26. ročník matematické olympiády

VII. Korešpondenčný seminár MO v školskom roku 1976/77

In: Jan Vyšín (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); Lev Bukovský (editor): 26. ročník matematické olympiády. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 149–166.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404690

VII. Korešpondenčný seminár MO v školskom roku 1976/77

Vychádzajúc z dobrých skúseností, ktoré sa získali organizovaním prvých dvoch korešpondenčných seminárov (1974/75 a 1975/76), rozhodlo PÚVMO uskutočniť v škol. roku 1976/77 už tretí ročník tejto formy práce s talentovanými žiakmi s tým, aby sa v ňom využili všetky pozitívne poznatky z predchádzajúcich dvoch ročníkov. Návrh účastníkov predložil podpredseda ÚVMO *doc. dr. J. Moravčík, CSc.*, na základe výsledkov XXV. ročníka MO. Návrh vychádzal z predpokladu, že v Prahe a v Bratislave sa bude konať celomestský seminár, ktorého účastníci budú dostávať úlohy korešpondenčného seminára ako domáce práce. Preto boli do korešpondenčného seminára vybraní len účastníci z ostatných krajov ČSSR v tomto počte: Stredočeský 5, Juhočeský 3, Západočeský 1, Severočeský 2, Východočeský 3, Juhomoravský 2, Severomoravský 9, Západoslovenský 2, Stredoslovenský 9 a Východoslovenský 2 — celkom 38.

Pre seminár boli vybrané tieto tematické okruhy úloh:

Kombinatorika — po prvý raz bol vyskúšaný trojetapový súbor 30 úloh, ktoré boli rozosielané po 10 úlohách na jeden mesiac od náročnejších k menej náročným úlohám návodného charakteru. Súbor 30 úloh z kombinatoriky zostavil, riešenia opravil a zhodnotil *dr. M. Koman, CSc.*, z Pedagogickej fakulty UK v Prahe. Tento experiment sa celkove osvedčil, ale bol značne náročný na čas a prácu zostavovateľa a hodnotiteľa. Riešenia tohto súboru, resp. jeho jednotlivých častí, zaslalo 28 riešiteľov a bolo treba zhodnotiť a komentovať 247 riešení.

Algebra — súbor 7 úloh vybral, riešenia opravil, zhodnotil a komentoval *dr. M. Šisler, CSc.*, ktorý korigoval celkom 114 riešení od 21 riešiteľov.

Školská teória čísel — súbor 8 úloh, ktorý zostavil a riešenia hodnotil odb. asist. *M. Kaukič* z VŠD v Žiline. Celkom korigoval 97 riešení od 19 riešiteľov.

Postupnosti a rady — súbor 8 úloh vybral, korigoval a poznámkami pre riešiteľov opatril *dr. J. Kubát*, prof. gymnázia v Pardubiciach. Korigoval celkom 109 riešení od 18 riešiteľov.

Z 38 vybraných riešiteľov sa seminára zúčastnilo zasielaním svojich riešení celkom 28 riešiteľov z týchto krajov: Stredočeský 3, Severočeský 2, Západočeský 1, Juhočeský 3, Východočeský 2, Severomoravský 9, Juhomoravský 1, Západoslovenský 1, Stredoslovenský 5, Východoslovenský 1.

Po zhodnotení riešení všetkých tematických celkov možno za najúspešnejších považovať nasledujúcich účastníkov korešpondenčného seminára: *Hájek*, G Bílovec — 37 riešení (z celkového počtu 53 úloh), *Navrátil*, G Olomouc 34, *Gurka*, G Bílovec 33, *Kalousek*, G Jablonec n. N. 31, *Tas*, G Bílovec 31, *Hančl*, G Bílovec 31, *Čadek*, G Brno 29, *Kolařík*, G Bílovec 29, *Trnka*, G Tábor 26, *Petrák*, G Ostrava 26, *Kratochvíl*, G Pardubice 25, *Turek*, G Hradec Králové 25, *Koukol*, G Sušice 21, *Štěpka*, G Bílovec 21, *Quittner*, G Prievidza 20.

Z vyššie uvedených žiakov šesť — Navrátil, Kalousek, Čadek, Kratochvíl, Turek, Quittner — päť boli členmi osemčlenného družstva ČSSR na XIX. MMO v Belehrade. Z nich 5 získalo ceny a Kratochvílovi, ktorý sa stal absolútnym víťazom XXVI. ročníka MO, chýbal k získaniu 3. ceny na XIX. MMO len jediný bod. Treba ešte dodať, že aj siedmy člen družstva na XIX. MMO — Takáč — riešil korešpondenčný seminár, ale len 10 úloh prvej témy. Možno i to bolo príčinou, že hoci na XVIII. MMO získal 3. cenu, na XIX. MMO neuspel a získal len 3 body. Ukazuje sa totiž takmer priama závislosť výsledkov v korešpondenčnom seminári a na MMO. Z tohto hľadiska možno povedať, že korešpondenčný seminár pozitívne ovplyvňuje prípravu nášho družstva na MMO. Vzhľadom na túto skutočnosť mieni PÚVMO pokračovať vo využívaní tejto formy prípravy pre MMO aj v nasledujúcom školskom roku.

Pre informáciu čitateľov uvádzame teraz všetky úlohy, ktoré dostali na riešenie účastníci korešpondenčného seminára 1976/77.

Kombinatorika (zostavil *RNDr. M. Koman, CSc.*):

1.1. Kocka s hranou k (k je celé kladné číslo) je rozdelená na k^3 jednotkových kociek. Zistite, či možno všetky jednotkové kocky zafarbiť červenou a modrou farbou tak, aby vždy každá kocka susedila práve s dvoma ďalšími kockami tej istej farby. (Kocky sú susedné, ak majú spoločnú stenu.)

1.2. V nekonečnej sieti zhodných štvorcov je zafarbených práve n štvorcov čiernou farbou, ostatné sú biele. To je tzv. nultá generácia. Z k-tej generácie ($k = 0, 1, 2, \ldots$) vznikne $(k + 1)$-tá generácia týmto prefarbením: Každý štvorec $[a, b]$ (a je číslo stĺpca, b číslo riadku, v ktorom štvorec leží) z $(k + 1)$-tej generácie má rovnakú farbu ako väčšina zo štvorcov $[a, b]$, $[a + 1, b]$, $[a, b + 1]$ v k-tej generácii.

a) Dokážte, že v istej generácii zostanú len biele štvorce.

b) Dokážte, že v n-tej generácii sú vždy všetky štvorce biele.

c) Charakterizujte všetky nulté generácie s n čiernymi štvorcami, pre ktoré je n-tá generácia prvej generácie so všetkými štvorcami bielymi.

1.3. Hra. Na stole je daných N gúľ, z ktorých je a bielych, b červených a c modrých ($N = a + b + c$). Ťahom rozumieme túto výmenu: Zvolíme ľubovoľné 2 gule rôznych farieb, ktoré vymeníme za jedinú guľu zostávajúcej farby. (Napríklad pre $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$ môžeme zvoliť guľu bielu a modrú, ktoré odstránime a namiesto nich pridáme červenú guľu. Vznikne nová pozícia $a_1 = 2$, $b_1 = 6$, $c_1 = 7$.) Partia končí, keď už nemožno vykonať žiadnu výmenu.

a) Dokážte, že vo všetkých partiách, ktoré končia tým, že na stole zostane jediná guľa, má táto guľa vždy rovnakú farbu.

b) Určte farbu poslednej gule v závislosti na číslach N, a, b, c.

1.4. Vrcholy pravidelného N-uholníka ($N > 3$) sú ohodnotené číslami $+1$ a -1. (Každému vrcholu je priradené práve jedno z týchto čísel.) Cieľom je určiť súčin všetkých ohodnotení. Je dovolené klásť otázky: Čomu sa rovná súčin ohodnotení zvolených m vrcholov ($N \geq 2m$).

Určte najmenší možný počet P otázok, ktorý dovoľuje určiť hľadaný súčin všetkých ohodnotení.

1.5. Na množine všetkých postupností zložených z 3000 cifier, z ktorých každá je 1 alebo 2, sú dovolené výmeny ľubovoľných dvoch za sebou nasledujúcich trojíc. Napr. postupnosť

$$112\ \underline{122}\ \overline{212}\ 11\ldots.$$

možno zmeniť na postupnosť novú

$$112\ \overline{212}\ \underline{122}\ 11\ldots\ldots.$$

Dve postupnosti nazveme ekvivalentnými, ak jednu možno konečným počtom dovolených výmen zmeniť na druhú.

Určte počet všetkých neekvivalentných postupností.

1.6. Dokážte, že v nekonečnom desatinnom rozvoji Ludolfovho čísla π možno pre každé prirodzené číslo n nesúdeliteľné s číslom 10 nájsť aspoň jeden taký úsek, že prirodzené číslo zapísané v danom poradí číslicami z tohto úseku je deliteľné číslom n.

Napr. pre $n = 17$ je jeden taký úsek v zápise čísla

$$3,\ 141\ 5\underline{92\ 65}3\ldots$$

podčiarknutý.

1.7. Medzi všetkými n-cifernými číslami ($n \geqq 2$), v ktorých zápise se nevyskytuje nula, určte také číslo, aby rozdiel tohto čísla a jeho ciferného súčinu bol čo najväčší.

1.8. Je daný ľubovoľný mnohočlen k-teho stupňa

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \tag{1}$$

s nezápornými celočíselnými koeficientami $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Postupnosť funkčných hodnôt mnohočlena (1) pre $n = 0, 1, 2, \ldots$ označíme

$$A_0, A_1, A_2, \ldots . \qquad (2)$$

Postupnosť ciferných súčtov všetkých členov postupnosti (2) označíme

$$C_0, C_1, C_2, \ldots . \qquad (3)$$

Dokážte, že v postupnosti (3) existuje nekonečne mnoho sebe rovných členov.

1.9. Na množine všetkých nezáporných celých čísel je daná operácia „·", ktorá má pre všetky a, b, c nasledujúce vlastnosti:

$$a \cdot b = b \cdot c; \qquad (1)$$

$$a \cdot b = c \Rightarrow b \cdot c = a; \qquad (2)$$

$$a \cdot b > c \Rightarrow b \cdot c < a \text{ alebo } a \cdot c < b. \qquad (3)$$

a) Určte hodnoty $0 \cdot 0$; $0 \cdot 1$; $1 \cdot 1$; $0 \cdot 2$.

b) Dokážte, že pre všetky a platí: $0 \cdot a = a$; $1 \cdot a = a + 1$ pre párne a; $1 \cdot a = a - 1$ pre nepárne a.

c) Dokážte, že pre všetky a, b, c platí:

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c.$$

d) Určte všetky hodnoty $a \cdot b$ pre $a \leqq 7$, $b \leqq 7$.

e) Ukážte, že existuje najviac jedna operácia s vlastnosťami (1) — (3).

f) Ukážte, že taká operácia existuje, a udajte predpis pre výpočet ľubovoľnej hodnoty $a \cdot b$. Špeciálne vypočítajte $1976 \cdot 366$.

g) Dokážte, že operácia „·" je grupovou operáciou na množine všetkých nezáporných celých čísel.

1.10. Je daná ľubovoľná funkcia $y = F(x)$ definovaná pre všetky reálne čísla. Dokážte, že možno určiť také dve funkcie $y = f(x)$ a $y = g(x)$, že

a) $F(x) = f(x) + g(x)$ pre všetky x;

b) graf každej z funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ je stredove súmerný. (Stredy súmernosti oboch grafov môžu byť rôzne.)

2.1. Zafarbenie vyhovujúce vlastnostiam z úlohy 1.1 možno uskutočniť práve vtedy, keď je k párne číslo. Dokážte.

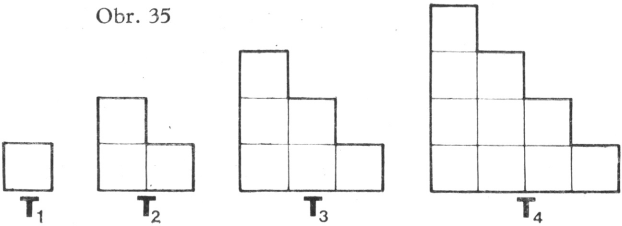
2.2. Nech všetky čierne štvorce nultej generácie (pozri úlohu 1.2) možno pokryť obrazcom T_m (pozri obr. 35; obrazce možno v sieti štvorcov ľubovoľne posúvať, ale nemožno ich otáčať).

Potom v m-tej generácii sú všetky štvorce biele. Dokážte.

2.3. a) Dokážte tvrdenie z úlohy 1.3 a) matematickou indukciou.

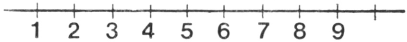
b) Vyhľadajte pre všetky $N \leqq 8$ všetky východiskové trojice a, b, c, pre ktoré partie končiace jedinou guľou dávajú bielu guľu.

Obr. 35



2.4. Riešte úlohu 1.4 pre prípad $m = 3$. Dokážte, že v tomto prípade je výsledok: $n = 3k \Rightarrow P = k$; $n = 3k + 1 \Rightarrow P = k + 1$, $n = 3k + 2 \Rightarrow P = k + 2$. (Napr. pre $n = 3k$ musíte dokázať: $P \leqq k$ a $P \geqq k$.)

2.5. Je daná postupnosť 3000 bodov (napr. obrazy čísel 1, 2, 3, ..., 3000 na číselnej osi; obr. 36).



Obr. 36

Obr. 37

Na tejto postupnosti je dovolená operácia výmeny ľubovoľných dvoch za sebou nasledujúcich trojíc bodov. Napr. z vyššie uvedenej postupnosti môžeme získať postupnosť na obr. 37.

Určte množinu všetkých bodov danej postupnosti, s ktorými možno stotožniť povolenými výmenami ľubovoľne zvolený bod. (Kam možno napr. presunúť z východzieho postavenia bod 7?)

2.6. Z číslic 0, 1, 2, ..., 9 je zostavená ľubovoľná nekonečná postupnosť.

$$a_1, a_2, a_3, \dots . \tag{1}$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n nesúdeliteľné s číslom 10 možno nájsť v postupnosti (1) taký úsek

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+m},$$

že prirodzené číslo zapísané týmito číslicami v uvedenom poradí je deliteľné číslom n.

2.7. Rozdiel čísla N a jeho ciferného súčinu označme $r(N)$. Sú dané dve päťciferné čísla $A = 999\,11$, $B = 777\,99$. Určte čísla $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ tak, aby boli splnené podmienky:

a) $C_0 = B$, $C_5 = A$;

b) dvojice susedných čísel C_i, C_{i+1} ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) sa líšia len v jednej číslici;

c) $r(C_0) \leqq r(C_1) \leqq r(C_2) \leqq r(C_3) \leqq r(C_4) \leqq r(C_5)$.

2.8. Ciferný súčet čísla

a) $13n + 24$;

b) $2n^2 + 13n + 124$

označíme $C_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Dokážte, že medzi číslami

$$C_0\,, C_1\,, C_2\,, \ldots \tag{4}$$

možno nájsť nekonečne mnoho čísel, ktoré sa sebe rovnajú.

2.9. Ak operácia „$\cdot$" má vlastnosti (1) — (3) z úlohy 1.9, potom pre všetky kladné a, b platí

$$a \cdot b = c\,,$$

kde c je najmenšie nezáporné číslo, ktoré sa nevyskytuje medzi číslami

$$0 \cdot b\,, 1 \cdot b\,, 2 \cdot b\,, \ldots, (a - 1) \cdot b\,,$$

$$a \cdot 0\,, a \cdot 1\,, a \cdot 2\,, \ldots, a \cdot (b - 1)\,;$$

dokážte. Dokážte, že obe nerovnosti $a \cdot b > c$, $a \cdot b < c$ vedú k sporu.

2.10. Ukážte, že funkciu $y = |x|$ možno vyjadriť ako súčet dvoch funkcií $y = f(x)$, $y = g(x)$ tak, že každá z funkcií f a g má graf stredove súmerný.

3.1. Ak zafarbenie danej vlastnosti (pozri úlohu 1.1) existuje, potom modrých a červených kociek je párny počet. Dokážte.

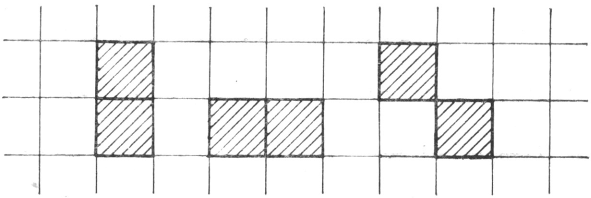
3.2. V nekonečnej sieti štvorcov (pozri úlohu 1.2) nazveme dva štvorce susednými práve vtedy, ak nastane niektorá z možností na obr. 38.

Množinu $\mathbf{M}$ všetkých čiernych štvorcov nultej generácie rozdelíme na komponenty $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, ... tejto vlastnosti: Dva štvorce A, $B \in \mathbf{M}$ patria tomu istému komponentu práve vtedy, ak možno dôjsť od jedného k druhému postupným prechodom po susedných poliach. Napr. na obr. 39 sa množina čiernych štvorcov rozpadne na tri komponenty.

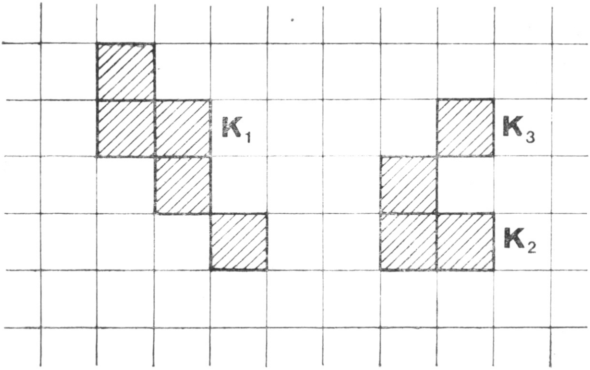
Dokážte: Ak množina $\mathbf{M}$ obsahujúca n štvorcov sa skladá z jedného komponentu, ktorý nemožno pokryť žiadnym z obrazcov $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ (pozri úlohu 2.2), potom sa v n-tej generácii po prvý raz vyskytnú samé biele štvorce.

3.3. Dokážte (pozri úlohu 1.3):

a) Ak je N párne číslo, potom sú buď všetky a, b, c párne, alebo len jedno párne. V prvom prípade partia nemôže končiť jedinou guľou. V druhom prípade je farba



Obr. 38



Obr. 39

výslednej gule rovnaká ako farba gulí, ktorých je párny počet.

b) Ak je N nepárne číslo, potom sú buď všetky čísla a, b, c nepárne, alebo len jedno je nepárne. V prvom prípade partia nemôže končiť jedinou guľou. V druhom prípade je farba výslednej gule zhodná s farbou gulí, ktorých je nepárny počet.

3.4. Dokážte, že výsledok úlohy 1.4 je tento: Nech $N = m \cdot d + r$, $0 \leqq r < m$. Ak je m nepárne číslo, potom $r = 0 \Rightarrow P = d$; $r \neq 0$, r párne $\Rightarrow P = d + 2$; r nepárne $\Rightarrow P = d + 1$.

Ak je m párne číslo, potom $r = 0 \Rightarrow P = d$; $r \neq 0$, r párne $\Rightarrow P = d + 1$, r nepárne číslo $\Rightarrow P$ neexistuje.

3.5. Dokážte: Nech $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sú dve n-členné ($n \geqq 1$) postupnosti číslic 1 a 2. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby postupnosti α, β boli ekvivalentné (pozri úlohu 1.5), je splnenie týchto podmienok:

$$a_1 + a_4 + a_7 + \ldots = b_1 + b_4 + b_7 + \ldots,$$
$$a_2 + a_5 + a_8 + \ldots = b_2 + b_5 + b_8 + \ldots,$$
$$a_3 + a_6 + a_9 + \ldots = b_3 + b_6 + b_9 + \ldots.$$

3.6. Z číslic 0, 1, 2, ..., 9 je zostavená ľubovoľná postupnosť

$$a_1, a_2, a_3, \ldots. \tag{1}$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n možno nájsť medzi $n + 1$ číslami zapísanými v uvedenom poradí číslicami $a_1a_2a_3a_4 \ldots a_{n+1}$, $a_2a_3a_4 \ldots a_{n+1}$, $a_3a_4 \ldots a_{n+1}$, atď., a_{n+1} aspoň dve, ktoré pri delení číslom n dávajú ten istý zvyšok.

3.7. Hľadané číslo (pozri úlohu 1.7) má tvar

$$A = 999 \ldots 9\,111 \ldots 1.$$

Určte počet deviatok a počet jedničiek a ukážte, že $r(A)$ (pozri úlohu 2.7) je najväčšie možné číslo, tj. pre ľubovoľné n-ciferné číslo B, v ktorého dekadickom zápise

$$B = b_nb_{n-1} \ldots b_3b_2b_1$$

nie sú žiadne nuly a $B \neq A$, je $r(A) > r(B)$. Dokážte! (Použite napr. postup naznačený v úlohe 2.7.).

3.8. Dve čísla M, N nazveme podobnými, ak po vyškrtnutí núl v dekadických zápisoch oboch čísel dostaneme to isté číslo. (Napr. 3 074, 3 700 40 sú podobné čísla.)

Dokážte, že medzi funkčnými hodnotami mnohočlenov

a) $13n + 24$;

b) $2n^2 + 13n + 124$

pre $n = 0, 1, 2, \ldots$ je nekonečne mnoho navzájom podobných čísel.

3.9. Zostavte si tabuľku operácie „·" pre všetky $a \leqq 7$, $b \leqq 7$ použitím výsledku úlohy 2.9. Všetky čísla v tejto tabuľke vyjadrite v dvojkovej sústave. Vyjde napr.

$$3 \cdot 5 = 6 \text{ čiže } (11)_2 \cdot (101)_2 = (110)_2 .$$

Na základe tabuľky vyslovte hypotézu o možnosti výpočtu hodnoty $c = a \cdot b$, ak sú a, b vyjadrené v dvojkovej sústave. Hypotézu dokážte.

3.10. Ukážte, že funkciu $y = |x|$ možno vyjadriť ako súčet dvoch funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ tak, že

a) graf funkcie f je stredove súmerný podľa bodu $[0,0]$ a graf funkcie g je stredove súmerný podľa bodu $[1,0]$.

b) Pre $x \in \langle 0,1 \rangle$ je $f(x) = |x|$ a $g(x) = 0$.

Načrtnite grafy funkcií f a g v intervale $\langle -3,3 \rangle$.

Algebra (zostavil *RNDr. M. Šisler, CSc.*):

1. Riešte rovnicu

$$\frac{a_1 - a_2}{(x - a_1)(x - a_2)} + \frac{a_2 - a_3}{(x - a_2)(x - a_3)} + \ldots +$$

$$+ \frac{a_n - a_1}{(x - a_n)(x - a_1)} = x ,$$

kde $a_1 a_2 \ldots a_n \neq 0$.

2. Pre ktoré celé čísla x a y platí $x(y^2 + 1) + y^2 = (x + y)^2$?

3. Nech z_i sú komplexné čísla, $|z_i| \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n$. Potom

$$\left| \prod_{i=1}^{n} z_i - 1 \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i - 1| ;$$

dokážte.

4. Nájdite všetky hodnoty parametra p, pre ktorý platí nerovnosť

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz \geq p(x^2 + y^2 + z^2)$$

pre všetky x, y, z.

5. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať koeficient a v rovnici

$$x^3 - ax^2 + bx - 8 = 0 ,$$

aby všetky korene tejto rovnice boli kladné?

6. Ukážte, že rovnica

$$1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \ldots + \frac{1}{n} x^n = 0$$

nemá pre párne n žiadny reálny koreň.

7. Nech z je komplexný koreň rovnice $x^3 + 3 = 0$, w koreň rovnice $x^2 + x + 1 = 0$. Nech $\mathbf{Q}(z) = \{az + b | a, b \in \mathbf{Q}\}$, $\mathbf{Q}(w) = \{aw + b | a, b \in \mathbf{Q}\}$, kde $\mathbf{Q}$ je množina racionálnych čísel. Ukážte, že existujú práve dve zobrazenia T množiny $\mathbf{Q}(z)$ na množinu $\mathbf{Q}(w)$ také, že platí: a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$,

b) $T(xy) = T(x)T(y)$ pre ľubovoľné $x, y \in \mathbf{Q}(z)$,

c) existuje aspoň jedno číslo $a \in \mathbf{Q}$ tak, že $T(a) \neq 0$.

Školská teória čísel (zostavil *M. Kaukič*):

1. Je daná rovnica

$$x^2 - ny^2 = 1 , \tag{1}$$

kde n je prirodzené číslo.

a) Rovnica (1) je riešiteľná v obore prirodzených čísel; dokážte.

b) Ak usporiadaná dvojica (x_0 , y_0) prirodzených čísel vyhovuje rovnici (1) a neexistuje také prirodzené $\bar{x} < x_0$, že pre niektoré prirodzené $\bar{y}$ je $(\bar{x} , \bar{y})$ riešením rovnice (1), potom všetky riešenia v prirodzených číslach rovnice (1) sa dajú určiť zo vzťahu

$$x + y\sqrt{n} = (x_0 + y_0\sqrt{n})^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots ,$$

a to porovnaním „racionálnej" a „iracionálnej" časti oboch strán poslednej rovnosti. Dokážte.

2. Nech $f_0(x) = \dfrac{x}{2}$, $f_1(x) = 3x + 1$ sú funkcie definované na množine všetkých reálnych čísel. Reťazcom čísla x nazveme každú konečnú postupnosť

$$a_0 = x , a_1 = f_{i_1}(x) , \quad a_2 = f_{i_2}(f_{i_1}(x)), \ldots ,$$
$$a_k = f_{i_k}(f_{i_{k-1}}(\ldots (f_{i_2}(f_{i_1}(x) \ldots)$$

kde $i_m \in \{0, 1\}$ pre $m = 1, 2, \ldots , k$, pričom v postupnosti $i_1, i_2, \ldots , i_k$ nie sú nikde za sebou dve jedničky.

Ak sú čísla a_0, a_k prirodzené, potom všetky čísla v reťazci čísla x sú prirodzené. Dokážte.

3. Nech n je prirodzené číslo. Binomické koeficienty $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots , n$ sú všetky nepárne práve vtedy, keď $n = 2^m - 1$, kde m je prirodzené číslo; dokážte.

4. Pokúste sa nájsť netriviálne postačujúce podmienky pre to, aby v postupnosti prirodzených čísel $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ k ľubovoľnej usporiadanej skupine dekadických cifier existoval člen v_n taký, že jeho dekadický zápis začína zvolenou skupinou cifier.

5. Vo vrcholoch pravidelného šesťuholníka sú napísané celé čísla $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ také, že ich súčet sa rovná nule. Prenosom nazveme odčítanie jedničky od čísla stojaceho v niektorom vrchole a jej pričítanie k číslu stojacemu v niektorom zo susedných vrcholov. Aký minimálny počet prenosov treba urobiť, aby čísla vo všetkých vrcholoch šesťuholníka boli rovné nule?

6. Existujú také prirodzené čísla x, y, aby $x^2 + y$ aj $x + y^2$ boli druhými mocninami prirodzených čísel?

7. Všetky prirodzené čísla m, pre ktoré je číslo $m^m + 1$ deliteľné číslom 30, tvoria aritmetickú postupnosť; dokážte. Nájdite túto postupnosť.

8. Na každej z 20 kartičiek je napísaná práve jedna z cifier od 0 do 9 tak, že každá z cifier sa vyskytuje práve na dvoch kartičkách.

Rozhodnite, či tieto kartičky možno usporiadať do radu tak, aby kartičky s nulami boli vedľa seba, medzi kartičkami s jednotkou bola práve jedna kartička, medzi kartičkami s dvojkou práve dve kartičky, atď., až medzi kartičkami s deviatkou bolo práve 9 kartičiek.

Postupnosti a rady (zostavil *RNDr. J. Kubát*):

1. Je daná postupnosť:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+2} - n^2 a_n = 0.$$

Vyjadrite n-tý člen postupnosti.

2. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická postupnosť s diferenciou d. Potom

$$a_0a_1a_2\ldots a_{k-1} + a_1a_2a_3\ldots a_k + a_na_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k-1} =$$

$$= a_0a_1a_2\ldots a_k + \frac{a_na_{n+1}\ldots a_{n+k} - a_0a_1\ldots a_k}{(k+1)d};$$

dokážte.

3. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú korene rovnice

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0\,.$$

Vypočítajte hodnotu súčtu

$$\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n - 1}\,.$$

4. Ak označíme $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, potom platí $n\,.\,S_k(n) = S_{k+1}(n) + S_k(n-1) + \ldots + S_k(2) +$
$+ S_k(1)$;
dokážte.

5. Vypočítajte súčet:

a) $S_n = 1\,.\,x + 2\,.\,x^2 + 3\,.\,x^3 + \ldots + n\,.\,x^n$;

b) $S_n = 1 + 4\,.\,x + 9\,.\,x^2 \ldots + n^2\,.\,x^{n-1}$.

6. Postupnosť $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ je určená rekurentne takto:

$$u_0 = 2,\ u_1 = \frac{5}{2},\quad u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - \frac{5}{2}\,.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$[u_n] = 2\,\frac{2^n - (-1)^n}{3}\,.$$

(*Poznámka.* Symbol $[c]$ znamená celú časť čísla c.)

7. Fibonacciho postupnosť $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$ je rekurentne definovaná takto: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Ak uvažujeme o ľubovoľných štyroch za sebou idúcich členoch Fibonacciho postupnosti, pričom budeme považovať súčin krajných členov a dvojnásobok súčinu stredných členov za dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka, potom bude dĺžka jeho prepony jedným z členov tejto postupnosti; dokážte.

8. Dokážte, že pre n-tý člen Fibonacciho postupnosti platí:

$$a_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-k-1}{k}.$$