Ve všech třech případech užíváme věty: *Množina středů všech příček trojúhelníku $PQR$, které jsou rovnoběžné se stranou*




Obr. 6a Obr. 6b Obr. 6c

$PQ$, je těžnice tohoto trojúhelníku vedená z vrcholu $R$ (bez bodu $R$). V případě (I) (obr. 6a) polopřímky $AE$, $CD$ se protnou v bodě $F$ ($\sphericalangle EAC$ je ostrý, $\sphericalangle DCA$ je pravý). Těžnice $FM$ ($M$ je střed úhlopříčky $AC$) je množina středů všech příček $\triangle ACF$ rovnoběžných se stranou $AC$; obsahuje tedy i střed $N$ úsečky $DE$. Hledaná množina středů je tedy lomená čára $BMN$ (bez bodu $B$).

Obdobně se vyšetřuje množina $\mathsf{M}$ v případech (II) a (III). V případě (II) (obr. 6b) postupujeme tak dlouho, až narazíme na příčku $FG$ $\triangle ACF$ rovnoběžnou s úsečkou $AC$; její střed označíme $N$. Zbývající část množiny $\mathsf{M}$ je těžnice $DN$ trojúhelníku $DEG$. Množina $\mathsf{M}$ je lomená čára $BMND$ bez krajních bodů.

V případě (III) (obr. 6c) postupujeme až k příčce $DG \parallel AC$; její střed označíme opět $N$. Zbývající část množiny $\mathsf{M}$ je těžnice $EN$ trojúhelníku $DEG$; množina $\mathsf{M}$ je opět lomená čára $BMNE$ bez krajních bodů.

## Z — P — 1

Zjistěte, který ze zlomků

$$\frac{23456798}{29876543}, \frac{23456789}{29876534}$$

je větší.

**Řešení.** Prohlédneme-li pozorně oba zlomky, vidíme, že jejich čitatelé se od sebe liší jen o 9; podobně tomu je se jmenovateli. Označíme-li $23456789 = a$, $29876534 = b$, jsou dané zlomky

$$\frac{a+9}{b+9}, \frac{a}{b}.$$

Dále si uvědomíme, že dvě kladná čísla $x$, $y$ můžeme porovnat buď pomocí jejich rozdílu nebo pomocí jejich podílu. Platí totiž např. věta: $x > y$ (nebo $x = y$ nebo $x < y$), právě když je $\frac{x}{y} > 1$ $\left(\text{nebo } \frac{x}{y} = 1 \text{ nebo } \frac{x}{y} < 1\right)$.

Vypočteme tedy

$$\frac{x}{y} = \frac{(a+9)b}{(b+9)a} = \frac{ab+9b}{ab+9a}.$$

Protože je $b > a$, je $9b > 9a$, $ab + 9b > ab + 9a$, a tedy

$$\frac{a + 9}{b + 9} > \frac{a}{b},$$

neboli první zlomek je větší než druhý.

Označením mnohaciferných čísel dvěma písmeny $a$, $b$ jsme si uspořili psaní a zároveň jsme přehledně zapsali postup, jak řešit obdobné úlohy.

## Z — P — 2

Představte si, že jsme znásobili všecka přirozená čísla od 1 do 1976. Kolika nulami končí zápis výsledku v desítkové soustavě?

**Řešení.** Číslo $N = 1 . 2 . \ldots . 1976$ se dá známým způsobem vyjádřit jako součin prvočinitelů (tj. prvočísel); provede se to tak, že každé z čísel $2, 3, \ldots, 1976$ se vyjádří jako součin prvočinitelů (např. $12 = 2 . 2 . 3$, $22 = 2 . 11$, $1000 = 2 . 2 . 2 . 5 . 5 . 5$). Ze všech těchto prvočinitelů nás zajímají jen prvočinitelé rovné 2 a 5, neboť $2 . 5 = 10$; kolik dvojic 2, 5 vytvoříme v součinu $N$, tolik můžeme v tomto součinu $N$ utvořit činitelů rovných 10.

Označme $a$ počet těch prvočinitelů čísla $N$, které jsou rovny 2. Protože každé sudé číslo $\leqq 1976$ obsahuje aspoň jednoho prvočinitele rovného 2, je

$$a \geqq \frac{1}{2} . 1976 = 988 . \tag{1}$$

Označme $b$ počet těch prvočinitelů čísla $N$, jež jsou rovny 5. Prvočinitel 5 se vyskytuje aspoň jednou u všech čísel $\leqq 1976$, která jsou násobky pěti, tj. u čísel 5, 10, 15, 20, . . . , 1975; dále se vyskytuje aspoň dvakrát u násobků čísla 25, tj. 25, 50, 75, 100, . . . , 1975; dále se vyskytuje aspoň třikrát u násobků čísla 125, tj. 125, 250, 375, 500, . . . , 1875; konečně se vyskytuje aspoň čtyřikrát u násobků čísla 625, tj. 625, 1250, 1875.

Mezi čísly 1, 2, . . . , 1976 je 395 násobků pěti, neboť $1976 = 5 \,.\, 395 + 1$; dále je mezi nimi 79 násobků dvacetipěti, neboť $1976 = 25 \,.\, 79 + 1$; dále je mezi nimi 15 násobků čísla 125, neboť $1976 = 15 \,.\, 125 + 101$; konečně jsou mezi nimi tři násobky čísla 625, neboť $1976 = 3 \,.\, 625 + 101$. Číslo $3125 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5$ je větší než 1976, a proto nepřichází v úvahu.

Ve vyjádření čísla $N$ jako součinu prvočinitelů se vyskytuje tedy prvočíslo 5 $b$-krát, kde

$$b = 395 + 79 + 15 + 3 = 492 \,. \qquad (2)$$

Podle (1), (2) je $a > b$; číslo $b = 492$ udává počet nul, které má číslo $N$ v dekadickém vyjádření na konci.

## Z — P — 3

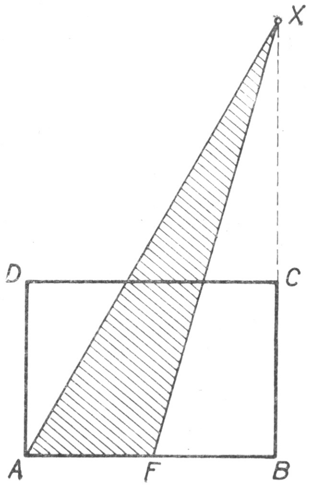
Obdélník $ABCD$ má délky stran $AB = 6\frac{3}{5}$ cm, $BC = 4\frac{2}{3}$ cm; označme $F$ střed strany $AB$. Výpočtem řešte úlohu:

Na polopřímce $BC$ sestrojte bod $X$ takový, aby obsah trojúhelníku $AFX$ byl roven $\frac{5}{8}$ obsahu obdélníku $ABCD$. (Vypočtěte velikost úsečky $BX$.)

**Řešení** (obr. 7). Podle textu úlohy je $AB = \frac{33}{5}$, $BC = \frac{14}{3}$. Pět osmin obsahu obdélníku $ABCD$ je tedy číslo $\frac{5}{8} \cdot \frac{33}{5} \cdot \frac{14}{3} = \frac{1}{4} \cdot 77$. Označme $BX = x$; obsah trojúhelníku $AFX$ je pak $\frac{1}{2} AF \cdot x = \frac{1}{4} AB \cdot x = \frac{1}{4} \cdot \frac{33}{5} x$.

Podmínka pro obsahy je $\frac{1}{4} \cdot \frac{33}{5} x = \frac{1}{4} \cdot 77$. Odtud

$$\frac{3}{5} x = 7 \,, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{35}{3}.$$

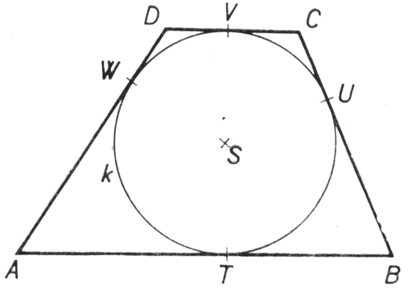


Obr. 7

## Z — P — 4

Je dán lichoběžník $ABCD$, jehož střední příčka má délku 1 a jemuž lze vepsat kružnici. Vypočtěte jeho obvod.

**Řešení** (obr. 8). Kružnice $k$ vepsaná lichoběžníku $ABCD$ se dotýká jeho stran $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ v bodech,




Obr. 8

které označíme po řadě $T$, $U$, $V$, $W$. Podle známé vlastnosti tečen vedených z bodu ke kružnici platí

$$AW = AT, \quad BT = BU, \quad CU = CV, \quad DV = DW.$$

Sečtením

$$AW + AT + BT + BU + CU + CV + DV + DW =$$
$$= 2AT + 2BT + 2CV + 2DV = 2(AB + CD),$$

tj. pro obvod $o$ lichoběžníku $ABCD$ a jeho střední příčku $s$ platí

$$o = 2 . 2s = 4s = 4 .$$