27. ročník matematické olympiády

Predhovor

In: Jan Vyšín (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor); Jozef Moravčík (editor): 27. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1977-1978. 20. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 3–6.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404697

Predhovor

Milí mladí priatelia,

dostávate do rúk správu o priebehu a výsledkoch už 27. ročníka matematickej olympiády. V knižke nájdete prípravné i súťažné úlohy jednotlivých kategórií i s riešeniami. Po stránke obsahu a náročnosti úloh sme sa usilovali zvlášť v kategórii Z reagovať na skutočnosť, že ťažisko počtu účastníkov tejto kategórie sa postupne presúva do 8. ročníka ZDŠ v súvislosti s uskutočňovaním Projektu ďalšieho rozvoja československej výchovnovzdelávacej sústavy.

Ukončeným 27. ročníkom patrí naša MO k najstarším žiackym súťažiam v riešení matematických úloh na svete. Ak nepočítame súťaže organizované redakciami žiackych časopisov (a aj medzi tými súťaž v Rozhledoch má úctyhodnú tradíciu), vyjde nám, že staršie než naša MO sú len súťaže v Maďarsku (od r. 1894), matematické olympiády v niektorých oblastiach ZSSR (Moskva, Leningrad — od r. 1934), v Poľsku (od r. 1949), v Bulharsku (od r. 1950) a v určitom zmysle v USA (súťaž Mathematical Association of America sa koná od r. 1949). Matematické olympiády v ostatných krajinách vznikali postupne takto: 1953 — Rumunsko, 1960 — RSFSR, 1961 — NDR, Švédsko, 1962 — Holandsko, Lucembursko, Juhoslávia, Kuba, 1964 — Španielsko, 1965 — Veľká Británia, 1966 — Taliansko, Juhoafrická republika, 1967 — všezväzová MO v ZSSR, 1969 — Kanada, 1970 — Rakúsko, 1971 — NSR, 1972 — USA, 1976 — Belgicko. Francúzska súťaž „Concours général", ktorá má taktiež mnohoročnú tradíciu, je súťažou odlišného charakteru.

Takmer všetky krajiny, ktoré sme tu spomenuli, vysielajú v posledných rokoch svoje družstvá na medzinárodnú matematickú olympiádu. Jubilejná — dvadsiata — sa konala v júli 1978 v zemi, ktorá sa stala pred 20 rokmi iniciátorom tohto ušľachtilého medzinárodného zápolenia matematických talentov — v Rumunsku. V knižke nájdete okrem podrobnej správy o súťaži XX. MMO a zvlášť o účasti československého družstva zloženého z víťazov 27. ročníka MO aj úlohy tejto súťaže a ich riešenia. Osmička našich reprezentantov patrila tentoraz medzi najúspešnejších nielen v súťaži jednotlivcov, ale 5. miestom veľmi príjemne prekvapila taktiež v neoficiálnej súťaži 17 družstiev. Je to výsledok systematickej práce v riešení úloh v rámci krúžkov MO, sústredení i korešpondenčného seminára, ktorý za štyri roky svojej existencie aj napriek niektorým nedostatkom preukázal svoju životnosť.

Veríme, že na tento úspech budú nadväzovať naše družstvá aj na budúcich MMO, najmä ak budeme naďalej intenzívne rozvíjať osvedčené formy práce s matematicky nadanými žiakmi a racionálne využívať zahraničné skúsenosti. Účastníkom nasledujúcich ročníkov MO doporučujeme siahnuť nielen po doteraz vydaných ročenkách a zbierkach riešených úloh MO, po zväzkoch edície Škola mladých matematikov, ale aj po zbierkach úloh z MMO a výberoch najkrajších a najzaujímavejších úloh z národných MO, ktoré začali systematicky vydávať v ZSSR a ktoré sa prostredníctvom Sovietskej knihy dostávajú aj ku nám. Tak sa najlepšie pripravia nielen na úspešnú účasť v MO, poprípade v MMO, ale predovšetkým na úspešné vysokoškolské štúdium matematiky, fyziky a technických vied, v ktorých potreba kvalifikovaných odborníkov v období intenzívneho vedecko-technického rozvoja neustále rastie.

Aby ste mali predstavu o úlohách riešených v zahraničných MO, ponúkame vám na ukážku niekoľko úloh z MO v zemi, ktorá bola organizátorom XX. MMO:

1. Je možné, aby dva pravouhlé trojuholníky, ktoré majú rovnakých 5 prvkov (strany, uhly), neboli zhodné?
2. a) Je daný štvorec so stranou dĺžky 1. Ukážte, že medzi jeho ľubovoľnými 5 vnútornými bodmi existujú aspoň dva také, ktorých vzdialenosť je menšia než $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   b) Platí analogická vlastnosť pre pravidelný šesťuholník so stranou jednotkovej dĺžky?
3. Sú dané komplexné čísla $z_1 = \frac{1 + im}{1 - im}$, $z_2 = \frac{m + i}{m - i}$, $m \in \mathbf{R}$.

a) Ukážte, že obrazy čísel z_1, z_2 ležia na tej istej kružnici so stredom v začiatku súradnicovej sústavy.

b) Označte $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ čísla komplexne združená k z_1, z_2. Dokážte, že pre každé celé n platí:

$$z_1^{2n} + z_2^{2n} = \bar{z}_1^{2n} + \bar{z}_2^{2n} .$$

4. Ukážte, že $x = 3$ je jediným reálnym koreňom rovnice

$$3^x + 4^x + 5^x = 6^x .$$

5. Nech $\mathbf{Q}[x]$ je množina všetkých mnohočlenov s racionálnymi koeficientami a $g \in \mathbf{Q}[x]$. Ukážte, že ak $g(1 + x^2)$ je mnohočlen identicky nulový, potom rovnakú vlastnosť má aj mnohočlen $g(x)$.

Skúste tieto úlohy vyriešiť, a ak sa vám to podarí, pokúste sa aj o úspech pri úlohách korešpondenčného seminára, ktoré sú v knižke publikované a boli vybrané väčšinou taktiež zo zahraničných prameňov.

Budeme radi, ak nám napíšete o svojich úspechoch i nezdaroch pri riešení týchto úloh i o svojich pripomienkach k obsahu a spracovaniu tejto knižky.

Ústredný výbor matematickej olympiády
115 67 Praha 1-Nové Město
Žitná 25