26. ročník matematické olympiády

III. Soutěžní úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); Lev Bukovský (editor): 26. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 61–91.

III. Soutěžní úlohy I. kola

KATEGORIE A

A – I – 1

Jsou-li z_1, z_2, z_3, z_4 komplexní čísla, pro něž Re $z_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, pak

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 \neq 0 .$$

Dokažte.

Riešenie. Predpokladajme, že uvedené tvrdenie neplatí. Teda platí rovnosť

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 = 0 .$$

Jednoduchou úpravou dostaneme

$$(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) = -z_1 z_2 .$$

Vieme, že $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. Môžeme deliť uvedenú rovnosť číslom $z_1 z_2$:

$$\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}\right)(z_3 + z_4) = -1 .$$

Podľa časti a) úlohy A-P-2 je $\operatorname{Re}\frac{1}{z_1} > 0$, $\operatorname{Re}\frac{1}{z_2} > 0$ a tiež

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}\right) > 0, \quad \operatorname{Re}(z_3 + z_4) > 0,$$

a teda podľa časti b) tejto úlohy súčin $\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}\right)(z_3 + z_4)$ nemôže byť záporné reálne číslo.

A – I – 2

Určete nutnou a postačující podmínku pro to, aby rovnice $x^3 + ax^2 + b = 0$ s neznámou x a reálnými koeficienty a, b měla tři navzájem různé reálné kořeny.

Riešenie. Vyšetríme priebeh funkcie f definovanej predpisom

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b\,.$$

Korene uvedenej rovnice sú nulové body funkcie f. Pre dosť malé záporné číslo x je $f(x)$ záporné, pre dosť veľké x kladné je $f(x)$ kladné číslo. Teda funkcia f má aspoň jeden nulový bod. Aby funkcia f mala tri nulové body, musí mať kladné lokálne maximum a záporné lokálne minimum. Uvedené je aj postačujúcou podmienkou. Funkcia f má deriváciu $f'(x) = 3x^2 + 2ax$, ktorá má nulové body $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{2}{3}a$, pričom $f(x_1) = b$, $f(x_2) = \frac{4}{27}a^3 + b$. Druhá derivácia v týchto bodoch má hodnoty $f''(x_1) = 2a$, $f''(x_2) = -2a$. Rozlišíme tri prípady.

i) $a = 0$. Potom $x_1 = x_2$ a funkcia f nemá lokálny extrém a ani tri nulové body.

ii) $a > 0$. Potom funkcia f má v bode x_1 lokálne minimum a v bode x_2 lokálne maximum. Má byť $f(x_1) < 0$ a $f(x_2) > 0$. Teda $f(x_1) . f(x_2) < 0$, tj.

$$b\left(\frac{4}{27}a^3 + b\right) < 0.$$

iii) $a < 0$. Potom funkcia f má v bode x_1 lokálne maximum a v bode x_2 lokálne minimum. Má byť $f(x_1) > 0$ a $f(x_2) < 0$. Teda $f(x_1) . f(x_2) < 0$, tj.

$$b\left(\frac{4}{27}a^3 + b\right) < 0.$$

Ak si uvedomíme, že z nerovnosti

$$b(4a^3 + 27b) < 0 \tag{1}$$

vyplýva, že

1. $a \neq 0$,
2. ak $a > 0$, tak $b < 0$,
3. ak $a < 0$, tak $b > 0$,

tak úhrnom dostávame, že nerovnosť (1) je nevyhnutná a postačujúca podmienka pre to, aby rovnica $x^3 + ax^2 + b = 0$ mala tri rôzne reálne korene.

A — I — 3

Určete všecky trojice přirozených čísel x, y, z, které jsou řešením rovnice

$$x^2 - y^2 = 3z^2.$$

Riešenie. Nech trojice prirodzených čísiel x, y, z vyhovuje rovnici

$$x^2 - y^2 = 3z^2 . \tag{1}$$

Nech d je najväčší spoločný deliteľ čísiel x, y, z. Potom aj prirodzené čísla $a = x : d$, $b = y : d$, $c = z : d$ vyhovujú rovnici (1) a sú nesúdeliteľné.

Označíme $u = a - b$, $v = a + b$. Potom platí

$$uv = 3c^2.$$

Ukážeme, že spoločný deliteľ čísiel u, v je 1 alebo 2.

Ak p je prvočíslo, ktoré delí u a v, tak p delí aj čísla $u + v = 2a$, $v - u = 2b$ a p^2 delí číslo $3c^2$. Keďže a, b, c sú nesúdeliteľné, tak musí byť $p = 2$. Z druhej strany $4 = 2^2$ tiež nie je spoločný deliteľ čísiel u, v, lebo by potom a, b, c boli párne, a teda súdeliteľné.

Rozlišujem dva prípady.

i) u, v sú nesúdeliteľné. Potom existujú nepárne prirodzené čísla k, l také, že buď

$$u = 3k^2, \; v = l^2,$$

alebo

$$u = k^2, \; v = 3l^2.$$

Potom buď

$$x = d \, . \left(\frac{3k^2 + l^2}{2}\right), \quad y = d \, . \left(\frac{l^2 - 3k^2}{2}\right), \quad z = dkl,$$

alebo

$$x = d \, . \left(\frac{k^2 + 3l^2}{2}\right), \quad y = d \, . \left(\frac{3l^2 - k^2}{2}\right), \quad z = dkl,$$

kde k, l sú nepárne a $l^2 > 3k^2$ alebo $3l^2 > k^2$, d je ľubovoľné prirodzené číslo.

ii) 2 je spoločný deliteľ u, v. Potom $\frac{u}{2}$, $\frac{v}{2}$ sú prirodzené čísla a platí

$$\frac{u}{2} \cdot \frac{v}{2} = 3\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Zase existujú dve také prirodzené čísla k, l, z ktorých najviac jedno je párne, že buď

$$\frac{u}{2} = 3k^2, \; \frac{v}{2} = l^2,$$

alebo

$$\frac{u}{2} = k^2, \; \frac{v}{2} = 3l^2.$$

Potom buď

$$x = d(3k^2 + l^2)\,, \; y = d(l^2 - 3k^2)\,, \; z = 2dkl\,,$$

kde k, l sú prirodzené čísla, z ktorých najviac jedno je párne, $l^2 > 3k^2$, d je ľubovoľné prirodzené číslo, alebo

$$x = d(k^2 + 3l^2)\,, \; y = d(3l^2 - k^2)\,, \; z = 2dkl$$

kde k, l sú prirodzené čísla, z ktorých najviac jedno je párne, $3l^2 > k^2$, d je ľubovolne prirodzené číslo.

Teda každé riešenie rovnice (1) má tvar

$$x = d\,.\,\frac{3k^2 + l^2}{2}\,, \quad y = d\,.\,\frac{|l^2 - 3k^2|}{2}\,, \quad z = dkl,$$

kde buď k, l sú nepárne prirodzené čísla a d je ľubovolne prirodzené číslo, alebo k, l sú prirodzené čísla, z ktorých práve jedno je párne a d je ľubovoľné párne prirodzené číslo.

Skúškou sa ľahko zistí, že každá taká trojica čísiel je riešením rovnice (1).

A — I — 4

Jsou dána tři celá čísla a_0, a_1, a_2 tak, že rozdíl žádných dvou z nich není dělitelný třemi. Z množiny $\mathbf{M}$ všech trojic celých čísel

$$(a_0 + x\,,\ a_1 + x\,,\ a_2 + x)\,,\ x \text{ celé}$$

lze vybrat takovou množinu $\mathbf{M}_1$, která má tyto dvě vlastnosti:

(1) Každé dva různé prvky množiny $\mathbf{M}_1$ jsou trojice navzájem disjunktní.

(2) Sjednocením všech trojic, které jsou prvky množiny $\mathbf{M}_1$, je množina všech celých čísel.

Dokažte vyslovenou větu.

Riešenie. Čísla a_0, a_1, a_2 dávajú pri delení tromi rôzne zvyšky. Nech sú to postupně z_0, z_1, z_2. Teda každé z_i je niektoré z čísiel 0, 1, 2.

Nech $\mathbf{M}_1$ je množina všetkých trojíc $(a_0 + 3y, a_1 + 3y, a_2 + 3y)$, kde y je celé číslo.

Dve rôzne trojice nemajú spoločný prvok. Keby napr. $a_0 + 3y_1 = a_1 + 3y_2$, tak rozdiel $a_1 - a_o$ by bol deliteľný tromi.

Nech c je celé číslo. Ukážeme, že existuje také y, že c je niektoré z čísiel $a_0 + 3y$, $a_1 + 3y$, $a_2 + 3y$. Nech z je zvyšok čísla c pri delení tromi. Potom buď $z = z_0$, alebo $z = z_1$, alebo $z = z_2$. Nech napr. $z = z_0$. Potom $c - a_0$ je deliteľné tromi, tj. existuje také celé číslo y, že $c - a_0 = 3y$. Potom $c = a_0 + 3y$.

A — I — 5

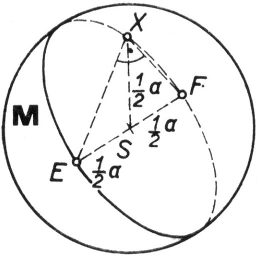
Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$, který má výšku v a dolní podstavu o hraně a. Nechť body E a F jsou po řadě středy hran BC a AD.

Najděte množinu středů odvěsen všech pravoúhlých trojúhelníků EXF s přeponou EF, jejichž vrchol X leží v podstavě $A'B'C'D'$. Proveďte diskusi vzhledem k číslům a a v.

Riešenie. Nech **M** je množina všetkých tých bodov X, ktoré sú vrcholom pravouhlého trojuholníka EFX s preponou EF.

Ukážeme pomocné tvrdenie:

Nech S je stred úsečky EF. Množina **M** je guľová



Obr. 9

plocha o strede S s polomerom $\frac{1}{2}a$, okrem koncových bodov E, F úsečky EF (obr. 9).

Skutočne, ak bod X rôzny od bodov E, F leží na uvedenej guľovej ploche, tak X leží na kružnici, ktorá je priesečníkom tejto plochy a roviny EFX. Pritom EF je priemer tejto kružnice a podľa Thaletovej vety trojuholník EFX je pravouhlý s preponou EF.

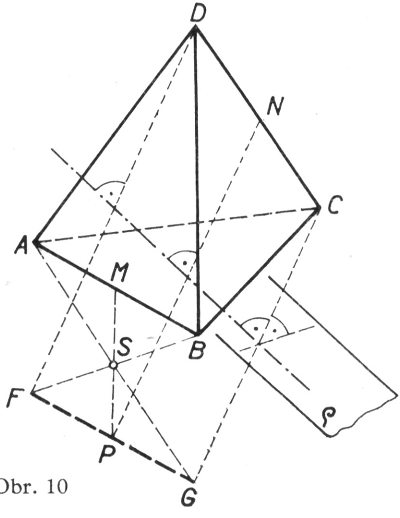
Ak naopak EFX je pravouhlý trojuholník s preponou EF, tak podľa Thaletovej vety bod X leží na kružnici s priemerom EF, a teda $SE = SX$. Odkiaľ vyplýva, že bod X leží na uvedenej guľovej ploche.

Ak $v > \frac{a}{2}$, tak žiaden bod množiny **M** neleží v podstave $A'B'C'D'$ a vyšetrovaná množina stredov odviesen je prázdna.

Ak $v = \frac{a}{2}$, tak jediný spoločný bod množiny **M** a podstavy $A'B'C'D'$ je stred tejto podstavy S'. Potom hľadaná množina má dva prvky, a to stredy úsečiek ES', FS'.

Ak $v < \frac{a}{2}$, tak množina **M** a podstava $A'B'C'D'$ sa pretínajú v kružnici o strede S' a polomere $\sqrt{\frac{a^2}{4} - v^2}$. Hľadaná množina je zjednotenie kružníc o stredoch E', F' a polomere $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - v^2}$, kde E', F' sú stredy úsečiek ES', FS', ležiacich v rovine rovnobežnej s podstavou $ABCD$.

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Nechť souměrnost podle středu S převádí hranu AB v tutéž úsečku, v kterou převádí souměrnost podle jisté roviny ϱ hranu CD. Vyšetřte množinu všech bodů S této vlastnosti.



Obr. 10

Riešenie (obr. 10). Nech FG je úsečka, ktorá je obrazom hrany AB v stredovej súmernosti **S** podľa stredu S a súčasne je obrazom hrany CD v rovinnej súmernosti **R** podľa roviny ϱ. Priamka FG leží v rovine σ, ktorá obsahuje priamku CD, a FG je rovnobežná s priamkou AB. Keďže priamky AB a CD nie sú rovnobežné, tak rovina σ je uvedenou podmienkou jednoznačne určená.

Označme postupne M, N, P stredy úsečiek AB, CD,

FG. Obrazom bodu M v súmernosti $\mathbf{S}$ je bod P. Obrazom bodu N v súmernosti $\mathbf{R}$ je tiež bod P.

Nech p je priamka idúca bodom C a je rovnobežná s priamkou AB. Nech E_1, E_2 sú obidva body na priamke p, pre ktoré platí $E_1C = E_2C = AB$. Nech s, t sú priamky idúce bodom N a kolmé na osi uhlov $\sphericalangle\, DCE_1$, $\sphericalangle\, DCE_2$.

Z vlastnosti stredovej súmernosti $\mathbf{S}$ vyplýva, že úsečka FG je rovnobežná s priamkou p. Z vlastností rovinovej súmernosti potom vyplýva, že stred P úsečky FG leží na priamke s alebo na priamke t. Nech $\mathbf{M}$ je obraz zjednotenia priamok s a t v priestorovej rovnoľahlosti so stredom M a koeficientom $\frac{1}{2}$. Pretože S je stred úsečky MP, tak S patrí do množiny $\mathbf{M}$.

Naopak, ak S' je nejaký bod množiny $\mathbf{M}$, označíme P' jeho obraz pri priestorovej rovnoľahlosti so stredom M a koeficientom 2. Bod P' leží na priamke s alebo t. Úsečka rovnobežná s úsečkou AB a so stredom P' je stredovo súmerná podľa stredu S' s úsečkou AB. Ak bod P' leží na priamke s, tak táto úsečka je rovinovo súmerná s úsečkou CD v rovinovej súmernosti podľa roviny kolmej na priamku s a idúcej stredom úsečky NP'. Podobne v prípade, že bod P' leží na priamke t.

Ukázali sme teda, že $\mathbf{M}$ je hľadaná množina bodov.

B – I – 1

Nájdite všetky kladné riešenia sústavy

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \leqq 2\,,$$

$$x_2 + \frac{1}{x_3} \leqq 2\,,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$x_{1975} + \frac{1}{x_{1976}} \leqq 2\,,$$

$$x_{1976} + \frac{1}{x_1} \leqq 2\,.$$

Riešenie. Odčítajme od oboch strán každej z nerovníc danej sústavy číslo 2 a potom všetky nerovnice sčítajme. Dostaneme

$$\sum_{i=1}^{1976} \left(x_i + \frac{1}{x_i} - 2\right) \leqq 0\,. \qquad (1)$$

Ak si uvedomíme, že pre každé kladné číslo x_i platí

$$x_i + \frac{1}{x_i} - 2 \geqq 0\,, \qquad (2)$$

zisťujeme, že v (1) musí platiť rovnosť. Pre čísla x_i, $i = 1, 2, \ldots, 1976$ vyhovujúce danej sústave nerovníc musí preto platiť

$$\sum_{i=1}^{1976}\left(x_i + \frac{1}{x_i} - 2\right) = 0\,,$$

ale vzhľadom na (2) riešenie (3) dostaneme z rovníc

$$x_i + \frac{1}{x_i} - 2 = 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, 1976\,,$$

z ktorých vyplýva $x_i = 1$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, 1976$. Dosadením do pôvodnej sústavy nerovníc sa ľahko presvedčíme, že tieto čísla jej vyhovujú. Je to teda jediné riešenie danej sústavy.

B — I — 2

Sú dané reálne čísla a, $b \neq 0$, c, r, s, t, pre ktoré platí

$$ar - 2bs + ct = 0\,, \tag{1}$$

$$ac - b^2 > 0\,. \tag{2}$$

Potom platí

$$rt - s^2 \leqq 0\,. \tag{3}$$

Dokážte.

Kedy v (3) nastane rovnosť?

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $r \geqq 0$ (v opačnom prípade môžeme uvažovať o číslach $-r$, $-s$, $-t$).

a) Nech $r > 0$. Z (2) dostaneme $ac > b^2 > 0$, z čoho vyplýva, že $c \neq 0$, a preto tiež platí

$$\frac{a}{c} > \frac{b^2}{c^2} > 0\,. \tag{4}$$

Z (1) po delení číslom c dostaneme vzhľadom na (4):

$$0 = \frac{a}{c} r - 2\frac{b}{c} s + t > r\frac{b^2}{c^2} + 2\left(-\frac{b}{c}\right) s + t\,.$$

Z toho vyplýva, že mnohočlen $rx^2 + 2sx + t$ premennej x s $r > 0$ má v čísle $-\frac{b}{c}$ zápornú hodnotu, a má preto dva rôzne reálne korene. Je preto jeho diskriminant $4s^2 - 4rt > 0$ čiže $rt - s^2 < 0$.

b) Ak $r = 0$, $t = 0$, potom z (1), vzhľadom na predpoklad, že $b \neq 0$, vyplýva, že tiež $s = 0$ a v (3) platí rovnosť.

c) Ak $r = 0$, $t > 0$, postupujeme analogicky ako v prípade a) s využitím toho, že vzhľadom na (2) je $a \neq 0$, a dostaneme, že musí byť $rt - s^2 < 0$.

Z vykonanej úvahy zároveň vyplýva, že v (3) nastane rovnosť vtedy a len vtedy, keď platí $r = s = t = 0$.

B — I — 3

Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú reálne čísla so súčtom nula, m najmenšie z nich, M najväčšie z nich. Potom platí

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq -nmM\,.$$

Dokážte.

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že platí

$$m = x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_n = M .$$

Potom však zrejme platí

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n} (x_1 - x_k)(x_k - x_n) = (x_1 + x_n) \sum_{k=1}^{n} x_k - \\ - n x_1 x_n - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 . \qquad (1)$$

Podľa podmienok úlohy je však $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$ a z nerovnosti (1) preto dostávame

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqq - n x_1 x_n = - nmM ,$$

čo sme mali dokázať.

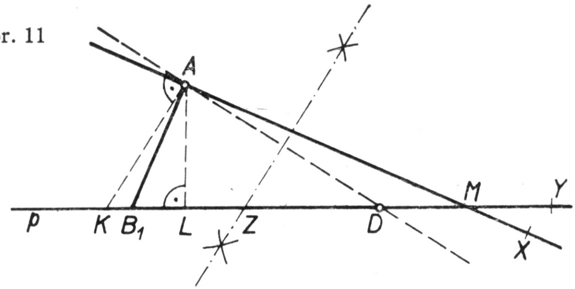
B — I — 4

V rovine sú dané dva rôzne body A a D. Nájdite množinu stredov strán BC všetkých takých ostrouhlých trojuholníkov ABC, v ktorých bod D leží na úsečke BC.

Riešenie. Nech p je ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom D v danej rovine, rôzna od priamky AD. Pätu kolmice vedenej z bodu A na priamku p označme L (obr. 11) a priesečník kolmice na priamku AD prechádzajúcej bodom A s priamkou p označme K. Ak má byť trojuholník ABC, ktorého strana BC leží na priamke p a obsahuje bod D, ostrouhlý, musí zrejme jeho vrchol B ležať medzi bodmi K a L.

Nech B_1 je ľubovoľný bod priamky p ležiaci medzi bod-

Obr. 11



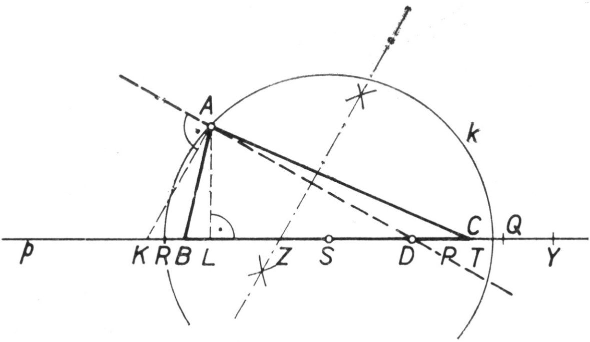
mi K a L. Zostrojme pravý uhol B_1AX a označme M priesečník priamky AX s priamkou p. Vrchol C trojuholníka ABC musí ležať medzi bodmi D a M.

Ak budeme uvažovať o rôznych polohách bodu B na úsečke KL od bodu K ku L, bude bod M nadobúdať rôzne polohy na polpriamke DY. Polpriamka DY tvorí teda množinu vrcholov C trojuholníka ABC. Tomu zodpovedajúca množina stredov S úsečiek BC bude polpriamka ZY okrem bodu Z, pričom Z je prisečník osi úsečky AD s priamkou p a zároveň stredom úsečky KD.

Ak túto úvahu urobíme pre všetky priamky prechádzajúce bodom D rôzne od priamky AD, zisťujeme, že každý bod S požadovanej vlastnosti musí ležať v otvorenej polrovine určenej osou úsečky AD a bodom D vrátane bodu D, ale bez ostatných bodov priamky AD.

Nech teda bod S leží v otvorenej polrovine určenej osou úsečky AD a bodom D, ale s výnimkou bodu D neleží na priamke AD.

Na priamke $SD \equiv p$ nech body K, L majú rovnaké vlastnosti ako bolo vyššie uvedené (obr. 12). Nech P, Q sú také body polpriamky DY, pre ktoré platí $SP = SL$,



Obr. 12

$SQ = SK$. Ak S má byť stredom strany BC, musí bod C ležať medzi bodmi P a Q.

Označme R, T priesečníky kružnice $k = (S; SA)$ s priamkou SD. Zrejme bod R leží medzi bodmi K a L, bod T medzi bodmi P a Q. Nech B je ľubovoľný bod priamky SD ležiaci medzi bodmi R, L. Na priamke SD zostrojíme bod C tak, aby platilo $SC = SB$. Bod C bude zrejme ležať medzi bodmi P a T. Takto zostrojený trojuholník ABC je ostrouhlý, bod D leží na úsečke BC a bod S je stredom strany BC.

Tým sme dokázali, že hľadanou množinou bodov je otvorená polrovina určená osou úsečky AD a bodom D vrátane bodu D, ale bez ostatných bodov priamky AD.

B — I — 5

V rovine je daných 50 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke. Dokážte: Trojuholníky určené trojicami daných bodov majú aspoň 200 vnútorných uhlov veľkosti menšej než $8°$ a z toho aspoň 100 vnútorných uhlov, ktorých veľkosť nepresahuje $7°30'$.

Riešenie. Označme $\mathbf{M}$ danú množinu bodov a nech X je ľubovoľný bod tejto množiny. Nech $\mathbf{U}_X$ je množina 49 uhlov s vrcholom v bode X, ktorých ramená prechádzajú ostatnými bodmi množiny $\mathbf{M}$.

Predpokladajme, že najviac 3 z uhlov množiny $\mathbf{U}_X$ sú menšie než $8°$. Potom však súčet zostávajúcich 46 uhlov množiny $\mathbf{U}_X$ musí byť väčší než $46 \,.\, 8° = 368°$, čo je spor, pretože súčet všetkých 49 uhlov množiny $\mathbf{U}_X$ sa rovná $360°$. Z toho vyplýva, že v $\mathbf{U}_X$ musia byť aspoň 4 uhly menšej veľkosti než $8°$. Keďže túto vlastnosť má každý bod množiny $\mathbf{M}$, je tým prvá časť tvrdenia dokázaná.

Z predpokladu, že z uhlov množiny $\mathbf{U}_X$ má najviac jeden veľkosť najviac rovnú $7°30'$, analogicky vyplýva, že súčet zostávajúcich 48 uhlov tejto množiny musí byť väčší než $48 \,.\, 7°30' = 360°$, čo je opäť spor. V každej množine $\mathbf{U}_X$ existujú preto aspoň 2 uhly, ktorých veľkosť neprevyšuje $7°30'$, a vzhľadom na to, že množina $\mathbf{M}$ obsahuje 50 bodov, vyplýva z toho správnosť druhej časti dokazovaného tvrdenia.

B — I — 6

Vo vnútri jednotkovej gule je daných päť bodov. Dokážte, že aspoň dva z nich majú vzdialenosť menšiu než $\sqrt{2}$.

Riešenie. Najskôr dokážeme nasledujúce tvrdenie: Ak je na guľovej ploche s polomerom 1 daných päť bodov, potom aspoň dva z nich majú vzdialenosť menšiu alebo rovnu $\sqrt{2}$.

Použijeme metódu nepriameho dôkazu a budeme predpokladať, že vzdialenosť každých dvoch z týchto bodov je väčšia než $\sqrt{2}$. Potom štyri z týchto bodov — označme ich B', C', D', E' — ležia v otvorenom polpriestore, ktorého hranica prechádza stredom guľovej plochy a je kolmá k polomeru idúcemu piatym z daných bodov — A'. Podľa výsledku prípravnej úlohy B-P-3 majú z bodov B', C', D', E' aspoň dva vzdialenosť menšiu než $\sqrt{2}$, čo je spor.

Nech sú teraz A, B, C, D, E dané body vo vnútri jednotkovej gule. Ak niektorý z nich leží v strede S danej gule, je tvrdenie zrejme pravdivé. Ak nie je tomu tak, utvorme polpriamky SA, SB, SC, SD, SE. Ich priesečníky s guľovou plochou označme A', B', C', D', E'. Podľa vyššie dokázaného tvrdenia majú aspoň dva z týchto piatich bodov vzdialenosť menšiu alebo rovnu $\sqrt{2}$. Nech sú to napr. body A', B'. Potom vzdialenosť bodov A, B je zrejme menšia než $\sqrt{2}$, čím je tvrdenie úlohy dokázané.

C – I – 1

Nájdite všetky trojice jednocifrových čísiel a, b, c, pre ktoré platí $a = b + c$ a číslo s dekadickým zápisom $2ab3c7$ je deliteľné 37.

Řešení. Dané číslo N lze vzhledem k rovnosti $a = b + c$ napsat v tomto tvaru

$$N = 200307 + 10\,(1100b + 1001c)$$

neboli

$$N = 5413 \,.\, 37 + 26 + 10(999 + 101)b + 10(999 + 2)c \,.$$

Číslo N je násobkem čísla 37, právě když je násobkem čísla 37 číslo

$$N_1 = 26 + 1010b + 20c;$$

je totiž $999 = 27 \,.\, 37$.

Číslo N_1 je násobkem čísla 37, právě když je jeho násobkem číslo

$$N_2 = N_1 - 999b = 26 + 11b + 20c \,.$$

Protože $b \leqq 9$, $c \leqq 9$, $a = b + c \leqq 9$, je

$$N_2 = 26 + 11a + 9c \leqq 26 + 99 + 81 = 206 \,.$$

Pro N_2 tedy přicházejí v úvahu násobky 37, 74, 111, 148, 185; od nich odečteme 26. Příslušné rovnice a z nich plynoucí hodnoty b, c jsou:

Rovnice		b	c	Poznámka
$11b + 20c = 11$	$11 = 37 - 26$	1	0	řešení
$11b + 20c = 48$	$48 = 74 - 26$	8	-2	$c < 0$
$11b + 20c = 85$	$85 = 111 - 26$	5	$\frac{3}{2}$	$b = 5$, neboť $85 - 11b$ je násobek deseti
$11b + 20c = 122$	$122 = 148 - 26$	2	5	řešení
$11b + 20c = 159$	$159 = 185 - 26$	9	3	není řešení, neboť $a = b + c = 12$

Úloha má tedy dvě řešení: čísla 211307 a 272357, jak se přesvědčíme zkouškou.

C – I – 2

Z miesta A výjdu do miesta B vzdialeného 600 km súčasne dva automobily. Rychlosť prvého je 60 km/h, druhého 50 km/h. Druhý voz neskôr zvýši svoju rýchlosť tak, že dorazí do miesta B súčasne s prvým vozom. Vyjadrite veľkosť zvýšenia priemernej rýchlosti druhého vozu pomocou veľkosti dráhy, ktorú vykonal s počiatočnou rýchlosťou.

Řešení. Označme C místo, kde druhé auto zvýšilo svou rychlost o δ (km/h). Pak doba jeho jízdy z A do B byla (v hodinách)

$$\frac{x}{50} + \frac{600 - x}{50 + \delta}.$$

Protože první auto projelo trať z A do B za $\frac{600}{60} = 10$ hodin, platí podle podmínky z textu úlohy

$$\frac{x}{50} + \frac{600 - x}{50 + \delta} = 10.$$

Odtud dostaneme

$$\delta = \frac{5000}{500 - x}$$

Např. zvýší-li druhé auto svou rychlost ve středu trati AB, je $x = 300$ a $\delta = 25$, takže zvýšená rychlost druhého auta je 75 km/h.
Je-li $x = 499$, je $\delta = 5000$, tj. rychlost druhého auta by měla být 5050 km/h, což je neuskutečnitelné.

C — I — 3

Určete všechna přirozená čísla n, pro něž je možno zlomek $\frac{2}{n}$ vyjádřit ve tvaru $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, kde x, y jsou vhodná přirozená čísla.

Řešení. Rovnici $\frac{2}{n} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ upravíme na tvar

$$n = \frac{2xy}{y - x}. \qquad (1)$$

Vyjádříme-li čísla x, y ve tvaru $x = \delta a$, $y = \delta b$, kde δ je největší společný dělitel čísel x, y, jsou čísla a, b nesoudělná; z (1) plyne, že číslo

$$n = \frac{2ab \cdot \delta}{b - a}$$

je celé. Je-li p prvočinitel čísla $b - a$, není prvočinitelem ani čísla a, ani b (plyne nepřímo z nesoudělnosti čísel a, b). Proto je číslo $b - a$ dělitelem čísla 2δ, tj.

$$2\delta = k(b - a)$$

neboli

$$\delta = \frac{k}{2}(b - a) . \tag{2}$$

Ze vztahů $x = \delta a$, $y = \delta b$ a z (2) plyne

$$x = \frac{k}{2}(b - a)a , \qquad y = \frac{k}{2}(b - a)b , \tag{3}$$

kde k je vhodné číslo celé. Zkouškou se přesvědčíme, že řešení (3) vyhovují rovnici (1), jestliže $kab = n$.

Nyní rozřešíme danou úlohu. Je-li n liché, zvolíme $k = 1$, $a = 1$, $b = n$ (a, b jsou nesoudělná) a dostaneme řešení

$$x = \frac{1}{2}(n - 1), \quad y = \frac{1}{2}n(n - 1) .$$

Je-li sudé, zvolíme $k = 2$ a $a = 1$, $b = \frac{n}{2}$ (a, b jsou opět nesoudělné) a dostaneme řešení

$$x = \frac{1}{2}(n - 2) , \quad y = \frac{1}{4}n(n - 2) .$$

Úloha je tedy řešitelná pro všechna přirozená čísla $n > 1$.

C – I – 4

V prostoru je dána krychlová síť (obdoba čtvercové sítě v rovině). Mřížovými body nazýváme vrcholy krychlí této sítě. Zvolme kvádr o rozměrech a, b, c, který je složen z $a \,.\, b \,.\, c$ krychlí sítě. Označíme n, s a h počet mřížových bodů po řadě ležících uvnitř kvádru, uvnitř stěn kvádru a uvnitř hran kvádru. Dokažte, že pro objem V kvádru platí:

$$V = n + \frac{s}{2} + \frac{h}{4} + 1\,.$$

Řešení. Počet mřížových bodů ležících uvnitř daného kvádru je

$$n = (a - 1)(b - 1)(c - 1)\,. \tag{1}$$

Počet mřížových bodů ležících uvnitř stěn je

$$s = 2(a - 1)(b - 1) + 2(b - 1)(c - 1) + \\ + 2(c - 1)(a - 1)\,. \tag{2}$$

Počet mřížových bodů ležících uvnitř hran je

$$h = 4(a - 1) + 4(b - 1) + 4(c - 1)\,. \tag{3}$$

Z (1), (2), (3) plyne

$$n + \frac{s}{2} + \frac{h}{4} = (a - 1)(b - 1)(c - 1) + \\ + (a - 1)(b - 1) + (b - 1)(c - 1) + (c - 1)(a - 1) + \\ + (a - 1) + (b - 1) + (c - 1)\,.$$

Při další úpravě dostaneme

$$n + \frac{s}{2} + \frac{h}{4} = [(a - 1) + 1] \,.\, [(b - 1) + 1] \,.$$
$$.\, [(c - 1) + 1] - 1 =$$
$$= abc - 1 = V - 1\,,$$

neboť pro objem kvádru platí $V = abc$.

C – I – 5

Je-li v délka nejmenší výšky trojúhelníku a P jeho obsah, pak platí

$$v \leqq \sqrt{P\sqrt{3}}\,.$$

Dokažte. Kdy nastane rovnost?

Řešení. Dokazovaná nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$v^2 \leqq P\sqrt{3} \tag{1}$$

nebo také s nerovností

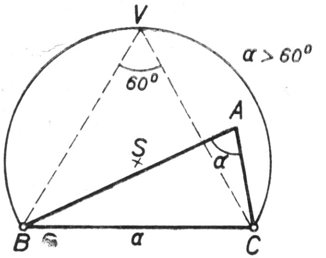
$$v \leqq \frac{1}{2}\,a\sqrt{3}, \tag{2}$$

kde a je strana příslušná k nejmenší výšce v; proto je a největší strana daného trojúhelníku. Proto je dále úhel α ležící proti straně a největší úhel a platí pro něj

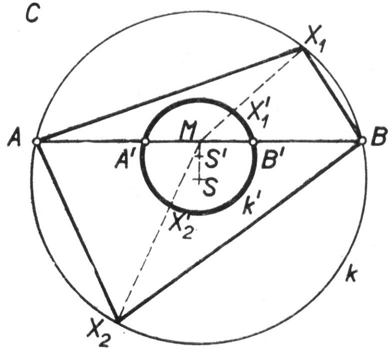
$$\alpha \geqq 60^\circ$$

(v případě $\alpha < 60^\circ$ by platilo také $\beta < 60^\circ$, $\gamma < 60^\circ$; $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$, což je spor.)

Vrchol A ležící proti straně a je uvnitř úseče s tětivou a a obvodovým úhlem velikosti 60° (obr. 13). Největší možná délka nejmenší výšky $\triangle ABC$ je tedy výška rovnostranného



Obr. 13



Obr. 14

trojúhelníku BCV, tj. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Platí tedy (2), (1) i dokazovaná nerovnost. Rovnost nastane jen pro rovnostranný trojúhelník.

C — I — 6

Je dána kružnice k a její tětiva AB. Sestrojte množinu těžišť všech trojúhelníků ABX, kde X je bod kružnice k.

Řešení. Označíme-li M střed tětivy AB (obr. 14), je těžiště X_1' trojúhelníku ABX_1 obraz bodu X_1 ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $\frac{1}{3}$ (těžiště dělí těžnici v poměru 2 : 1). Obrazem kružnice k je kružnice k', která po vyloučení bodů A', B' je hledanou množinou bodů. Kružnici k' sestrojíme pomocí tří bodů: A', B', X_1'.

Z — I — 1

Najděte všechna celá nezáporná čísla n, pro která je podíl

$$1260 : (3n + 1)$$

přirozené číslo.

Řešení. Jde o to, nalézt všechny kladné dělitele čísla 1260, které lze vyjádřit ve tvaru $3n + 1$, tj. dělitele, které při dělení třemi dávají zbytek 1. Předně je to číslo 1 (pro $n = 0$); je-li $n > 0$, je $3n + 1 > 1$ a číslo $3n + 1$ je vytvořeno pomocí prvočinitelů čísla 1260. Vyjádříme tedy číslo 1260 jako součin prvočinitelů

$$1260 = 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7$$

a k jednotlivým prvočinitelům připíšeme zbytky při dělení třemi:

Prvočinitel	2	2	3	3	5	7
Zbytek	2	2	0	0	2	1

Utvoříme ty dělitele čísla 1260, jež nejsou násobky tří, a připíšeme k nim zbytky při dělení třemi (násobek tří nelze totiž napsat ve tvaru $3n + 1$):

Dělitel	2	5	7	2.2	2.5	2.7
Zbytek	2	2	1	1	1	2

Dělitel	5.7	2.2.5	2.2.7	2.5.7	2.2.5.7
Zbytek	2	2	1	1	2

Dostáváme tedy mimo $n = 0$ ještě tato řešení:

$3n + 1$	7	4	10	28	70
n	2	1	3	9	23

Z — I — 2

Domy ve větších obcích bývají označeny nejen popisnými čísly, ale ještě tzv. orientačními čísly, a to takto: V každé ulici jsou označeny domy po jedné její straně po řadě čísly 2, 4, 6, . . . , na druhé straně 1, 3, 5, ... Kolik domů má ulice, jestliže na každé její straně je právě n domů, jejichž orientační číslo obsahuje aspoň jednu číslici 4. Úlohu řešte pro a) $n = 6$, b) $n = 9$.

Řešení. a) $n = 6$. Na straně sudých čísel jsou „čtyřkové" domy

$$4, 14, 24, 34, 40, 42\,.$$

Na straně lichých čísel jsou „čtyřkové" domy

$$41, 43, 45, 47, 49, 141\,.$$

Na obou stranách je tedy $21 + 71 = 92$ domů.

b) $n = 9$. Na straně sudých čísel jsou „čtyřkové" domy

$$4, 14, 24, 34, 40, 42, 44, 46, 48 .$$

Dům č. 48 však nemusí být poslední, za ním může být ještě dům č. 50 a případně č. 52.

Na straně lichých čísel jsou „čtyřkové" domy

$$41, 43, 45, 47, 49, 141, 143, 145, 147 .$$

Na obou stranách je tedy $24 + 74 = 98$ domů nebo $25 + 74 = 99$ domů nebo $26 + 74 = 100$ domů.

Z — I — 3

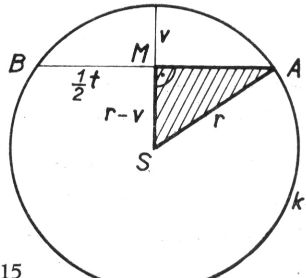
Kruhová úseč je omezena obloukem a tětivou kružnice.

a) Vyjádřete délku tětivy pomocí poloměru kružnice r a pomocí vzdálenosti středu oblouku od tětivy (tzv. výšky úseče).

b) Sestrojte úseč, jejíž tětiva má délku rovnou její výšce.

Řešení (obr. 15). Podle Pythagorovy věty pro $\triangle AMS$ (M je střed tětivy AB) platí

$$r^2 = \frac{1}{4} t^2 + (r - v)^2 .$$



Obr. 15

Po úpravě

$$t = 2\sqrt{v(2r - v)}\,. \qquad (1)$$

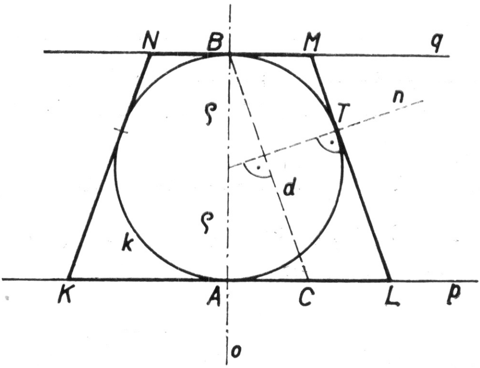
Dosadíme-li do vzorce (1) $t = v$, dostaneme po úpravě

$$v = \frac{8}{5} r\,. \qquad (2)$$

Pomocí vzorce (2) provedeme konstrukci.

Z – I – 4

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $KLMN$, kterému



Obr. 16

lze vepsat kružnici, je-li dána délka d jeho ramene a poloměr ϱ vepsané kružnice. Určete podmínku řešitelnosti.

Řešení (obr. 16). Úkolem je sestrojit ke kružnici k o poloměru ϱ dvě rovnoběžné tečny, v nichž budou ležet základny hledaného lichoběžníku, a pak určit směry jeho ramen. Rovnoběžné tečny ke kružnici k označme p, q

a požadujme, aby větší základna lichoběžníku ležela v přímce p. Označme A, B body dotyku přímek p, q s kružnicí k ($A \in p$, $B \in q$). Zvolíme jednu z polorovin určených přímkou AB a v ní na přímce p sestrojíme takový bod C, že $BC = d$. Přímkou BC je pak určen směr jednoho z ramen hledaného lichoběžníku. Toto rameno prochází průsečíkem T kružnice k a kolmice n spuštěné z bodu S na BC. Druhé rameno lichoběžníku sestrojíme pomocí symetrie podle osy $o = AB$.

Podmínka řešitelnosti je zřejmě

$$2\varrho < d\,.$$