VIII. Správa o XX. medzinárodnej matematickej olympiáde

In: Jan Vyšín (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor); Jozef Moravčík (editor): 27. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1977-1978. 20. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 151–184.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404706

VIII. Správa
o XX. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

Jubilejná — XX. — medzinárodná matematická olympiáda (MMO) sa konala v dňoch 1.—13. 7. 1978 v Rumunsku — v krajine, ktorá pred takmer 20 rokmi prišla s iniciatívou konať tieto veľmi užitočné medzinárodné merania síl matematických nádejí. Doteraz Rumunská socialistická republika (RSR) usporiadala nielen I. (1959), ale aj II. (1960) a XI. (1969) MMO. Poriadateľom tohoročnej MMO bolo ministerstvo školstva RSR, ktoré na čele s ministerkou s. *prof. Ing. Suzanou Gideaovou, DrSc.*, venovalo organizácii tohto sviatku školskej matematiky značnú pozornosť. Pri príprave odbornej časti súťaže a rámcového programu úzko spolupracovali predstavitelia a členovia rumunskej matematickej spoločnosti *Societates de stiinte matematice din RSR*. Predsedom organizačného výboru XX. MMO bol *prof. dr. Gheorghe Mihoc*, člen Akadémie vied RSR.

Poslaním pozvánok do takmer 30 krajín sa hostitelia usilovali získať na jubilejnej MMO rekordnú účasť družstiev i jednotlivcov, no nepodarilo sa im prekonať nielen vlaňajší rekord, ale ani účasť na predchádzajúcich

3 ročníkoch. Súťaže XX. MMO sa zúčastnili kompletné osemčlenné družstvá 16 krajín: Rakúska (A), Bulharska (BG), ČSSR (CS), NSR (D), Francúzska (F), Veľkej Británie (GB), Mongolska (M), Holandska (NL), Poľska (PL), Rumunska (R), Švédska (S), Fínska (SF), Turecka (TR), USA, Vietnamskej socialistickej republiky (VN), Juhoslávie (YU) a štvorčlenné družstvo Kuby (C). Vedúci delegácií uvedených 17 zemí tvorili medzinárodnú jury súťaže, ktorej predsedom bol *prof. dr. Ioan Cuculescu*, učiteľ bukureštskej univerzity.

Väčšina vedúcich delegácií pricestovala do Bukurešti v sobotu 1. 7. 1978. Organizátori ich po skupinkách odviezli do mestečka Bušteni ležiaceho cca 140 km od hlavného mesta v údolí rieky Prahovy neďaleko Predealu. Toto turistické stredisko na úpätí legendárneho Caraimanu (2384 m) v pohorí Bucegi vyhliadli za bydlisko a miesto práce jury. Jej členovia a rumunskí organizátori boli tam ubytovaní v hoteli Biroul de turism pentru tineret (rumunská CKM).

Prvé oficiálne stretnutie členov jury sa uskutočnilo v nedeľu 2. 7. predpoludním v miestnej strednej škole, kde členovia jury nachádzali po celý čas pobytu v Bušteni veľmi dobré podmienky pre svoju prácu. Zasadnutie viedol *akad. Mihoc*, ktorý v úvodnom slove pripomenul podiel RSR na vzniku a organizovaní MMO, predstavil členov organizačného výboru a predstaviteľov jednotlivých komisií XX. MMO, ospravedlnil predsedu jury *prof. dr. Cuculescu* pre rekonvalescenciu po predchádzajúcom onemocnení a predstavil vedúcich delegácií zúčastnených krajín, z ktorých chýbal už len vedúci delegácie USA pro komplikácie s dopravou. Ďalej pripomenul hlavné zásady organizačného poriadku XX. MMO a informoval o programe práce jury i žiakov, ktorých príchod do Bukurešti očakávali rumunskí hostitelia v pondelok 3. 7. V zastúpení rezortu školstva privítal vedúcich zahraničných delegácií i ostatných účastníkov MMO s. *Bošovej*, inšpektor kraja Prahova. Na záver prvej časti zasadnutia jury informoval akad. Mihoc, že organizátori dostali z 12 krajín celkom 54 návrhov úloh, z ktorých rumunská úlohová komisia vybrala 17. Texty a stručné riešenia týchto 17 úloh vo všetkých 4 rokovacích jazykoch (angličtina, francúzština, nemčina, ruština) dostali vedúci delegácií v zapečatených obálkach na záver zasadnutia.

Po krátkej prestávke nasledovala panelová diskusia (beseda za okrúhlym stolom) na tému *Podiel národných a medzinárodných matematických olympiád na rozvoji vyučovania matematiky*. Žiaľ, vedúcim zahraničných delegácií nebola téma diskusie vopred známa a preto sa z nich na vystúpenie v nej nik vopred nepripravil. Táto skutočnosť poznamenala nepriaznivo celý priebeh diskusie, v ktorej jediný rozsiahlejší vopred pripravený referát predniesol vedúci delegácie RSR *prof. Draghicescu*. Zdôraznil v ňom, že vedeckotechnický rozvoj si vyžaduje revolúciu aj v matematike, a to nielen vo vnútri — pri rozvoji matematických vedných disciplín, ale aj navonok — pri odovzdávaní matematických poznatkov na všetkých stupňoch vzdelávania. S narastajúcim množstvom matematických informácií, ktoré si majú žiaci spoľahlivo osvojiť, narastá význam stimulov získavajúcich žiakov pre systematickú samostatnú prácu v matematike. Jedným z takých účinných stimulov je aj matematická olympiáda, a to ako národná, tak aj medzinárodná, čo je overené mnohoročnými skúsenosťami. Podrobne sa zaoberal poznatkami z matematickej olympiády v Rumunsku, konanej každoročne od roku 1954 v priamej nadväznosti na matematickú súťaž v riešení úloh v časopise *Gazeta matematica*, uskutočňovanej každoročne od roku 1902. MO sa v RSR zúčastňujú každoročne tisícky žiakov stredných škôl a úspech v súťaži je pre väčšinu z nich impulzom pre ďalšie sebavzdelávanie v matematike. Víťazi jednotlivých ročníkov MO sa uplatňujú ako odborníci v matematike i v ostatných oblastiach vedy a techniky. V rumunskej škole hodnotia profesionálnu schopnosť učiteľov matematiky podľa výsledkov ich žiakov v MO. Tento ukazovateľ je jedným z hlavných kritérií hodnotenia kvality učiteľovej práce. Stredná generácia rumunských matematikov robila prvé kroky k tvorivej práci vo svojom odbore na pôde MO a MMO a obe súťaže prispeli značne k vzniku a formovaniu matematickej školy, ktorou sa RSR hrdí. Nesporný je aj ich vplyv na orientáciu obsahu vyučovania matematiky v strednej škole nielen po stránke formatívnej, ale aj informatívnej. V RSR niet stredoškolskej učebnice matematiky, ktorá by nesledovala aj úspech žiakov v MO. V závere svojho príspevku prof. Draghicesu konštatoval, že MMO sa stali veľmi dobrým prostriedkom pre spoznávanie a výmenu skúseností mladých matematikov i ich učiteľov. V tom treba vidieť i príspevok matematiky a matematikov k vytváraniu ovzdušia mierovej spolupráce a dorozumenia medzi národmi celého sveta.

Referát prof. Draghicesu doplnil akad. Mihoc podrobnou informáciou o organizačnej štruktúre MO v RSR a opätovne zdôraznil, že výsledky v súťaži sú veľmi dobrým prostriedkom pre overenie kvality školského vyučovania.

Prof. Lyness (GB) v krátkej poznámke konštatoval, že vo Veľkej Británii neuplatňujú systém súťaženia pre mládež do 16 rokov. MO organizujú len pre najlepších žiakov najvyšších ročníkov strednej školy. Podľa neho nie je MO prínosom pre priemerných žiakov, ale u najschopnejších zvyšuje záujem o matematiku. Výsledky žiakov v MO sú však stimulom pre učiteľov a zvyšujú ich záujem o problematiku riešenia úloh.

Prof. Stanešila (R) konštatoval, že každý štát potrebuje ľudí, ktorí poznajú matematiku a vedia ju používať. MO je jedným z prostriedkov k výchove takýchto ľudí. Vyslovil otázku existencie ďalších vhodných prostriedkov a metód ich využívania. Konštatoval, že RSR rozšírili MO aj pre 10—12ročné deti, a to s veľkým úspechom. Vyslovil presvedčenie, že pravidelné riešenie matematických úloh má pre rozvoj matematického talentu prinajmenšom taký význam, ako pravidelné cvičenie na nástroji pre rozvoj umeleckého nadania hudobníka. Nadhodil myšlienku vypisovať témy na samostatnú prácu (nie úlohy) medzi dvoma MMO, ktorých spracovanie by sa zvlášť hodnotilo.

Prof. Le Hai Chau (VN) sa v krátkom príspevku zameral na niektoré otázky súvisiace s organizáciou MMO.

Navrhoval, aby niektoré krajiny, ktoré majú s MO bohaté skúsenosti, spracovali akýsi minimálny program pre účastníka MMO. Nepovažuje za správne, aby sa žiak mohol zúčastniť MMO viac než raz a rovnako sa mu nezdá, aby pre súťaž boli vybrané dve úlohy z návrhu jednej krajiny.

Jeho vystúpením sa panelová diskusia prakticky skončila a celé nedeľné popoludnie rezervované na jej pokračovanie využili členovia jury na štúdium predloženého návrhu širšieho výberu úloh. Výdatná búrka prinútila k tomu aj tých, ktorí by snáď boli dali prednosť prvej dlhšej prechádzke ulicami mestečka pod Caraimanom.

V pondelok 3. 7. predpoludním sa uskutočnilo prvé pracovné zasadnutie jury už pod vedením predsedu prof. dr. Cuculescu. Tento v úvode informoval o zložení komisie pre výber úloh a uviedol, že komisia pri svojej práci nepredpokladala, že by bolo treba rešpektovať zásadu, aby vo výbere šestice úloh pre súťaž nebola z návrhu žiadnej krajiny viac než jedna úloha. Preto v predloženom súbore 17 úloh boli jednotlivé krajiny zastúpené takto: BG 2, C 1, CS 1, D 1, F 3, GB 2, NL 1, S 1, USA 2, VN 1, YU 2. Iba z návrhu SF nevybrali žiadnu úlohu, ostatné zúčastnené krajiny úlohy pre XX. MMO nenavrhli. Komisia usilovala predovšetkým o to, aby v súbore boli rovnomerne zastúpené jednotlivé oblasti školskej matematiky. Tento zámer sa jej však celkom splniť nepodarilo, pretože v zaslaných návrhoch prevládali úlohy s tematikou školskej teórie čísel a kombinatoriky a veľmi slabo bola zastúpená geometria, a to rovnako rovinná ako priestorová.

Už pri prvej rozprave o úlohách sa jury rozhodla vyradiť tri z nich buď preto, že ich riešenie bolo založené na všeobecne známom princípe a námet nebol originálny (československá a jedna francúzska) alebo preto, že sa javili ako príliš náročné pre klauzúrnu súťaž (švédska). Na záver rozpravy bolo zostávajúcich 14 úloh orientačne rozdelených do tabuľky jednak podľa tematiky: číselná teória (5), algebra (3), teória množín a kombinatorika (3), planimetria (2), stereometria (1) a jednak podľa obťažnosti, ktorú im jury prisúdila: nenáročné (3), stredne obťažné (5), obťažné (2), značne náročné (4). Potom sa prikročilo k výberu šestice metódou, ktorá sa osvedčila vlani v Juhoslávii: Každý člen jury predložil svoj návrh šiestich úloh pre súťaž, pri ktorom mal rešpektovať zásadu, aby boli zastúpené všetky tematické oblasti a aby súbor obsahoval dve ľahké a dve veľmi náročné úlohy. Úlohy s najnižším počtom hlasov vypadávali a tí, ktorí ich navrhovali, rozdelili svoje hlasy zostávajúcim úlohám.

Hoci už po prvom sčítaní hlasov, ktorým začalo popoludňajšie zasadnutie jury, vypadli 4 úlohy, bolo potrebných ešte šesť skrutínií pretkaných občas zaujímavou, ale prevažne rozvláčnou diskusiou, kým sa výber redukoval na potrebných 6 úloh. Pri hlasovaní o jeho prijatí bolo 12 hlasov za, nik proti pri 5 abstenciách. (Predseda jury okrem jednej či dvoch výnimiek vôbec nehlasoval.)

Na záver pondelňajšieho rokovania rozhodla jury ešte o rozdelení vybranej šestice súťažných úloh na dve trojice pre jednotlivé súťažné dni.

V utorok 4. 7. predpoludním pokračovala jury vo svojej práci už za účasti zástupcov vedúcich delegácií, ktorí 3. 7. priviedli svoje družstvá do Bukurešti a krátko pred polnocou pricestovali do Bušteni. Jej rokovanie sa začalo prečítaním listu *dr. I. Tomescu*, člena komisie pre výber úloh, v ktorom oznamuje, že princíp riešenia holandskej úlohy (bola vybratá do súboru súťažných úloh ako úloha č. 6) sa v určitej podobe nachádza v knihe W. D. Wallisa vydanej r. 1972 v nakladateľstve Springer. Táto informácia vyvolala rozsiahlu diskusiu so značne rozdielnymi stanoviskami. Nakoniec však jury väčšinou hlasov (11 za, 6 abstencií) rozhodla nemeniť súbor 6 úloh prijatých na predchádzajúcom zasadnutí. Po tomto rozhodnutí sa členovia jury rozdelili do 3 skupín, z ktorých každá sformulovala texty 2 z vybraných úloh vo všetkých 4 rokovacích rečiach. Schvaľovanie oficiálnych textov bolo v jury sprevádzané, ako obvykle, siahodlhou diskusiou jazykovo-terminologickej povahy.

Po poludňajšej prestávke nasledovalo rozhodovanie o stanovení maximálneho počtu bodov za úplné riešenie úloh, pri ktorom sa opäť použila metóda individuálnych návrhov jednotlivých delegácií. Jury sa relatívne rýchlo podarilo vyriešiť túto otázku, čím sa prvá etapa jej práce skončila.

Vedenia jednotlivých delegácií mohli preto začať s prekladom textov úloh do materčiny súťažiacich žiakov a ich prípravou pre rozmnoženie v dostatočnom počte exemplárov.

Vo večerných hodinách sa v kultúrnom dome uskutočnilo prijatie členov jury mešťanostom Bušteni, ktorý im v krátkom príhovore priblížil históriu, prítomnosť i budúcnosť mesta. Od roku 1840 z osady 12 drevorubačských rodín narástlo do dnešných 12 tisíc obyvateľov s perspektívou moderného centra s rozsiahlou výstavbou hotelov a turistických ubytovní v údolí Prahovy i v horách nad ním.

Klepanie textov úloh v materčine žiakov pokračovalo i v stredu (5. 7.) predpoludním a po ich rozmnožení mohli popoludní vedúci delegácií a ich zástupcovia po opätovnej kontrole správnosti vložiť po jednom exempléri do pripravených obálok s kódmi jednotlivých žiakov.

Je len pochopiteľné, že krátke voľno, ktoré potom nasledovalo, využila väčšina z členov jury na zaslúžený oddych a prechádzky po Bušteni a jeho okolí.

Vo štvrtok 6. 7. v skorých ranných hodinách cestovali členovia jury autobusom do Bukurešti, kde sa v aule Agronomického inštitútu Nicolae Balcescu uskutočnilo slávnostné otvorenie XX. MMO. Po krátkom príhovore akad. Mihoca prečítal nám. min. školstva RSR pozdravný list ministerky školstva, ktorá sa ospravedlnila pre účasť na plenárnom zasadnutí ÚV KSR, vyslovil prianie, aby mladí ľudia z rôznych krajín súťažili vždy len na mierovom poli a zaželal všetkým účastníkom plný úspech v súťaži. Potom sa 132 súťažiacich na XX. MMO rozišlo do 8 posluchární inštitútu, aby sa pustili do riešenia prvej trojice nasledujúceho súboru úloh, ktorý pre nich jury vybrala:

Prvý deň súťaže — 6. júla 1978

viz papír

1. Nech m, n, $1 \leqq m < n$ sú prirodzené čísla také, že dekadické zápisy čísel 1978^m a 1978^n končia rovnakým trojčíslím.
Určte čísla m, n s touto vlastnosťou tak, aby súčet $m + n$ bol minimálny. ~~(Kuba, 6 bodov.)~~

uvnitř 2. Je daná guľa a vo vnútri nej pevný bod P. Nech A, B, C sú ľubovoľné body ležiace na povrchu gule také,
navzájem
že úsečky PA, PB, PC sú ~~po dvoch na seba~~ kolmé a PQ je telesová uhlopriečka kvádra s hranami PA, PB, PC.
Určte množinu všetkých takých bodov Q. ~~(USA, 7 bodov)~~

3. Množina všetkých ~~celých kladných~~ čísel je zjednotením dvoch disjunktných podmnožín přirozených

$$\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}, \{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\},$$

pričom

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots,$$

$$g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$$

a

$$g(n) = f(f(n)) + 1$$

pre všetky $n \geqq 1$.
Určte $f(240)$. ~~(Veľká Británia, 8 bodov)~~.

Druhý deň súťaže — 7. júla 1978

4. V trojuholníku ABC je $|AB| = |AC|$. Kružnica, ktorá sa dotýka zvnútra kružnice opísanej trojuholníku

ABC, sa dotýka úsečiek AB, AC ~~v uvedenom poradí~~ v bodoch P, Q.
Dokážte, že stred úsečky PQ je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC. ~~(USA, 5 bodov.)~~

5. Nech a_1, a_2, a_3, ..., a_k, ... je postupnosť navzájom rôznych ~~celých kladných~~ přirozených čísel. Potom pre každé ~~celé~~ přirozené $n \geqq 1$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k};$$

dokážte. ~~(Francúzsko, 6 bodov).~~

6. Členovia medzinárodnej spoločnosti sú príslušníkmi 6 rôznych zemí. Zoznam členov tejto spoločnosti obsahuje 1978 mien očíslovaných 1, 2, ..., 1978.
Dokážte, že existuje aspoň jeden ~~taký~~ člen spoločnosti, jelikož ktorého poradové číslo v tomto zozname sa rovná buď súčtu poradových čísel dvoch iných členov z jeho krajiny, země alebo dvojnásobku poradového čísla jedného z členov spoločnosti z jeho krajiny. ~~(Holandsko, 8 bodov.)~~

V zátvorke za textom úlohy je meno krajiny, ktorá predložila návrh úlohy a maximálny počet bodov, ktorý mohol riešiteľ získať za jej úplné riešenie. Pri súťaži však žiaci tieto údaje nepoznali. Vedeli iba, že na riešenie každej trojice súťažných úloh majú 4 hodiny čistého času. Pre zodpovedanie otázok na prípadné nejasnosti v texte se opäť použila osvedčená písomná forma, pri ktorej žiak má možnosť poslať otázku na lístku k tomu určenom najneskoršie pol hodiny po obdržaní textov. Otázka sa prečíta a preloží v jury, ktorá taktiež schvaľuje plný text odpovede.

Treba povedať, že tohto roku ako v prvý, tak aj v druhý súťažný deň bolo žiackych otázok výnimočne málo. V prvý deň (6. 7.) po splnení tejto úlohy odišli členovia jury do budovy ministerstva školstva RSR, kde ich prijala ministerka školstva *prof. Ing. S. Gideaová, DrSc.*, člen korešpondent AVRSR. Vo svojom privítacom prejave o.i. vyzdvihla význam matematiky pre vedecko-technický rozvoj i formovanie osobnosti mladých ľudí a podrobne informovala o organizácii školstva v RSR. Po prijatí na MŠ RSR čakal členov jury únavný návrat do Bušteni, kde zasadli k obedu v čase obvyklom pre olovrant.

V piatok 7. 7. sa história s cestovaním do Bukurešti a späť zopakovala, ale s tým rozdielom, že po zodpovedaní otázok k textom nasledovala malá autokarová prehliadka hlavného mesta RSR so zastávkou v budove rektorátu bukurešťskej univerzity, kde členov jury prijal jej rektor *prof. dr. Gheorghe Ciuciu*, ktorý je profesorom matematiky. Od neho sa dozvedeli najdôležitejšie údaje o štruktúre univerzity s 8 fakultami. O cieľoch a organizačnej štruktúre rumunskej matematickej spoločnosti informoval v krátkom prejave jej podpredseda *akad. Caius Jacob.* Nasledovala prehliadka nových štvrtí takmer dvojmiliónovej rumunskej metropoly, kde sa prítomní mali možnosť presvedčiť, že tvrdenie o 10 kvetoch vysadených v „Paríži východu" na každého obyvateľa nie je nadnesené. Táto malá exkurzia sa skončila expresnou prehliadkou známeho bukurešťského skanzenu „Museul satului".

Po návrate z Bušteni a fázovo posunutom obede nasledovala schôdzka jury s koordinátormi, ktorých bolo 18 — trojica pre každú úlohu. Na nej boli stanovené niektoré zásady pre hodnotenie riešení. Spoločné rokovanie jury s koordinátormi pokračovalo ešte v sobotu ráno. V jeho závere predseda jury prof. Cuculescu vyslovil zásadu, že žiak, ktorý vyriešil úlohu, hoci aj s chybami, mal by dostať za ňu aspoň polovicu možných bodov. Naopak ten, ktorý úlohu nevyriešil, by v žiadnom prípade nemal dostať viac než polovicu možných bodov.

Potom už nasledovala náročná a zodpovedná práca spojená s hodnotením a koordináciou, ktorá si vyžiadala zvyšok soboty (8. 7.) a celú nedeľu (9. 7.).

V pondelok 10. 7. predpoludním sa jury zišla na svoje záverečné zasadnutie. Pri jeho otvorení predseda jury prof. Cuculescu blahoželal akad. Mihocovi k 72. narodeninám, ktoré oslávil počas XX. MMO. Na programe rokovania bolo — ako je to na MMO obvyklé — najskôr schválenie hodnotení v tých prípadoch, keď nedošlo k dohode medzi koordinátormi a vedením delegácie. Tentoraz boli iba 3 také prípady a boli vyriešené pomerne rýchle. Potom nasledovali návrhy na udelenie špeciálnych cien za originálne riešenia úloh a po prestávke slúžiacej k tomu, aby sa členovia jury s riešeniami pred hlasovaním mohli podrobnejšie zoznámiť, sa rozhodovalo o ich udelení. Za riešenie 1., 4. a 5. úlohy neboli predložené žiadne návrhy, zo 4 návrhov na špeciálnu cenu za 2. úlohu neschválila jury ani jeden. Zo 6 návrhov za 3. úlohu prešli dva: fínskemu žiakovi Markkanenovi Markku a Holanďanovi Marc Leeuwenovi a boli schválené oba návrhy na špeciálnu cenu za riešenie 6. úlohy: Angličanovi Richardovi Ewen Borcherdsovi a vyššie menovanému holandskému žiakovi, ktorý takto získal dve špeciálne ceny aj napriek tomu, že na základe ďalšieho rozhodnutia jury dostal za celkový výsledok na XX. MMO len druhú cenu. Rozhodnutie o bodových hraniciach pre udelenie cien padlo tentoraz totiž až príliš rýchle a patrilo k najmenej presvedčivým rozhodnutiam jury XX. MMO. Priveľmi bolo poznamenané extrémom, do ktorého zašiel predseda jury prof. Cuculescu v snahe vyvarovať sa rezolútneho vedenia jury, ktoré mal v čerstvej pamäti z XIX. MMO. Rozhodovalo sa totiž prakticky len medzi dvoma predloženými návrhmi: juhoslovanským (I. cena od 40 do 32 bodov, II. 31—26, III. 25—22) a švédskym (I. 40—35, II. 34—27, III. 26—22) a pomerom hlasov 9 : 8 prešiel švédsky návrh, keď predseda jury sa nevyjadril, ale iba lakonicky konštatoval, že zaň hlasovali A, BG, GB, M, S, SF, TR, USA a VN. Stalo sa teda v dôsledku tohto rozhodnutia, že aj napriek čl. 14 org. poriadku XX. MMO, podľa ktorého počet udelených I., II. a III. cien má byť približne v pomere 1 : 2 : 3, bol prijatý návrh, kde tento pomer je 5 : 20 : 38 a jedným hlasom prepadol návrh s pomerom 11 : 20 : 32. Posledná časť rokovania jury bola venovaná rozprave o otázkach organizovania budúcich MMO, ktorú predseda zaradil do programu pod vplyvom vystúpenia vietnamského delegáta pri panelovej diskusii v prvý deň olympiády. Najviac diskutovanými otázkami boli viacnásobná účasť jedného žiaka na MMO a potreba akéhosi minimálneho tématického programu

MMO. Okrem toho československá delegácia doporučovala znížiť počet členov družstva vzhľadom na organizačné ťažkosti súvisiace s rastúcim počtom krajín zúčastňujúcich sa MMO a poľský delegát navrhoval, aby za miesta práce jury boli, pokiaľ možno, volené univerzitné centrá, v ktorých je k dispozícii knižnica s dostatkom matematickej literatúry. Šlo však, ako tomu ani inak nemohlo byť, len o akademickú debatu, bez prijímania záverov.

Chýbalo tentoraz tradičné vystúpenie delegáta krajiny, ktorá sa chystá usporiadať budúcu MMO. V kuloároch sa totiž hovorilo len o tom, že MMO v roku 1980 môže usporiadať Mongolsko i Veľká Británia a v roku 1981 USA, ale o MMO v roku 1979 sa nikto neuchádzal.

Večer v spoločenskej miestnosti hotela pre členov jury predviedol tance a piesne z rôznych oblastí Rumunska folklórny súbor v ľudových krojoch a potom nasledovala rozlúčková večera na záver spoločnej práce v Bušteni. Na nej akad. Mihoc poďakoval za aktivitu počas práce jury všetkým delegáciám, zvlášť Turecku, ktoré sa MMO zúčastnilo po prvý raz a vyslovil poľutovanie nad tým, že niektoré delegácie — pravidelní účastníci MMO — sa tejto jubilejnej olympiády nezúčastnili. Mal tým na mysli Maďarsko, NDR a ZSSR, ktoré na doterajších MMO patrili tradične k najúspešnejším. Z Budapešti na XX. MMO pricestoval redaktor *L. Csirmaz*, ktorý sa vydával za maďarského pozorovateľa a na slávnostnom otvorení i zakončení olympiády zaujal miesto za predsedníckym stolom. Podľa jeho informácií sa Maďarsko na XX. MMO starostlivo pripravilo, ale údajne nedostalo pozvánku. Podľa informácií usporiadateľov ministerstvá školstva NDR a ZSSR vysvetlili neúčasť svojich delegácií krátkosťou času na ich prípravu pre oneskorené obdržanie pozvania. Každopádne však neúčasť spomínaných delegácií bola pre XX. MMO ochudobnením.

Jednotlivé súťažné družstvá po svojom príchode do Bukurešti (prevažne v pondelok 3. 7.) boli ubytované v internáte Agronomického inštitútu Nicolae Balcescu. V utorok (4. 7.) predpoludním si vypočuli zasvätené informácie o histórii RSR a jej hlavného mesta, po ktorých nasledovala okružná jazda autokarom po Bukurešti zakončená prehliadkou národnej galérie RSR. Večer sa v klube mládeže stretli s predstaviteľmi stredoškolského oddelenia ÚV Zväzu komunistickej mládeže Rumunska a pozreli si kultúrny program, po ktorom nasledovalo spoločenské posedenie s hudbou a tancom.

V stredu (5. 7.) predpoludním si mohli pozrieť Museul satului a Múzeum prírodných vied G. Antipu a popoludní oddychovali, aby nazbierali dostatok fyzických i psychických síl pre náročnú súťaž, ktorá na nich v nasledujúcich dvoch dňoch čakala. V sobotu 8. 7. ich autobusy odviezli k Čiernemu moru, kde boli ubytovaní v Navodari pri Konstanci. Okrem kúpania v mori a pobytu na pláži si pozreli kultúrny program, ktorý pre nich pripravili pionieri v najväčšom pionierskom tábore v Europe v Navodari (8. 7. večer), akvárium s morskou faunou a flórou a archeologické múzeum (9. 7. predpoludním). V pondelok 10. 7. večer sa vrátili naspäť do Bukurešti, kde ich v utorok predpoludním čakalo v aule agronomického inštitútu malé sympózium, počas ktorého predviedli svoje riešenia účastníci MMO odmenení špeciálnymi cenami a tí, ktorí boli na špeciálne ceny navrhovaní. Na druhú polovicu sympózia sa dostali už aj členovia jury, ktorí sa ráno definitívne rozlúčili s Bušteni a na zvyšok rumunského pobytu boli ubytovaní v budove internátu bukurešťského agronomického inštitútu. Už počas sympózia, ale najmä po jeho skončení dostávali súťažiaci od vedení svojich delegácií prvé informácie o výsledkoch, ktoré na XX. MMO dosiahli.

V utorok popoludní sa uskutočnila návšteva Múzea histórie RSR a večer slávnostné vyhlásenie výsledkov XX. MMO pôvodne plánované na nasledujúci deň. Po úvodnom slove akad. Mihoca nasledovalo odovzdanie diplomov a vecných cien, ktoré odmenení žiaci prevzali z rúk ministerky školstva RSR. Potom prehovoril vedúci delegácie Veľkej Británie prof. Lyness, ktorý za zahraničných účastníkov XX. MMO poďakoval hostiteľom za veľmi dobré podmienky, ktoré vytvorili pre žiakov i členov jury a na záver pozval delegácie všetkých zúčastnených krajín na XXI. MMO v roku 1979 do svojej vlasti. Za odmenených žiakov hovorili *Mark Kleiman* z USA (najúspešnejší účastník XX. MMO, keď jediný získal plný počet 40 bodov), Angličan *Alan John Dix* (vyslovil potešenie nad tým, že budúca MMO bude v jeho krajine) a najlepší z rumunských žiakov *Victor Nistor*. Ministerka školstva RSR prof. S. Gideaová vo svojom záverečnom slove opätovne zdôraznila význam matematiky pre rozvoj ostatných vied, najmä prírodných a technických a zapriala všetkým účastníkom XX. MMO ďalšie úspechy v matematike i v osobnom živote. Za zmienku stojí, že okrem iných hostí sa slávnostného záveru XX. MMO zúčastnila tiež dcéra prezidenta RSR Zoja Ceaušescu, ktorá ako vedúca oddelenia aplikovanej matematiky v Ústave pre rozvoj vedy AV RSR bola členkou organizačného výboru olympiády.

Krátko po slávnosti v aule agronomického inštitútu sa všetci účastníci XX. MMO v bukureštskej „Sala Majestic" zúčastnili na kultúrnom programe, v ktorom účinkoval Ústredný súbor pionierov RSR.

V stredu 12. 7. predpoludním sa v zasadačke MŠ RSR uskutočnilo stretnutie vedúcich delegácií a žiakov, ktorí na XX. MMO získali ceny s predstaviteľmi ÚV Zväzu komunistickej mládeže RSR, ktorému predsedala ministerka školstva s. prof. Gidea. Najskôr predseda jury prof. Cuculescu stručne zhodnotil výsledky XX. MMO, kde o. i. vyzdvihol najmladšieho čs. účastníka J. Nekovářa a Juhoslovana M. Bestvinu, ktorí by si boli zaslúžili 1. cenu, ale nedostali ju pre vyššie spomínané problematické rozhodnutie jury. Potom predseda ÚV ZKM odovzdal diplomy a vecné ceny niekoľkým účastníkom XX. MMO. Okrem najúspešnejšieho *Marka Kleimana* z USA a vyššie spomenutých dvoch, pre ktorých to mala byť zrejme satisfakcia, šlo ešte o 13ročného Švéda *J. Rodo*, ktorý bol najmladším účastníkom olympiády (v súťaži získal 16 bodov), najlepšieho z domácich *V. Nistora*, Bulharku *N. Ribarsku*, ktorá bola najúspešnejšou zo 4 dievčat súťažiacich na XX. MMO

(2 z BG, 1 z M, 1 z YU) a vedúceho delegácie VSR, ktorá mala najvyrovnanejšie družstvo, keď všetci jeho členovia získali v súťaži cenu. Za zahraničných účastníkov olympiády na stretnutí prehovoril vedúci delegácie USA prof. *S. L. Greitzer* a na záver odoslali účastníci stretnutia pozdravný telegram prezidentovi RSR N. Ceaušescuovi.

Večer po koncerte orchestra inžinierov bukureštskej polytechniky, ktorý sa pre účastníkov XX. MMO uskutočnil v rumunskom Atheneu a nahrávala ho aj rumunská televízia, sa v jedálni komplexu Agronomického inštitútu Nicolae Balcescu konala záverečná večera za účasti ministerky školstva a ďalších hostí. Vzhľadom na oneskorený začiatok (22.30) skončila až po polnoci vzájomnou rozlúčkou jednotlivých delegácií, ktoré od štvrtku rána (13. 7.) postupne opúšťali pohostinnú pôdu hlavného mesta Rumunska.

Delegácia ČSSR — jedna z najúspešnejších na MMO nielen za posledné roky, ale snáď v celej ich dvadsaťročnej histórii — odchádzala popoludní 13. 7. s takmer dvojhodinovým meškaním z bukureštského letiska Otopeni do hlavného mesta svojej vlasti. Jubilejná medzinárodná matematická olympiáda sa vyznačovala maximálnou snahou hostiteľov o vytvorenie optimálnych podmienok, čo sa im vo veľkej miere podarilo. Značnú pozornosť XX. MMO venovali rumunská tlač, rozhlas i televízia, ktorá pohotovo informovala o otvorení i slávnostnom závere súťaže.

2. VÝSLEDKY XX. MMO

Aj napriek tomu, že jury výberu šestice súťažných úloh venovala až neobvykle veľkú pozornosť, celkom sa jej nevydaril. Vybraný súbor pozostával totiž z trojice pomerne ľahkých (1., 4., 5.) a z trojice relatívne náročných úloh, z ktorých najmä 6. sa ukázala byť nad sily prevažnej väčšiny súťažiacich. Chýbali úlohy strednej obťažnosti, ako to v ankete po súťaži konštatovali všetci členovia nášho družstva a ako to nakoniec objektívne ukazuje tabuľka s prehľadom o počte účastníkov olympiády, ktorí získali ten-ktorý počet bodov za riešenie jednotlivých úloh.

Počet získaných bodov	úl. č. 1	úl. č. 2	úl. č. 3	úl. č. 4	úl. č. 5	úl. č. 6
8	—	—	20	—	—	8
7	—	10	2	—	—	0
6	72	14	3	—	98	0
5	13	9	12	96	8	1
4	5	24	16	3	2	4
3	12	5	13	4	5	5
2	11	10	15	7	3	9
1	12	16	20	8	10	42
0	7	44	31	14	6	63

Relatívna úspešnosť účastníkov XX. MMO pri riešení jednotlivých súťažných úloh je vyjadrená takto: 1. 74,1 %, 2. 37,4 %, 3. 38,4 %, 4. 79,7 %, 5. 84,2 % a 6. 15,2 %. V protiklade s názorom jury vyjadreným počtom bodov za úplné riešenie úloh sa ukázala byť najľahšou 5. úloha, zatiaľ čo 2. úloha bola pre súťažiacich rovnako obťažná ako za náročnejšiu považovaná 3. úloha, najmä keď pri prijatej formulácii 3. úlohy bolo možné za ňu získať plný počet bodov mechanickým výpočtom funkčných hodnôt krok za krokom. Plne sa však potvrdilo, že 6. úloha je najnáročnejšia z celého súboru.

S jednotlivými úlohami si najlepšie poradili tieto družstvá: 1. Rumunsko, ktoré stratilo len 2 body, 2. ČSSR a VSR, ktoré získali po 37 bodov z 56 možných, 3. USA ziskom 47 bodov zo 64 možných, 4. ČSSR, Rumunsko, VSR a Juhoslávia s plným bodovým ziskom, 5. Bulharsko, Poľsko, Rumunsko, USA, VSR s plným bodovým ziskom a 6. Rumunsko so ziskom 36 bodov zo 64 možných.

Celkové výsledky XX. MMO sú uvedené v nasledujúcej prehľadnej tabuľke.

Veľký skok v porovnaní s XIX. MMO zaznamenalo družstvo hostiteľskej krajiny (v Belehrade skončilo so 122 bodmi na 15. mieste), ktoré plne využilo domáce prostredie po perfektnej príprave. Rumunská osmička bola totiž vybraná z 36 žiakov, ktorí sa po dva mesiace pripravovali po 6 hodín denne a absolvovali niekoľko výberových testov. Príjemne prekvapili tiež družstvá VSR a Kuby. Kubánski žiaci po prvý raz získali dve tretie ceny a hoci boli len 4, v bodovom súčte predstihli kompletné družstvá nováčka na MMO — Turecka i tradičného účastníka — Mongolska. V porovnaní s vlaňajškom sa zlepšili ČSSR i Francúzsko, slabší bol výsledok Holandska, Poľska i Bulharska. Ostatné družstvá si v podstate udržali predchádzajúce pozície.

Krajina	Počet získaných cien				Špec. cien	Súčet bodov	Neoficiál. poradie	Pozn.
	I.	II.	III.	Spolu				
A	—	3	2	5	—	174	9.	
BG	—	1	3	4	—	182	7.	
C	—	—	2	2	—	68		4 žiaci
CS	—	2	3	5	—	195	5.	
D	1	—	3	4	—	184	6.	
F	—	2	4	6	—	179	8.	
GB	1	2	2	5	1	201	3.	
M	—	—	—	—	—	61	16.	
NL	—	1	1	2	2	157	11.	
PL	—	—	2	2	—	156	12.	
R	2	3	2	7	—	237	1.	
S	—	—	1	1	—	117	14.	
SF	—	—	2	2	1	118	13.	
TR	—	—	—	—	—	66	15.	
USA	1	3	3	7	—	225	2.	
VN	—	2	6	8	—	200	4.	
YU	—	1	2	3	—	171	10.	

Z jednotlivcov dosiahol plný bodový zisk len Američan *N. Kleiman* a jediný bod stratil Angličan *R. E. Borcherds*. Bodové straty ostatných boli viac než dvojbodové.

Práca jury neprevýšila priemer a ako už z predchádzajúceho vyplýva, niektoré jej rozhodnutia boli poznamenané prílišnou opatrníckosťou po odbornej i jazykovej stránke pozoruhodne zdatného predsedu prof. Cuculescu. Jeho nespornou prednosťou boli tiež viacročné skúsenosti z práce jury MMO vo funkcii vedúceho rumunskej delegácie. Celkove nedošlo v zložení jury k podstatnejším zmenám, čo najlepšie vidno z nasledujúceho prehľadu:

Krajina	Vedúci delegácie — člen jury	Jeho zástupca
A	*Thomas Mühlgassner,* Pädagogische Akademie Eisenstadt	*Wolfgang Ratzinger,* Pädagogische Akademie Linz
BG	*Jordan Borisov Tabov* Matematický ústav AV, Sofia	*Dimo Serafimov Angelov* Centr. ústav ďalšieho vzdelávania učiteľov, Sofia
C	*Felix Recio Pacheco* Instituto de Superación Educacional Havana	—
CS	*Dr. Jozef Moravčík, CSc.,* docent VŠD Žilina	*Dr. František Zítek, CSc.* MÚ ČSAV Praha
D	*Prof. dr. Arthur Engel,* Universität Frankfurt	*Horst Sewerin,* profesor Leibniz-Schule Frankfurt
F	*Claude Deschamps,* profesor Lycée Louis le Grande Paris	*Denis Gerll,* profesor Lycée Louis le Grande Paris
GB	*Robert Cranston Lyness,* inšpektor, Blackpool	*John William Hersee* School Mathematics Project, Bristol
M	*Uršincerengin Sanžmjatav* Univerzita Ulan Bator	*Saravin Miagmar* Ústav pedagogických vied Ulan Bator
NL	*Dr. Jan van de Craats* Mathematisch Instituut Rijksuniversiteit Leiden	*Albert Willem Boon,* profesor gymnázia ,,Sorghvliet", Leidschendam

Krajina	Vedúci delegácie — člen jury	Jeho zástupca
PL	*Andrzej Mąkowski*, Univerzita Varšava	*Maciej Bryński*, Univerzita Varšava
R	*Dimitrie Draghicescu*, Universitatea din Craiova	*Constantin Ottescu*, profesor Liceul de Matematica si fizica nr. 6 Bucuresti
S	*Dr. Lars-Oke Lindahl*, Univerzita Uppsala	*Dr. Rune Gustavsson*, Univerzita Uppsala
SF	*Dr. Matti Lehtinen*, Univerzita Helsinki	*Dr. Erkki Pehkonen*, Univerzita Helsinki
TR	*Prof. Berki Yurtsever*, Univerzita Ankara	*Dilaver Cetin*, Matematický ústav Ankara
USA	*Prof. dr. Samuel L. Greitzer* Rutgers University, New Brunsvick	*Prof. Murray S. Klamkin*, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada
VN	*Le Hai Chau*, Ministerstvo školstva Hanoi	*Nguyen - Dang - Phat*, Pedagogický ústav č. 1, Hanoi
YU	*Mgr. Zoran Kadelburg* Univerzita Belehrad	*Dragoslav Ljubić*, profesor matemat. gymnázia „Veliko Vlahovič“, Belehrad

3. ČESKOSLOVENSKÁ ÚČASŤ NA XX. MMO

Družstvo pre jubilejnú MMO vybralo predsedníctvo ÚV MO z 12 účastníkov sústredenia v Bratislave (12. až 24. 6. 1978) hlavne na základe výsledkov samostatného riešenia úloh v tomto sústredení, i keď prihliadalo k výsledkom II. a III. kola MO a korešpondenčného seminára, na základe ktorých boli účastníci sústredenia vybraní. Už pri nominácii družstva v PÚV MO sa konštatovalo, že je to jeden z najvyrovnanejších kolektívov, ktoré ČSSR na MMO reprezentovali, čo dosiahnuté výsledky jednoznačne potvrdili.

Príjemným prekvapením bol výkon najmladšieho člena družstva *J. Nekováře*, ktorý počas pobytu v Bukurešti oslávil ešte len 15. narodeniny. Právom by si bol zaslúžil I. cenu, o ktorú ho pripravilo len vyššie komentované rozhodnutie jury. Veľmi blízko k I. cene mal aj *J. Kratochvíl*, čo by jeho štvrtej účasti na MMO bolo iste zodpovedalo. Potešiteľné je, že tohoročné družstvo nemalo v svojom strede vyloženého outsidera a všetci jeho členovia sa usilovali podať maximálny výkon. Možno povedať, že urobili všetko, čo bolo v ich silách, i keď by sa snáď od Z. Kalouska a I. Tureka, ktorí získali na XIX. MMO II., resp. III. cenu, pri druhom účinkovaní na MMO bolo dalo očakávať viac. I. Turek sa o III. cenu pripravil len zbytočnou stratou 3 bodov za riešenie 5. úlohy, keď sa odvolal na výsledok, ktorého správnosť nedokázal, bez citovania prameňa. Naši žiaci najviac stratili pri 6. a 3. úlohe, ktoré boli pre nich netradičné a v príprave družstva sa úlohám

Por. čís.	Meno a priezvisko trieda, škola	Počet bodov získaný za riešenie							Celkové poradie cena
		úl. č. 1	úl. č. 2	úl. č. 3	úl. č. 4	úl. č. 5	úl. č. 6	spolu	
1.	*Peter Filakovszky* 4. tr. G Ban. Štiavnica	3	6	2	5	6	0	22	56.—63. III. cena
2.	*Zdeněk Kalousek,* 4. tr. G Jablonec n. N.	6	0	4	5	6	0	21	64.—77.
3.	*Jan Kratochvíl,* 4. tr. G Pardubice	6	7	7	5	6	1	32	10.—11. II. cena
4.	*Mirko Navara,* 4. tr. G Praha, W. Piecka 2	2	5	1	5	6	1	20	78.—80.
5.	*Jan Nekovář,* 1. tr. G Praha, Arabská 14	6	5	8	5	6	4	34	6.—7. II. cena
6.	*Ilja Turek,* 4. tr. G Hradec Králové	6	4	0	5	3	1	19	81.—84.
7.	*Zdeněk Vavřín,* 4. tr. G Praha, Štěpánská 22	6	6	0	5	6	1	24	35.—46. III. cena
8.	*Milan Veščičík,* 4. tr. G Bratislava, ul. ČA	6	4	2	5	6	0	23	47.—55. III. cena
Súčet družstva		41	37	24	40	45	8	195	

podobného druhu nevenovala dostatočná pozornosť. Ako družstvo bodovým ziskom za jednotlivé úlohy obsadili v 1. úlohe 7.—8., v 2. 1.—2., v 3. 9.—10, v 4. 1.—4., v 5. 6.—8. a v 6. 9.—10. miesto.

Znovu sa potvrdilo, že dve sústredenia (týždenné v apríli a dvojtýždenné v júni) a korešpondenčný seminár prinášajú na MMO svoje ovocie. Napriek niektorým kritickým pripomienkam to svorne konštatovali všetci členovia nášho družstva v bukureštskej ankete. Cesta k ďalšiemu zlepšeniu vedie cez odstránenie nedostatkov a zvýšenie cieľavedomej systematičnosti v práci s talentami. Vplyv korešpondenčného seminára možno badať aj na zlepšení písomného prejavu našich žiakov, o ktorom sa pochvalne vyjadrovali tiež rumunskí koordinátori.

Družstvo tvorilo opravdu veľmi dobrý kolektív a úspešne reprezentovalo aj po spoločenskej stránke.

Čs. delegácia aktívne prispela aj k práci jury niekoľkými konštruktívnymi návrhmi, ktoré boli akceptované.

Možno preto účasť ČSSR na jubilejnej MMO celkove hodnotiť ako veľmi úspešnú a želať si, aby si i v budúcich rokoch udržala naša reprezentácia na MMO nastúpený pozitívny trend, ako to zodpovedá tradíciám a úrovni našej výchovnovzdelávacej sústavy.

Riešenie 1. úlohy: Z textu úlohy je zrejmé, že rozdiel

$$1978^n - 1978^m = 1978^m (1978^{n-m} - 1)$$

je deliteľný číslom $1000 = 2^3 . 5^3$. Keďže 1978^m je zrejme párne číslo a $1978^{n-m} - 1$ číslo nepárne, musí platiť: $2^3 / 1978^m$, $5^3 / 1978^{n-m} - 1$. Pretože $1978 = 2 . 989$, musí byť $m \geqq 3$. Ďalej musí byť $1978^{n-m} \equiv 1 \pmod 5$ čiže $(-2)^{n-m} \equiv 1 \pmod 5$. Pretože $(-2)^2 = 4 \equiv -1 \pmod 5$ a teda $(-2)^4 \equiv 1 \pmod 5$, musí byť $n - m = 4k$, kde $k \geqq 1$ je prirodzené číslo. Zostáva nám nájsť také najmenšie prir. číslo k, pre ktoré $125 / 1978^{4k} - 1$. Keďže $1978^4 \equiv (-22)^4 = (-11 . 2)^4 = (121 . 4)^2 \equiv (-4 . 4)^2 = 256 \equiv 6 \pmod{125}$, platí kongruencia $1978^{4k} \equiv 1 \pmod{125}$ vtedy a len vtedy, keď $6^k \equiv 1 \pmod{125}$. Z toho, že $6^k = (1 + 5)^k \equiv 1 + k . 5 + \frac{k(k-1)}{2} . 5^2$ $\pmod{125}$ vyplýva, že číslo $5k\,[2 + 5(k-1)] . \frac{1}{2}$ má byť deliteľné číslom 125. Číslo v hranatej zátvorke však pri žiadnom k nie je deliteľné číslom 5 a tak najmenšie $k = 25$ a $n - m = 100$. Pre minimálne $m = 3$ je teda $n = 103$ a súčet $m + n = 106$ je minimálnym súčtom požadovaných vlastností.

Riešenie 2. úlohy: Označme O stred danej gule **G** a R jej polomer, takže platí: $OA^2 = OB^2 = OC^2 = R^2$. Keďže $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ a podľa podmienok úlohy $\overrightarrow{PA} . \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} . \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} . \overrightarrow{PC} = 0$, bude $|OQ|^2 = |OP|^2 + |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + 2(\overrightarrow{OP} . \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{OP} . \overrightarrow{PB} +$

$+ \overrightarrow{PO} . \overrightarrow{PC})$. Ak dosadíme do tejto rovnosti $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$, po jednoduchej úprave dostaneme $|OQ|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 - 2\,|OP|^2$ čiže $|OQ|^2 = 3\,R^2 - 2\,|OP|^2$, čo je pri pevnom P veličina konštantná. Z toho vyplýva, že skúmaná množina bodov leží na guľovej ploche so stredom O a polomerom $\sqrt{3R^2 - 2\,|OP|^2} > R$, pretože $|OP|^2 < R^2$.

Ukážeme teraz, že každý z bodov tejto guľovej plochy patrí vyšetrovanej množine bodov. Nech Q je ľubovoľný bod, pre ktorý platí: $|OQ| = \sqrt{3R^2 - 2OP^2}$. Guľová plocha s priemerom $|PQ|$ pretína povrch gule $\mathbf{G}$, pretože $|OP| < R < |OQ|$. Nech C je ľubovoľný pevný bod rezovej krivky a N k nemu protiľahlý vrchol pravouhlého rovnobežníka $PCQN$. Jednoduchým výpočtom sa ľahko dokáže, že pre polohové vektory vrcholov pravouhlého rovnobežníka platí: $|OP|^2 + |OQ|^2 = |OC|^2 + |ON|^2$, z čoho vyplýva: $|ON|^2 = |OP|^2 + (3R^2 - 2\,|OP|^2) - R^2 = 2R^2 - |OP|^2 > R^2$. Bod N leží teda mimo gule $\mathbf{G}$. Nech ϱ je rovina idúca bodom P kolmo na PC. Táto pretína guľu $\mathbf{G}$ v kružnici k. Bod N leží zrejme v rovine ϱ mimo kružnice k, kým bod P leží vo vnútri tejto kružnice. Z toho vyplýva, že kružnica s priemerom $|PN|$ zostrojená v rovine ϱ pretína kružnicu k. Jeden z priesečníkov označme B a nech A je vrchol pravouhlého rovnobežníka $PBNA$ protiľahlý bodu B. Zrejme platí: $|OA|^2 = |OP|^2 + |ON|^2 - |OB|^2 = |OP|^2 + 2R^2 - |OP|^2 - R^2 = R^2$, čo znamená, že aj bod A

leží na guli **G** a PQ je telesová uhlopriečka kvádra s hranami PA, PB, PC.

Riešenie 3. úlohy: Pretože postupnosti $\{f(n)\}$, $\{g(n)\}$ sú obe rastúce a množiny ich členov sú disjunktné, vzhľadom na rovnosť

$$g(n) = f(f(n)) + 1$$

platí zrejme pre každé prir. číslo n : $f(f(n)) = f(n) + n - 1$. (Od čísla $f(f(n))$ okrem menších hodnôt funkcie f je menších práve $n - 1$ hodnôt funkcie g.) Z toho vyplýva, že pre každé prir. číslo n je

$$g(n) = f(n) + n\,. \tag{1}$$

Z (1) máme, že $g(1) > 1$, preto $f(1) = 1$ a $g(1) = f(f(2)) + 1 = f(1) + 1 = 2$. Ďalej je zrejmé, že pre každé prir. číslo n platí: $g(n + 1) - g(n) = f(n + 1) - f(n) + 1 \geqq 2$. Preto $f(2) = 3$ a vzhľadom na (1) $g\,(2) = 3 + 2 = 5$. Postupným aplikovaním odvodených vzťahov dostávame: $f(3) = 4$, $f(4) = 4 + 2 = 6$, $f(6) = 6 + 3 = 9$, $f(9) = 9 + 5 = 14$, $f(14) = 14 + 8 = 22$, $f(22) = 22 + 13 = 35$, $f(35) = 35 + 21 = 56$, $f(56) = 56 + 34 = 90$, $f(90) = 90 + 55 = 145$, $f(145) = 145 + 89 = 234$, $f(234) = 234 + 144 = 378$.

Podľa definície je $g(35) = f(f(35)) + 1 = f(56) + 1 = 91$. Preto $f(57) = 92$ a ďalej $f(92) = 92 + 56 = 148$, $f(148) = 148 + 91 = 239$, $f(239) = 239 + 147 = 386$. Zrejme je $g(148) = f(f(148)) + 1 = f(239) + 1 = 387$. Preto $f(240) = 388$.

Iné riešenie (náčrt): Nech $\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Dá sa dokázať, že pre všetky prir. čísla n platí: $f(n) = [\tau n]$, kde $[c]$ znamená celú časť čísla c; $f(1) = [\tau] = 1$ a vzhľadom na (1) je $g(n) = [\tau n] + n = [(\tau + 1)\, n]$. Ukážeme, že takto definované postupnosti $\{f(n)\}$, $\{g(n)\}$ sú disjunktné a pokrývajú celú množinu prirodzených čísel. Ak označíme $F(m)$ počet prvkov (kardinálne číslo) množiny $\{n | n \geqq 1,\ [\tau n] \leqq m\}$ a $G(m)$ počet prvkov množiny $\{n | n \geqq 1,\ [(\tau + 1)\, n] \leqq m\}$, kde m je ľubovoľné pevné prir. číslo, ľahko sa ukáže, že

$$\begin{aligned} \frac{m+1}{\tau} - 1 &< F(m) < \frac{m+1}{\tau}\,, \\ \frac{m+1}{\tau+1} - 1 &< G(m) < \frac{m+1}{\tau+1} \end{aligned} \tag{2}$$

a keďže $\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{1}{\tau+1} = 1$, sčítaním nerovností (2) dostaneme

$$m - 1 < F(m) + G(m) < m + 1\,,$$

z čoho vyplýva $F(m) + G(m) = m$, čím je naše tvrdenie dokázané. Z toho, že $\tau \,.\, 240 = 120(\sqrt{5} + 1) = 388{,}3$ hneď máme $f(240) = 388$.

Pozn.: Úlohu bolo možné riešiť aj zostavením tabuľky funkčných hodnôt funkcií f a g pre argumenty od 1 do 240, ako to o. i. urobili aj naši žiaci *J. Nekovář* (bez chyby) a *J. Kratochvíl* (s prepisom pri číslovaní argumentov).

Riešenie 4. úlohy (podľa riešenia *Z. Kalouska*). Označme D dotykový bod kružnice opísanej trojuholníku

ABC a kružnice prechádzajúcej bodmi P, Q so stredom M na osi uhla BAC. Keďže D leží na osi uhla BAC a teda aj na priamke prechádzajúcej stredom kružnice opísanej $\triangle ABC$, je $\sphericalangle ABD = 90°$. Z toho vyplývajú nasledujúce relácie

$$\triangle AKS \sim \triangle APM \sim \triangle ABD, \quad \triangle APS \sim \triangle ABL.$$

Je preto

$$|KS| : |PM| = |AS| : |AM|,$$

z čoho $|KS| = |PM| . \dfrac{|AS|}{|AM|}$;

rovnako z toho, že $|SL| : |AS| = (|AB| - |AP|) : |AP| = |MD| : |AM|$ máme hneď, že $|SL| = |MD| . \dfrac{|AS|}{|AM|}$.

Keďže $|MP| = |MD|$, dostávame z posledných dvoch rovností: $|KS| = |SL|$. Pretože však uhly AKS a SLB sú pravé, môžu byť body K, L dotykovými bodmi kružnice so stredom v bode S a priamok AB, resp. BC a vzhľadom na uvedenú rovnosť oboch úsečiek je to kružnica vpísaná trojuholníku ABC, ako sme mali dokázať.

Riešenie 5. úlohy: Nech $a_{k+1} \geqq a_k$ pre nejaké prir. číslo k. Jednoduchým výpočtom sa dostane, že potom

$$\frac{a_k}{k^2} + \frac{a_{k+1}}{(k+1)^2} - \left(\frac{a_{k+1}}{k^2} + \frac{a_k}{(k+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{(a_{k+1} - a_k)[k^2 - (k+1)^2]}{k^2\,(k+1)^2} \leqq 0.$$

Z toho vyplýva, ze súčet $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$ bude minimálny, ak postupnosť $\{a_k\}$ bude rastúca. V takom prípade však pre každé prir. číslo k zrejme platí: $a_k \geqq k$. Preto

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqq \sum_{k=1}^{n} k \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

čo sme mali dokázať.

Riešenie 6. úlohy: Predpokladajme, že tvrdenie úlohy nie je pravdivé. Rozdeleniu členov spoločnosti podľa jednotlivých krajín zodpovedá rozklad množiny 1, 2, 3, ..., 1978 na 6 disjunktných podmnožín. Vzhľadom na to, že

$$\frac{1978}{6} = 329 + \frac{2}{3},$$

aspoň jedna z týchto podmnožín — označme ju A, obsahuje aspoň 330 prvkov: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{330}$. Utvorme rozdiely $a_{330} - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, 329$. Vzhľadom na náš predpoklad nepatrí z nich žiaden do A a pretože $\frac{329}{5} = 65 + \frac{4}{5}$, aspoň 66 z nich patrí do nejakej podmnožiny z nášho rozkladu, ktorú označíme B. Ak sú to rozdiely $a_{330} - a_{i_1} < a_{330} - a_{i_2} < \ldots < a_{330} - a_{i_{66}} < \ldots$, potom rozdiely $a_{i_j} - a_{i_{66}} = (a_{330} - a_{i_{66}}) - (a_{330} - a_{i_j})$, $j = 1, 2, \ldots, 65$ nepatria do A ani do B. Z toho, že $65 : 4 = 16 + \frac{1}{4}$ vyplýva, že aspoň 17 z nich patrí do podmnožiny C. Ak z prvkov množiny C utvoríme rozdiely podľa vyššie popísaného algoritmu, bude z nich aspoň 16 takých, ktoré nepatria do žiadnej z množín A, B, C. No, $16 : 3 = 5 + \frac{1}{3}$, teda aspoň 6 z nich bude patriť do podmnožiny z rozkladu, ktorú označíme D. Z rozdielov prvkov tejto množiny bude aspoň 5 takých, ktoré nepatria do žiadnej z podmnožín A, B, C, D a keďže $5 : 2 = 2 + \frac{1}{2}$, budú aspoň 3 z nich v nejakej podmnožine E. Ich dva rozdiely budú patriť podmnožine F. Rozdiel prvkov množiny F však nebude patriť do žiadnej z podmnožín A, B, C, D, E, F, čo je spor s predpokladom, že tvoria úplný rozklad množiny 1, 2, ..., 1978. Z toho vyplýva správnosť tvrdenia úlohy, ktoré bolo treba dokázať.