27. ročník matematické olympiády

IV. Soutěžní úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor); Jozef Moravčík (editor): 27. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1977-1978. 20. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 91–113.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404702

KATEGÓRIA A

A – II – 1

Nájdite všetky n-tice reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktoré vyhovujú rovniciam

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\,, \tag{1}$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 = 1\,. \tag{2}$$

Riešenie. Čísla x_i^2 sú zrejme nezáporné. Z rovnosti (1) potom vyplýva

$$0 \leqq x_i^2 \leqq 1\,.$$

Keby pre niektoré $j = 1, 2, \ldots, n$ platilo

$$0 < x_j^2 < 1\,,$$

tak potom $x_j^4 < x_j^2$. Keďže pre každé $i = 1, \ldots, n$ platí $0 \leqq x_i^4 \leqq x_i^2$, tak

$$x_1^4 + \ldots + x_n^4 < x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\,,$$

čo je spor s rovnosťou (2).

Teda pre každé $i = 1, \ldots, n$ musí platiť $x_i^2 = 0$ alebo $x_i^2 = 1$, t.j. $x_i = 0, 1, -1$. Z rovnosti (1) bezprostredne vyplýva, že práve jedno z čísel x_i musí byť rovné 1 alebo —1 a ostatné musia byť rovné 0.

Záver. Riešením rovníc (1) a (2) sú n-tice

$$[1, 0, \ldots, 0], [0, 1, \ldots, 0], \ldots, [0, \ldots, 0, 1],$$

$$[-1, 0, \ldots, 0], [0, -1, \ldots, 0], \ldots, [0, \ldots, 0, -1] .$$

Iné riešenie. Rovnicu (1) umocníme

$$x_1^4 + \ldots + x_n^4 + 2x_1^2x_2^2 + \ldots + 2x_{n-1}^n x_n^2 = 1.$$

Keď odpočítame rovnosť (2) a delíme 2, dostaneme

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2x_n^2 = 0 .$$

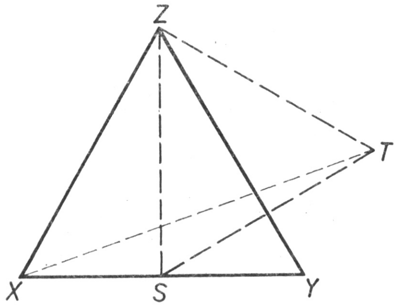
To je možné len vtedy, keď sú všetky čísla x_i rovné nule, alebo všetky čísla x_i okrem jedného sú rovné nule. Podľa (1) prvý prípad nemôže nastať a v druhom prípade číslo rôzne od nuly musí byť rovné +1 alebo —1.

A — II — 2

V rovine je daná konvexná množina **M**, ktorá obsahuje aspoň 2 body a ktorá má túto vlastnosť: ak A,B sú dva body z **M**, tak v **M** existuje taký bod C, že A,B,C sú vrcholy rovnostranného trojuholníka. Dokážte, že **M** nie je ohraničená, t.j. že ku každému kladnému číslu K existujú v **M** dva body, ktorých vzájomná vzdialenosť je väčšia ako K.

Riešenie. Dokážeme najprv pomocné tvrdenie: ak X,Y sú dva body v **M**, tak existujú v **M** dva body, ktorých vzdialenosť je $\frac{\sqrt{7}}{2} XY$.

Nech X, Y sú dva body v **M**. Označíme S stred úsečky XY. Keďže **M** je konvexná, tak $S \in$ **M**. Nech Z je taký bod z **M**, že trojuholník XYZ je rovnostranný. Nech ďalej T je taký bod z **M**, že trojuholník SZT je rovnostranný. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že body X a T sú v opačných polrovinách určených priamkou ZY (pozri obr. 22). Trojuholník XZT je pravouhlý s preponou XT. Teda



Obr. 22

$$|XT|^2 = |XZ|^2 + |ZT|^2 = |XY|^2 + \tfrac{3}{4}|XY|^2 = \tfrac{7}{4}|XY|^2 .$$

Odtiaľ už vyplýva pomocné tvrdenie.

Množina **M** obsahuje aspoň dva body X, Y. Nech d je ich vzdialenosť. n-násobným použitím pomocného tvrdenia vyplýva, že v **M** existujú dva body X_n, Y_n také, že ich vzdialenosť je

$$|X_n Y_n| = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^n . d .$$

Podľa binomickej vety platí

$$\left(1+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}-1\right)\right)^n \geqq 1+n.\left(\frac{\sqrt{7}}{2}-1\right).$$

Ak K je dané kladné číslo, tak existuje prirodzené číslo n také, že

$$1+n.\left(\frac{\sqrt{7}}{2}-1\right) > K\,.$$

Potom vzdialenosť bodov X_n a Y_n je väčšia ako K.

A — II — 3a

Súčin $2k-1$ po sebe idúcich nepárnych prirodzených čísel je deliteľný číslom $1.3.\ldots.(2k-1)$; dokážte.

Riešenie. Máme dokázať, že pre každé prirodzené číslo k a pre každé nepárne prirodzené číslo n je číslo

$$c_{k,n} = \frac{n(n+2).\ldots.(n+4k-4)}{1.3.\ldots.(2k-1)}$$

celé. Najprv si všimnime tento vzťah:

$$\frac{n(n+2).\ldots.(n+4k-6).(n+4k-4)}{1.3.\ldots.(2k-1)} =$$

$$= \frac{n(n+2).\ldots.(n+4k-6)}{1.3.\ldots.(2k-1)}.(n-2) +$$

$$+ \frac{n(n+2).\ldots.(n+4k-6)}{1.3.\ldots.(2k-1)}.2(2k-1) =$$

$$= \frac{(n-2)n.\dots.(n+4k-6)}{1.3.\dots.(2k-1)} +$$

$$+ 2(n+4k-6).\frac{n(n+2).\dots.(n+4k-8)}{1.3.\dots.(2k-3)}.$$

Teda

$$c_{k,n} = c_{k,n-2} + 2(n+4k-6).c_{k-1,n}. \qquad (3)$$

Tvrdenie úlohy dokážeme matematickou indukciou podľa súčtu $k + n$.

Pre $k = n = 1$ je

$$c_{1,1} = \frac{1}{1} = 1$$

číslo celé.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre každé prirodzené číslo p a nepárne prirodzené číslo q také, že $p + q < m$. Ukážeme, že platí aj pre čísla k, n (n nepárne) také, že $k + n = m$.

Keďže $k + n - 2 = m - 2 < m$, $k - 1 + n = m - 1 < m$, tak podľa indukčného predpokladu čísla $c_{k,n-2}$, $c_{k-1,n}$ sú celé. Podľa rovnosti (3) aj číslo $c_{k,n}$ je celé.

A — II — 3b

Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ktorého obsah je väčší ako 20,5 cm², pričom súčet veľkosti strán AB, BC, CD je 12 cm.

Riešenie. Zostrojíme štvoruholník so stranami

$$|AB| = |BC| = |CD| = 4\text{ cm},$$

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ADC = 60^\circ,$$

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 120^\circ.$$

Potom $|AB| + |BC| + |CD| = 12$ cm. Ľahko vidieť, že $|AD| = 8$ cm. Pre jeho obsah platí

$$P = \frac{8 + 4}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} . 4 = 12\sqrt{3} > 12 . 1{,}73 =$$

$$= 20{,}76 > 20{,}5 \text{ cm}^3.$$

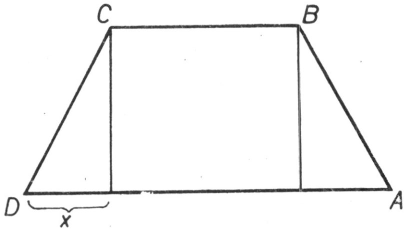
Je to štvoruholník požadovaných vlastností.

V úlohe sa požadovalo zostrojiť takýto štvoruholník a my sme ho zostrojili. Vzniká prirodzená otázka, ako sme vymysleli uvedenú konštrukciu. Na to sa úloha nepýta.

Jedna z možných (nepresných) úvah, ako takúto konštrukciu nájsť, je táto.

Z dôvodov symetrie sa zdá, že štvoruholníkom s najväčším obsahom, pre ktorý $|AB| + |BC| + |CD| = 12$ cm, by mal byť rovnoramenný lichobežník so stranami $|AB| = |BC| = |CD| = 4$ cm. Strana AD bude mať dĺžku $4 + 2x$ (pozri obr. 23). Jeho obsah P bude rovný

$$P(x) = \frac{4 + (4 + 2x)}{2} \cdot \sqrt{16 - x^2} .$$



Obr. 23

Chceme nájsť hodnotu x, pre ktorú má P maximum. Jednoduchšie bude hľadať maximum funkcie

$$f(x) = (P(x))^2 .$$

Totiž

$$f'(x) = ((4 + x)^2 . (16 - x^2))' = 128 - 24x^2 - 4x^3$$

a zrejme $f'(2) = 0$.

Teda štvrtá strana hľadaného štvoruholníka by mala mať veľkosť $|AD| = 8$ cm.

Skúškou zistíme, že tento štvoruholník má skutočne obsah $12\sqrt{3} > 20{,}5$.

Všimnime si, že sme nedokázali, že je to štvoruholník s maximálnym plošným obsahom.

KATEGORIE B

B — II — 1

Dané sú reálne čísla a, b. Nájdite všetky riešenia rovnice

$$2x^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{sign} x = a^2 + b^2 . \qquad (1)$$

(Funkcia $x \to \operatorname{sign} x$ je definovaná na množine $\mathbf{R}$ všetkých reálnych čísel takto: ak $x > 0$, $\operatorname{sign} x = 1$; ak $x = 0$, $\operatorname{sign} x = 0$; ak $x < 0$, $\operatorname{sign} x = -1$.)

Řešení. 1. Nechť $a^2 + b^2 = 0$, tj. $a = b = 0$. Potom rovnice (1) má tvar

$$2x^2 = 0 ,$$

a tedy jediné řešení $x = 0$.

2. Nechť $a^2 + b^2 > 0$. Řešením pak zřejmě není $x = 0$.

a) Hledejme řešení v oboru $(-\infty, 0)$. Pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$2x^2 = 2b^2 .$$

V oboru $(-\infty, 0)$ má tato rovnice řešení, právě když $b \neq 0$. Tímto řešením je

$$x = -|b| .$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že $-|b|$ je pro $b \neq 0$ řešením rovnice (1).

b) Hledejme řešení v oboru $(0, \infty)$. Pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$2x^2 = 2a^2 .$$

V oboru $(0, \infty)$ má tato rovnice řešení, právě když $a \neq 0$. Tímto řešením je

$$x = |a| .$$

Zkouškou se lze přesvědčit, že pro $a \neq 0$ je $|a|$ řešením rovnice (1).

Řešení rovnice (1) je zachyceno tabulkou:

a	b	x
0	0	0
0	$\neq 0$	$-\|b\|$
$\neq 0$	0	$\|a\|$
$\neq 0$	$\neq 0$	$\|a\|, -\|b\|$

B — II — 2

Nechť trojúhelník **T**$_1$ s nejmenší výškou délky v_1 a obsahem P_1 je obsažen v trojúhelníku **T**$_2$ s nejmenší výškou délky v_2 a obsahem P_2. Potom platí

$$P_1 \leqq \frac{v_1}{v_2} P_2 .$$

Dokažte.

Řešení. Označme d_1 nejdelší stranu trojúhelníka **T**$_1$, d_2 nejdelší stranu trojúhelníka **T**$_2$. Protože **T**$_1$ je obsažen v **T**$_2$, platí podle výsledku úlohy **B — P — 3**, že $d_1 \leqq d_2$. Avšak

$$d_1 = \frac{2P_1}{v_1}, \qquad d_2 = \frac{2P_2}{v_2}.$$

Proto

$$\frac{2P_1}{v_1} \leqq \frac{2P_2}{v_2}$$

neboli

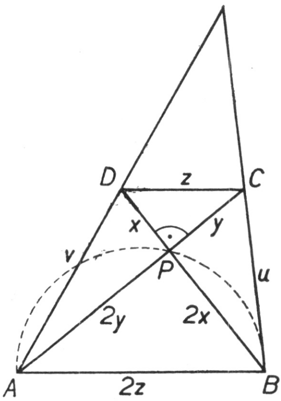
$$P_1 \leqq \frac{v_1}{v_2} P_2 .$$

B — II — 3a

Lichoběžník $ABCD$ má tyto vlastnosti:
1. Pro jeho základny platí $|AB| = 2\,|CD|$;
2. Jeho úhlopříčky jsou navzájem kolmé.
Vypočtěte délky základen lichoběžníka pomocí délek

ramen $u = |BC|$, $v = |AD|$. Dále dokažte, že platí $2u > v > u/2$.

Řešení. Délky označíme podle obr. 24. Protože $|AB| = 2\,|CD| = 2z$, je také $|BP| = 2\,|DP| = 2x$, $|AP| =$



Obr. 24

$= 2\,|CP| = 2y$ (průsečík úhlopříček AC, BD je označen P). Podle Pythagorovy věty je

$$x^2 + y^2 = z^2\,,$$

$$4x^2 + y^2 = u^2\,,$$

$$x^2 + 4y^2 = v^2\,. \tag{1}$$

Sečtením druhých dvou rovnic v (1) dostaneme vzhledem k první rovnici v (1)

$$5z^2 = u^2 + v^2\,. \tag{2}$$

Pro délky základen tedy platí

$$|AB| = 2 . |CD| = 2 . \sqrt{\tfrac{1}{5}(u^2 + v^2)} .$$

Veďme bodem C přímku rovnoběžnou s AD, její průsečík s AB označme E. V trojúhelníku EBC je $|EB| = z$, $|BC| = u$, $|CE| = v$, a je proto $v < u + z$. Z pravoúhlých trojúhelníků PCD a PCB je vidět, že $z < u$, což také plyne z rovnic $x^2 + y^2 = z^2$, $4x^2 + y^2 = u^2$ a nerovnosti $x \neq 0$. Sečtením nerovností $v < u + z$, $z < u$ dostaneme $v < 2u$; obdobně se dokáže, že $u < 2v$.

B — II — 3b

Nech $p > q > 0$ sú dané reálne čísla. Potom existuje trojuholník ABC, ktorého strany majú dĺžky

$$a = \sqrt{pq}, \qquad b = \tfrac{1}{2}(p - q), \qquad c = \tfrac{1}{2}(p + q);$$

dokážte. Vyšetrite, pri ktorých hodnotách p, q bude $\triangle ABC$

a) pravouhlý;

b) rovnoramenný.

Řešení. Existence $\triangle ABC$ bude dokázána v části a).

a) Pro každá dvě reálná čísla p, q, jež splňují podmínky $p > q > 0$, platí

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0$$

a dále

$$a^2 + b^2 = pq + \tfrac{1}{4}(p - q)^2 =$$

$$= \tfrac{1}{4}(p^2 + 2pq + q^2) = c^2 .$$

Odtud plyne, že $a + c > b$, $b + c > a$ a $a + b > c$. Trojúhelník ABC tedy pro každá dvě čísla $p > q > 0$ existuje a je vždy pravoúhlý.

b) Z toho, co jsme dokázali v a, vyplývá, že $\triangle ABC$ může být rovnoramenný tehdy a jen tehdy, platí-li $a = b$ neboli

$$\sqrt{pq} = \tfrac{1}{2}(p - q)\,;$$

odtud postupně dostaneme

$$4pq = p^2 - 2pq + q^2,$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 6\,\frac{p}{q} + 1 = 0\,,$$

takže pro $r = p/q$ je $r_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Podmínce $p/q > 1$ vyhovuje však jen kořen $p/q = 3 + 2\sqrt{2}$ neboli

$$p = (3 + 2\sqrt{2})\,q. \tag{1}$$

Nechť pro čísla $p, q > 0$ platí (1). Potom

$$a = \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})\,q^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2}\,.\,q = (1 + \sqrt{2})\,.\,q\,,$$

$$b = \tfrac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2} - 1)\,.\,q = (1 + \sqrt{2})\,q$$

a trojúhelník ABC se stranami a, b, c je rovnoramenný.

C — II — 1

Kolika způsoby je možné vyjádřit číslo 1978 jako součet nejméně dvou za sebou následujících přirozených čísel? Najděte všechny takové rozklady. Návod: Při řešení můžete použít vzorce

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \tfrac{1}{2}k\,(k + 1)\,.$$

Řešení. Nechť je možné číslo 1978 psát jako součet

$$(m + 1) + (m + 2) + \ldots + (m + k)\,,$$

kde $m \geqq 0$, $k \geqq 2$ jsou celá čísla. Pak je

$$1978 = \tfrac{1}{2}(2m + k + 1).k\,,$$

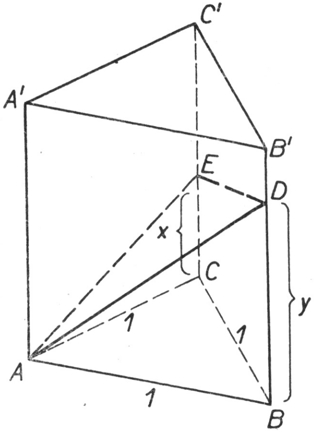
odkud

$$(2m + k + 1).k = 2^2.23.43\,.$$

Zřejmě platí $k < k + 1 < 2m + k + 1$. Je-li k sudé, je zřejmě číslo $2m + k + 1$ liché a obráceně. Číslo $k \geqq 2$ může proto nabýt jen některou z hodnot 4, 23, 43. Číslo 1978 je tedy možné vyjádřit jako součet nejméně dvou za sebou následujících přirozených čísel právě těmito třemi způsoby:

1. $k = 4$, $m = 492$, $1978 = 493 + 494 + 495 + 496$;
2. $k = 23$, $m = 74$, $1978 = 75 + 76 + \ldots + 97$;
3. $k = 43$, $m = 24$, $1978 = 25 + 26 + \ldots + 67$.

Podstavou trojbokého kolmého hranolu je rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 1. Vrcholem A prochází rovina, která protíná plášť hranolu v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku. Vypočtěte obsah řezu.



Obr. 25

Řešení: Vrcholy trojúhelníka řezu, které leží na bočných hranách procházejících vrcholy B a C, označme D a E (obr. 25). Velikosti úseček BD a CE označme x a y. Potom podle Pythagorovy věty platí

$$|AE|^2 = 1 + x^2, \ |AD|^2 = 1 + y^2,$$

$$|DE|^2 = 1 + (x - y)^2.$$

Pomocí těchto rovností lze dokázat, že úhel $\sphericalangle DAE$ není pravý. Kdyby byl totiž pravý, pak by podle Pythagorovy věty pro trojúhelník AED muselo platit

$$|AE|^2 + |AD|^2 = |DE|^2,$$

tj.

$$2 + x^2 + y^2 = 1 + (x - y)^2,$$

odkud by plynulo $1 = -2xy$, což by byl spor s tím, že x, y jsou nezáporná čísla. V trojúhelníku AED je tedy pravý buď úhel $\sphericalangle AED$, nebo $\sphericalangle ADE$.

Předpokládejme, že úhel $\sphericalangle AED$ je pravý, v opačném případě bychom jen zaměnili označení vrcholů hranolu. Podle předpokladu je trojúhelník ADE rovnoramenný, tj. $|AE| = |DE|$. Je tudíž $1 + x^2 = 1 + (x - y)^2$, tedy $y(y - 2x) = 0$, odkud plyne $y = 0$ nebo $y = 2x$. Trojúhelník AED je pravoúhlý a rovnoramenný, musí tedy platit

$$2 . |AE|^2 = |AD|^2,$$

tj. $2 + 2x^2 = 1 + y^2$ neboli $1 + 2x^2 = y^2$. Odtud plyne, že je y nenulové. Musí proto platit $y = 2x$. Dosazením do předcházející rovnice dostaneme $2x^2 = 1$. Nyní již můžeme vypočítat obsah P trojúhelníka AED. Je $P = \frac{1}{2}|AE| . |DE| = \frac{1}{2}|AE|^2 = \frac{1}{2}(1 + x^2) = \frac{3}{4}$.

C — II — 3a

Určete poslední dvojčíslí součtu

$$s = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + 1000^4.$$

Řešení: Je zřejmé, že poslední dvojčíslí součtu s

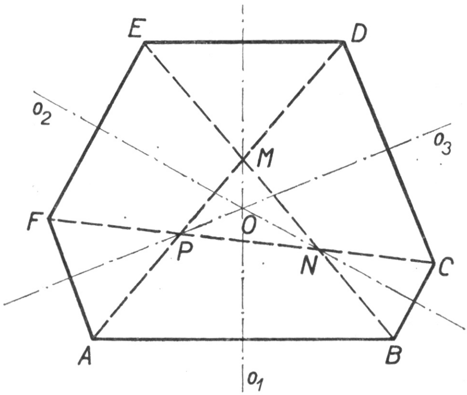
závisí jen na posledních dvojčíslích čísel 1^4, 2^4, $\ldots$, 1000^4. Poslední dvojčíslí každého čísla tvaru n^4, kde n je přirozené číslo, závisí jen na posledním dvojčíslí čísla n. Označme $s_1 = 1^4 + 2^4 + \ldots + 100^4$. Z výše uvedeného plyne, že číslo s má stejné poslední dvojčíslí jako číslo $10s_1$. Poslední číslice čísla s je tudíž 0 a předposlední číslice čísla s je rovna poslední číslici čísla s_1. Tato číslice ale závisí pouze na posledních číslicích sčítanců 1^4, 2^4, $\ldots$, 100^4, a protože poslední číslice čísla n^4 závisí jen na poslední číslici čísla n, dostaneme analogicky jako výše, že poslední číslice čísla s_1 je rovna poslední číslici v čísle $10s_2$, kde $s_2 = 1^4 + 2^4 + \ldots + 10^4$. Je tedy poslední dvojčíslí čísla s rovno 00, číslo s je dělitelné stem.

C — II — 3b

Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, jehož úhlopříčky AD, BE, CF jsou stejně dlouhé a jehož každé dvě protější strany jsou rovnoběžné a nestejně dlouhé. Potom tomuto šestiúhelníku lze opsat kružnici. Dokažte.

Řešení. Danému šestiúhelníku (obr. 26) bude možno opsat kružnici, právě když osy všech jeho stran budou mít společný bod. Osy protějších stran splývají. Toto tvrzení dokážeme například pro strany AB a DE. Podle předpokladu je $AB \parallel DE$, $AB \neq DE$, takže čtyřúhelník $ABDE$ je lichoběžník. Protože $|AD| = |BE|$, je $ABDE$ rovnoramenný lichoběžník. Odtud již plyne, že osa o_1 strany AB je zároveň osou strany ED. Obdobně je osa o_2 strany BC zároveň osou strany EF

a osa o_3 strany CD zároveň osou strany FA. Čtyřúhelník $ABDE$ je rovnoramenný lichoběžník a proto je osa o_1 zároveň osou úhlu $\sphericalangle AMB$, kde M je průsečík úhlopříček AD a BE. Obdobně se dokáže, že o_2 je osou úhlu $\sphericalangle ENF$, kde N je průsečík úhlopříček BE a CF a že o_3



Obr. 26

je osou úhlu $\sphericalangle CPD$, kde P je průsečík úhlopříček AD a CF. Body M, N, P jsou navzájem různé. Kdyby například splývaly body M a N, pak by s nimi splynul i bod P a tímto bodem by procházely všechny tři osy o_1, o_2, o_3 a platilo by $|AM| = |BM| = |CM| = |DM| = |EM|$. Pak by rovnoramenné trojúhelníky ABM, DEM byly shodné, bylo by tudíž $|AB| = |DE|$, což by bylo ve sporu s předpokladem. Je tedy $M \neq N \neq P \neq M$. Body M, N, P jsou proto vrcholy trojúhelníka a přímky o_1, o_2, o_3 jsou osy úhlů tohoto trojúhelníka a procházejí proto společným bodem O. Danému šestiúhelníku lze opsat kružnici. Tato kružnice má střed v bodě O a poloměr $|OA|$.

KATEGORIE Z

Z – II – 1

Nákladní vlak dlouhý 150 m jede průměrnou rychlostí 30 km/h. Předjíždí jej rychlík dlouhý 50 m, který jede průměrnou rychlostí 75 km/h. V okamžiku, kdy lokomotiva rychlíku míjí lokomotivu nákladního vlaku, sníží náhle rychlík svou rychlost. Nakonec rychlík předjede nákladní vlak, a to za 1 minutu. Jaká byla snížená průměrná rychlost rychlíku?

Poznámka. Dobou předjíždění se rozumí čas od okamžiku, kdy lokomotiva rychlíku dostihne poslední vagón nákladního vlaku, do okamžiku, kdy poslední vagón rychlíku mine lokomotivu nákladního vlaku.

Řešení. Nejprve vyjádříme dané rychlosti v m/min. Rychlost nákladního vlaku je $\frac{30.1000}{60} = 500$ (m/min). Původní rychlost rychlíku je $\frac{75.1000}{60} = 1250$ (m/min).

Představíme si, že předjíždění sleduje pozorovatel, který jede v nákladním vlaku. Rychlík vzhledem k němu jede nejdříve průměrnou rychlostí $1250 - 500 = 750$ (m/min). Doba předjíždění se skládá ze dvou složek:

z doby t_1, po kterou míjí lokomotiva rychlíku nákladní vlak;

z doby t_2, po kterou rychlík míjí lokomotivu nákladního vlaku.

Zřejmě je podle textu úlohy:

$$t_1 + t_2 = 1\,. \tag{1}$$

Dále je (t_1, t_2 v minutách)

$$t_1 = \tfrac{150}{750} = \tfrac{1}{5}. \tag{2}$$

Označíme x sníženou průměrnou rychlost rychlíku v m/min; pak je

$$t_2 = \frac{50}{x - 500}. \tag{3}$$

Spojením (1), (2), (3) je

$$\frac{50}{x - 500} = \frac{4}{5}\,.$$

Odtud

$$x - 500 = \tfrac{250}{4} = 62{,}5\,,$$

$$x = 562{,}5\ (\mathrm{m/min}).$$

Zmenšená průměrná rychlost rychlíku je v km/h 33,75, neboť

$$60x = 33\,750\ (\mathrm{m/h}).$$

Zkouška. Při snížené průměrné rychlosti míjel rychlík lokomotivu nákladního vlaku. K tomu byla třeba doba $\frac{50}{562{,}5 - 500} = \frac{50}{62{,}5} = \frac{4}{5}$ minuty. Celé předjíždění trvalo 1 minutu, tj. lokomotiva rychlíku míjela nákladní vlak $\frac{1}{5}$ minuty.

Odtud plyne, že délka nákladního vlaku je

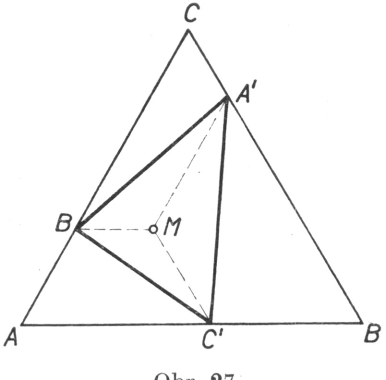
$$\tfrac{1}{5}.(1250 - 500) = \tfrac{1}{5}.750 = 150 \text{ metrů},$$

což odpovídá textu úlohy.

Z — II — 2

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a bod M jeho vnitřku. Na stranách AB, BC, CA sestrojíme po řadě body C', A', B' tak, aby bylo $MC' \parallel BC$, $MA' \parallel AC$ a $MB' \parallel AB$. Dokažte, že obvod trojúhelníka $A'B'C'$ je roven $|MA| + |MB| + |MC|$.

Řešení. Na obr. 27 jsou sestrojeny body A', B', C'. Protože je $\sphericalangle MB'C = \sphericalangle B'CA' = 60°$, vyměňuje souměrnost podle osy o úsečky $B'C$ polopřímku $B'M$ s polopřímkou CA'. Protože je $A'M \parallel B'C \perp o$, vyměňuje souměrnost body A', M, a tedy i úsečky $A'B'$,



Obr. 27

CM; proto je $|A'B'| = |CM|$. Sečtením tří takových rovností dostaneme dokazovaný vztah:

$$|A'B'| + |B'C'| + |C'A'| = |AM| + |BM| + |CM|.$$

Z — II — 3

Napíšeme za sebou bez mezer druhé mocniny všech přirozených čísel od 1 do 1000. Dostaneme tak číslo 14 916 .... Kolik cifer má toto číslo?

Řešení. Výpočtem nebo v tabulkách druhých mocnin zjistíme, že druhá mocnina přirozených čísel

1 až 3 je číslo jednociferné,
4 až 9 je číslo dvojciferné,
10 až 31 trojciferné,
32 až 99 čtyřciferné,
100 až 316 pěticiferné,
317 až 999 šesticiferné

a že číslo 1000^2 je sedmiciferné. Odtud plyne, že počet všech číslic čísla 14916... je

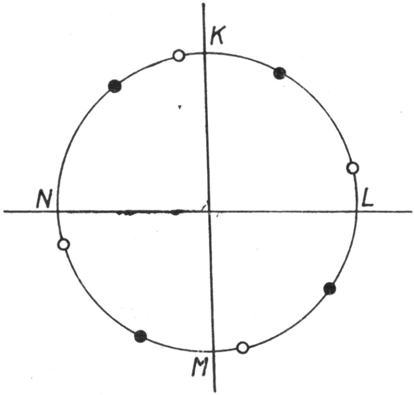
$$3.1 + 6.2 + 22.3 + 68.4 + 217.5 + 683.6 + 7 =$$
$$= 3 + 12 + 66 + 272 + 1085 + 4098 + 7,$$
tj. 5543.

Z — II — 4

Osmiúhelník vepsaný dané kružnici má čtyři vrcholy červené a čtyři modré; přitom žádné tři sousední vrcholy nejsou téže barvy. Zjistěte, zda lze vždy sestrojit takové dvě různoběžné přímky, aby uvnitř každého úhlu jimi určeného ležel jeden červený a jeden modrý vrchol.

Řešení. Rozlišíme dva případy.

a) Žádné dva sousední vrcholy nemají tutéž barvu;



Obr. 28

b) lze najít aspoň jednu dvojici sousedních vrcholů téže barvy.

V případě a) se barvy vrcholů střídají. Na kružnici zvolíme čtyři body K, L, M, N tak, aby každý z nich odděloval dvě dvojice červená—modrá, a spojíme je přímkami ob jeden (obr. 28).

V případě b) nechť jsou např. body A, B červené; pak jsou vrcholy C, H modré. Přehled barvy vrcholů si zapíšeme „tabulkou“

$$\frac{A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H}{\text{č č m} \qquad\qquad \text{m}}, \tag{1}$$

kde v druhé řádce je zaznamenána barva. V tabulce (1) nemůže být červená žádná z dvojic D, E a F, G; pak by totiž byla modrá zbývající dvojice a tři sousední vrcholy by byly modré. „Barvení“ vrcholů v tabulce (1) lze tedy *dokončit* některým z těchto způsobů:

↓ ↓ ↓ ↓

A	B	C	D	E	F	G	H
č	č	m	č	m	č	m	m
č	č	m	č	m	m	č	m
č	č	m	m	č	č	m	m
č	č	m	m	č	m	č	m

Konstrukce bodů K, L, M, N, které je třeba spojit přímkami, je ve všech čtyřech případech zřejmá; ukazují ji šipky.