28. ročník matematické olympiády

Kategória C

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

C - P - 1

a) Vypíšte všetky usporiadané trojice x, y, z prirodzených čísel, pre ktoré platí:

$$xyz = 50 . \tag{1}$$

(Trojice, ktoré sa líšia poradím hodnôt, považujeme za rôzne.)

b) To isté vykonajte pre rovnicu $xyz = 12$.

c) Vysvetlite, prečo počet riešení je v oboch prípadoch rovnaký.

Riešenie: a) Čísla x, y, z musia byť deliteľmi čísla 50. Môžu to byť preto len niektoré z čísel 1, 2, 5, 10, 25, 50. Všetky riešenia rovnice (1) vypíšeme postupne tak, že najskôr zvolíme pevnú hodnotu x od $x = 1$ až po $x = 50$ a ku každej hodnote x analogicky postupne určíme usporiadané dvojice y, z z rovnice $yz = \frac{50}{x}$. Takto dostaneme všetky riešenia: (1, 1, 50), (1, 2, 25), (1, 5, 10), (1, 10, 5), (1, 25, 2), (1, 50, 1), (2, 1, 25), (2, 5, 5), (2, 25, 1), (5, 1, 10), (5, 2, 5), (5, 5, 2), (5, 10, 1), (10, 1, 5), (10, 5, 1), (25, 1, 2), (25, 2, 1), (50, 1, 1). Všetkých riešení rovnice (1) v obore prirodzených čísel je teda 18.

b) Analogickým spôsobom nájdeme všetky riešenia rovnice $xyz = 12$, ak si uvedomíme, že deliteľmi čísla 12 sú čísla: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Sú to tieto usporiadané trojice prirodzených čísel: (1, 1, 12), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 4, 3), (1, 6, 2), (1, 12, 1), (2, 1, 6), (2, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 6, 1), (3, 1, 4), (3, 2, 2), (3, 4, 1), (4, 1, 3), (4, 3, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1), (12, 1, 1). Je ich teda taktiež 18.

c) Všimnime si, že $50 = 2^1 \,.\, 5^2$, $12 = 3^1 \,.\, 2^2$. Z toho vyplýva, že ak usporiadaná trojica čísel

$$2^{\alpha_1} . 5^{\beta_1},\ 2^{\alpha_2} . 5^{\beta_2},\ 2^{\alpha_3} . 5^{\beta_3};\ \alpha_i = 0, 1;\ \beta_i = 0, 1, 2;$$
$$i = 1, 2, 3;$$

je riešením rovnice (1), potom usporiadaná trojica čísel

$$3^{\alpha_1} . 2^{\beta_1}, 3^{\alpha_2} . 2^{\beta_2}, 3^{\alpha_3} . 2^{\beta_3}$$

je riešením rovnice $xyz = 12$. Rovnaký počet riešení oboch rovníc je priamym dôsledkom toho, že medzi riešeniami existuje navzájom jednoznačné priradenie.

C - P - 2

Je daný výraz

$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Dokážte, že je kladný vždy, keď je definovaný. Čo musí platiť o číslach a, b, c, aby daný výraz mal zmysel?

Riešenie: Najskôr zistime, pre ktoré čísla a, b, c stráca daný výraz zmysel. Je to zrejme v tých prípadoch, keď sa menovateľ niektorého zo zlomkov daného výrazu rovná nule, tj. keď platí aspoň jedna z rovností

$$\begin{aligned}(a-b)(a-c) &= 0\,,\\ (b-a)(b-c) &= 0\,,\\ (c-a)(c-b) &= 0\,.\end{aligned} \tag{1}$$

Z (1) vyplýva, že daný výraz stráca zmysel, ak platí aspoň jedna z rovností

$$a-b=0,\quad b-c=0\,,\quad c-a=0$$

čiže

$$a=b\,,\quad b=c\,,\quad c=a\,. \tag{2}$$

K tomu, aby daný výraz mal zmysel, musí pre čísla a, b, c súčasne platiť:

$$a \neq b\,,\quad b \neq c\,,\quad c \neq a\,. \tag{3}$$

Označme hodnotu daného výrazu V a predpokladajme, že platí (3). Ľahko sa vidí, že spoločným menovateľom všetkých troch zlomkov je výraz

$$m = (a-b)(b-c)(c-a)\,. \tag{4}$$

K tomu, aby sme zlomky výrazu V uviedli na spoločného menovateľa, musíme ich v danom poradí rozšíriť výrazmi

$$-(b-c)\,,\quad -(c-a)\,,\quad -(a-b)\,.$$

Potom dostaneme

$$V = -\frac{1}{m}\,[(b-c)(a^2-2a+1)+(c-a)(b^2-2b+1)+ \\ +(a-b)(c^2-2c+1)]\,.$$

Označme H hodnotu výrazu v hranatej zátvorke. Po vynásobení a zlúčení postupne dostaneme

$$\begin{aligned} H = {} & a^2b-2ab+b-a^2c+2ac-c+b^2c-2bc+ \\ & +c-ab^2+2ab-a+ac^2-2ac+a- \\ & -bc^2+2bc-b= \\ & = a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-a^2c\,. \end{aligned}$$

Ak vynásobíme faktory na pravej strane (4), postupne dostaneme

$$\begin{aligned} m = {} & (ab-ac-b^2+bc)(c-a) = abc-ac^2- \\ & -b^2c+bc^2-a^2b+a^2c+ab^2-abc= \\ & = -(a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2) = -H\,. \end{aligned}$$

Z vyššie uvedeného vyplýva, že pre všetky a, b, c vyhovujúce (3) je

$$V = -\frac{1}{m}H = -\frac{1}{-H}H = 1\,,$$

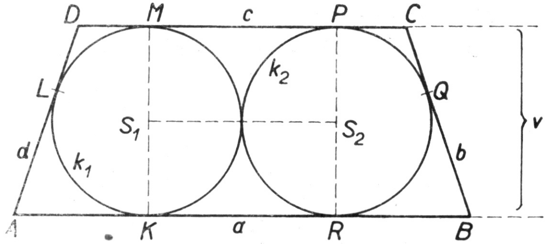
čo znamená, že daný výraz je kladný, ako sme mali dokázať.

C - P - 3

Do lichobežníka $ABCD$ sú vpísané kružnice k_1, k_2, ktoré sa v uvedenom poradí dotýkajú strán a, c, d, resp. a, c, b. Pre dĺžky strán lichobežníka platí $a + c > b + d$.

Ak má výška lichobežníka dĺžku $\frac{1}{2}(a + c - b - d)$, potom majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk. Dokážte.

Riešenie: Stredy kružníc k_1, k_2 označme S_1, S_2, dotykové body kružnice k_1 so stranami a, d, c v uvedenom poradí označme K, L, M a analogicky dotykové body kružnice k_2 so stranami c, b, a označme P, Q, R (pozri obr. 9). Výšku lichobežníka $ABCD$ označíme v. Zrejme



Obr. 9

platí: $|AK| = |AL|$, $|BR| = |BQ|$, $|CP| = |CQ|$, $|DL| = |DM|$. Z toho vyplýva, že

$$|AK| + |RB| + |BQ| + |QC| + |CP| + \\ + |MD| + |DL| + |LA| = 2(b + d) . \qquad (1)$$

Z predpokladu $a + c > b + d$ dostávame

$$2(b + d) < a + b + c + d . \qquad (2)$$

Zo vzťahov (1) a (2) vyplýva, že bod K leží medzi bodmi A a R a bod M medzi bodmi P a D. Kružnice k_1, k_2 majú vonkajší dotyk práve vtedy, keď vzdialenosť ich stredov sa rovná výške v lichobežníka $ABCD$. Platí však $|S_1S_2| = |MP| = |KR|$. Ďalej platí

$$|AK| + |KR| + |RB| + |BQ| + |QC| + |CP| + |PM| + |MD| + |DL| + |LA| = a + b + c + d$$

čiže

$$2(b + d) + 2S_1S_2 = a + b + c + d,$$

z čoho dostaneme

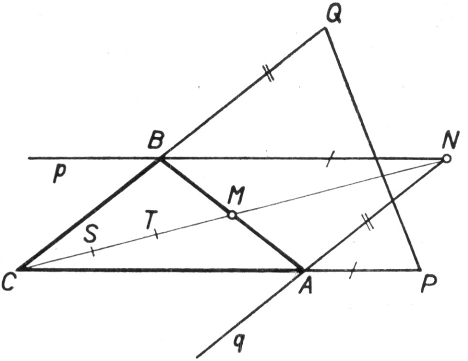
$$S_1S_2 = \frac{1}{2}(a + c - b - d). \qquad (3)$$

Ak teda $v = \frac{1}{2}(a + c - b - d)$, vzhľadom na (3) platí $|S_1S_2| = v$ a obe kružnice majú vonkajší dotyk, ako sme mali dokázať.

C - P - 4

V rovine je daný trojuholník PCQ a vo vnútri tohto trojuholníka bod T. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby bod T bol jeho ťažiskom, bod A ležal na polpriamke CP a bod B na polpriamke CQ.

Riešenie: Ak ABC je hľadaný trojuholník (obr. 10) s ťažiskom T, potom polpriamka CT prechádza stredom M strany AB a zo známej vlastnosti ťažiska trojuholníka vyplýva, že $|TM| = \frac{1}{2}|CT| = |CS|$, kde S je stred úsečky



Obr. 10

CT. Ak teraz trojuholník ABC doplníme na rovnobežník $ACBN$, bude bod M jeho stredom.

Z vyššie uvedeného rozboru vyplýva nasledujúca konštrukcia: Nájdeme stred S úsečky CT a na polpriamke CT určíme bod $M \neq S$ tak, aby platilo $|TM| = |CS|$. Ďalej na polpriamke CT zostrojíme bod $N \neq C$ tak, aby platilo $|MN| = |CM|$. Bodom N vedieme priamky $p \parallel CP$, $q \parallel CQ$. Priesečník priamok q, CP označíme A, priesečník priamok p, CQ označíme B. Potom trojuholník ABC je už hľadaným trojuholníkom.

Dôkaz. Bod M je podľa konštrukcie stredom uhlopriečky CN rovnobežníka $ACBN$ a teda aj stredom úsečky AB. Úsečka CM je teda ťažnicou trojuholníka ABC, pričom podľa konštrukcie platí: $|CT| = 2 . |TM|$, čo znamená, že bod T je ťažiskom trojuholníka ABC.

Z postupu vyššie uvedenej konštrukcie vyplýva, že úloha má vždy riešenie, a to jediné.

C - I - 1

Nájdite všetky usporiadané dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$xy - \frac{1}{x-y} + 1 = x + y + \frac{1}{y-x}, \qquad (1)$$

$$(x^3 + y^3 - 2)(x^2 + y^2 - 2)(x + y - 2)(x - 2)(y - 2) = 0. \qquad (2)$$

Riešenie: Rovnica (1) má zmysel len pre také x, y, pre ktoré platí

$$x \neq y. \qquad (3)$$

Za predpokladu (3) vynásobme obe strany rovnice (1) výrazom $x - y$.
Postupne dostaneme

$$x^2y - xy^2 - 1 + x - y = x^2 - xy + yx - y^2 - 1,$$
$$xy(x - y) - (x + y)(x - y) + x - y = 0,$$
$$(xy - x - y + 1)(x - y) = 0,$$

z čoho vzhľadom na (3) vyplýva $xy - x - y + 1 = 0$ čiže

$$(x - 1)(y - 1) = 0. \qquad (4)$$

Rovnici (4), ako sa dosadením ľahko presvedčíme, aj rovnici (1) vyhovujú dvojice $(x, 1)$ a $(1, y)$, kde vzhľadom na (3) je $x \neq 1$, resp. $y \neq 1$.

Dosaďme do (2) $y = 1$. Dostaneme

$$(x^3 - 1)(x^2 - 1)(x - 1)(x - 2)(-1) = 0\,,$$

z čoho pre $x \neq 1$ vyplýva

$$(x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 2) = 0\,. \tag{5}$$

Keďže kvadratický trojčlen $x^2 + x + 1$ má diskriminant rovný -3, nemá reálne korene a rovnici (5) vyhovujú len čísla $x = -1$ a $x = 2$. O tom, že dvojice $(-1, 1)$ a $(2, 1)$ vyhovujú sústave (1), (2) sa dosadením ľahko presvedčíme.

Zostávajúce riešenia danej sústavy dostaneme, ak do (2) dosadíme $x = 1$. Pretože bude mať tvar

$$(y^3 - 1)(y^2 - 1)(y - 1)(-1)(y - 2) = 0\,,$$

z vyššie uvedenej úvahy vyplýva, že pri $y \neq 1$ jej vyhovujú len čísla $y = -1$ a $y = 2$. Ďalšie dve riešenia sústavy (1), (2) sú teda dvojice $(1, -1)$ a $(1, 2)$.

Sústava (1), (2) má teda práve štyri riešenia: $(1, -1)$, $(1, 2)$, $(-1, 1)$, $(2, 1)$.

C - I - 2

Zistite počet všetkých usporiadaných trojíc prirodzených čísel x, y, z, ktoré vyhovujú rovnici

$$xyz = 1\,000\,000\,. \tag{1}$$

Riešenie: Číslo $1\,000\,000 = 10^6 = 2^6 \,.\, 5^6$. Danej rovnici môžu preto vyhovovať len usporiadané trojice x, y, z čísel tvaru

$$x = 2^{\alpha_1} . 5^{\beta_1}, \quad y = 2^{\alpha_2} . 5^{\beta_2}, \quad z = 2^{\alpha_3} . 5^{\beta_3},$$

kde pre nezáporné celé čísla α_i, β_i platí

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 6, \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 6. \end{aligned} \tag{2}$$

Všetky trojice čísel vyhovujúcich ľubovoľnej z podmienok (2) sú:

006	042	114	150	231	321	420
015	051	123	204	240	330	501
024	060	132	213	303	402	510
033	105	141	222	312	411	600

Je ich teda celkom 28. Všetkých usporiadaných trojíc x, y, z vyhovujúcich rovnici (1) je preto $28 . 28 = 784$.

C - I - 3

V rovine je daná množina **B** pozostávajúca z n bodov ($n \geqq 3$), z ktorých žiadne tri neležia na priamke. Niektoré z bodov množiny **B** sú spojené úsečkami tvoriacimi množinu **U**. Sústava $\{$**B**, **U**$\}$ má nasledujúce vlastnosti:

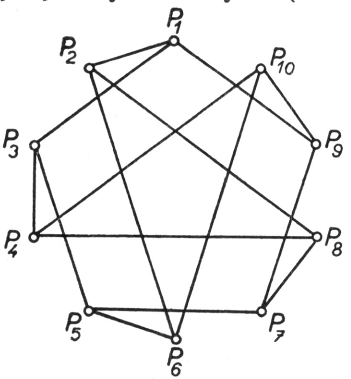
(1) Z každého bodu množiny **B** vychádzajú najviac tri úsečky množiny **U**.

(2) Každé dva body množiny **B** sú spojené buď úsečkou z **U**, alebo lomenou čiarou pozostávajúcou z dvoch úsečiek z **U**.

Zistite, aké je najväčšie možné číslo n a či existuje sústava $\{$**B**, **U**$\}$ s maximálnym n.

Riešenie: Najskôr ukážeme, že musí byť $n \leqq 10$. Nech P je ľubovoľný bod množiny **B**. Podľa predpokladov je bod P spojený nanajvýš s troma bodmi množiny **B** úsečkami z **U** a každý z týchto troch bodov je spojený s najviac dvoma ďalšími bodmi z **B** úsečkami z **U**. Bod P môže byť teda spojený najviac s deviatimi bodmi úsečkou z **U** alebo lomenou čiarou pozostávajúcou z dvoch úsečiek z **U**. Z toho vzhľadom na (1), (2) vyplýva, že množina **B** môže obsahovať najviac 10 bodov.

Ukážme teraz, že pre desaťbodovú množinu **B** množina **U** s vlastnosťami (1), (2) skutočne existuje. Označme P_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$, body množiny **B** (obr. 11) a spojme



Obr. 11

každý z bodov P_{2j-1}, $j = 1, \ldots, 5$ úsečkou s bodmi P_{2j}, P_{2j+1} a P_{2j-3} a každý z bodov P_{2j}, $j = 1, \ldots, 5$, ktorý je už spojený úsečkou s bodom P_{2j-1} ešte s bodmi P_{2j-4} a P_{2j+4}, pričom označenie bodov indexami chápeme tak, že $P_0 \equiv P_{10}$, $P_{10+k} \equiv P_k$, $P_{-k} \equiv P_{10-k}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Takto vytvorená množina úsečiek má už vlastnosti (1), (2).

Z každého z bodov P_i vychádzajú totiž práve tri úsečky.

Z bodu P_{2j-1} vedie lomená čiara pozostávajúca z dvoch úsečiek cez bod P_{2j-3} do bodov P_{2j-2} a P_{2j-5}, cez bod P_{2j} do bodov P_{2j-4} a P_{2j+4} a cez bod P_{2j+1} do bodov P_{2j+2} a P_{2j+3}, čím sú vyčerpané všetky body množiny **B**. Analogicky z každého z bodov P_{2j} sa lomenou čiarou pozostávajúcou z dvoch úsečiek dostaneme cez bod P_{2j-4} do bodov P_{2j-5} a P_{2j+2}, cez bod P_{2j-1} do bodov P_{2j-3} a P_{2j+1} a konečne cez bod P_{2j+4} do bodov P_{2j-2} a P_{2j+3}.

C - I - 4

Je daný vypuklý štvoruholník $ABCD$ so stranami a, b, c, d. Kružnice k_A, k_B, k_C, k_D so stredmi v bodoch A, B, C, D také, že kružnice k_A a k_B, k_B a k_C, k_C a k_D, k_D a k_A majú vonkajší dotyk, existujú práve vtedy, keď platí

$$a + c = b + d .$$

Dokážte.

Riešenie: Nech existujú kružnice požadovaných vlastností. Potom pre ich polomery r_A, r_B, r_C, r_D musia platiť nasledujúce rovnosti:

$$r_A + r_B = a , \qquad (1)$$
$$r_B + r_C = b , \qquad (2)$$
$$r_C + r_D = c , \qquad (3)$$
$$r_D + r_A = d . \qquad (4)$$

Sčítaním rovností (1) a (3), resp. (2) a (4) dostaneme

$$r_A + r_B + r_C + r_D = a + c ,$$
$$r_A + r_B + r_C + r_D = b + d ,$$

z čoho už vyplýva dokazovaná rovnosť.

Nech platí o stranách daného štvoruholníka rovnosť

$$a + c = b + d\,. \tag{5}$$

K tomu, aby existovali kružnice požadovaných vlastností, musia platiť rovnosti (1) — (4) pre polomery hľadaných kružníc. Ukážeme preto, že za podmienky (5) existujú kladné čísla r_A, r_B, r_C, r_D, ktoré vyhovujú sústave (1) — (4).

Ak sčítame rovnice (1) a (3) a od tohto súčtu odčítame rovnicu (2), dostaneme $r_A + r_D = a - b + c$. Za podmienky (5) je však pravá strana tejto rovnosti rovná číslu d, čo znamená, že každé riešenie sústavy (1) — (3) vyhovuje aj rovnici (4). Z (1) hneď dostaneme $r_B = a - r_A$. Potom z (2) máme $r_C = b - r_B = r_A + b - a$ a z (3) $r_D = = c - r_C = c - b + a - r_A$ čiže $r_D = d - r_A$. K tomu, aby boli čísla r_B, r_D kladné, musí byť $r_A < a$ a súčasne $r_A < d$ čiže

$$r_A < \min(a, d)\,. \tag{6}$$

K tomu, aby boli kladné tiež čísla r_A i r_C z vyššie uvedeného vyplýva nutnosť splnenia nerovnosti

$$\max(0, a - b) < r_A\,. \tag{7}$$

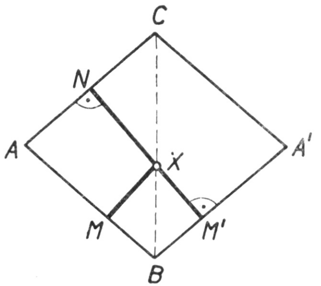
Nerovnosti (6), (7) však budú súčasne splnené len vtedy, keď $a - b < a$, čo zrejme platí, a súčasne $a - b < d$, čo však za podmienky (5) je tiež splnené, pretože $a - b = = d - c$.

Poznámka: Riešenie úlohy bolo spracované podľa riešenia *O. Tauferovej*, žiačky I. B tr. gymnázia v Prahe 6, Arabská 682.

C - I - 5

V rovine sú dané dve rôznobežky p, q a kladné číslo c. Určte množinu všetkých bodov X danej roviny, ktorých súčet vzdialeností od priamok p, q sa rovná c .

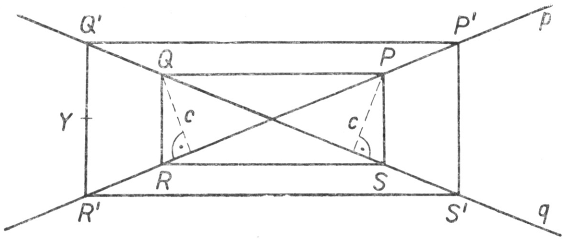
Riešenie: Pri riešení úlohy využijeme nasledujúcu vlastnosť rovnoramenného trojuholníka (obr. 12): Nech ABC



Obr. 12

je rovnoramenný trojuholník so základňou BC a body A, A' sú súmerné podľa priamky BC. Ak X je ľubovoľný bod úsečky BC a M päta kolmice vedenej z bodu X na priamku BA, prejde pri osovej súmernosti kolmica XM do kolmice XM' k priamke BA'. Pretože $BA' \parallel CA$, je $XM' \parallel XN$, kde N je päta kolmice z bodu X na priamku AC a platí $|XM| + |XN| = |XM'| + |XN| = |NM'|$, čo je dĺžka výšky trojuholníka ABC na stranu AC.

Nech teraz P, R sú také body priamky p, ktoré majú od priamky q s ňou rôznobežnej vzdialenosť c (pozri obr. 13) a Q, S zasa také body priamky q, ktorých vzdialenosť od priamky p sa rovná c . Na základe vyššie uvede-



Obr 13

ného má každý bod hranice pravouholníka $PQRS$ od priamok p, q súčet vzdialeností rovný c .

Ak Y je ľubovoľný bod roviny rôznobežiek p, q, ktorý neleží na hranici pravouholníka $PQRS$, potom možno zostrojiť pravouholník $P'Q'R'S'$, na hranici ktorého bude ležať bod Y tak, že bude rôzny od pravouholníka $PQRS$, a preto súčet vzdialeností bodu Y od priamok p, q bude rôzny od c .

Záver: Množinou bodov X požadovaných vlastností je teda hranica pravouholníka $PQRS$.

C - I - 6

V rovine je daných päť bodov štvorcovej mreže. Z úsečiek nimi určených aspoň jedna má stred v niektorom mrežovom bode. Dokážte.

Riešenie: V rovine zvolíme pravouhlú súradnicovú sústavu tak, aby mrežové body mali celočíselné súradnice. Ak $M_1 = [x_1, y_1]$, $M_2 = [x_2, y_2]$ sú koncové body nejakej úsečky, potom pre súradnice jej stredu $S = [x_S, y_S]$ platí

$$x_S = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_S = \frac{1}{2}(y_1 + y_2). \qquad (1)$$

Z hľadiska parity súradníc x daných mrežových bodov môžu nastať tieto prípady: všetkých 5 je nepárnych; 4 sú nepárne, 1 párna; 3 sú nepárne, 2 párne; 2 sú nepárne, 3 párne; 1 je nepárna, 4 sú párne; všetkých 5 je párnych. Z uvedeného výčtu možností je zrejmé, že vždy aspoň tri body majú súradnice x rovnakej parity. Označme súradnice týchto bodov

$$[a_1, b_1], \quad [a_2, b_2], \quad [a_3, b_3].$$

Zatiaľ čo o číslach a_i, $i = 1, 2, 3$, vieme, že sú rovnakej parity, o číslach b_i, $i = 1, 2, 3$, môžeme tvrdiť len toľko, že sú celé. Určite však aspoň dve z nich, napr. b_1, b_3, sú rovnakej parity. Potom však $[a_1, b_1]$, $[a_3, b_3]$ je hľadaná dvojica mrežových bodov, pretože podľa (1) sú súradnice stredu

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_3), \quad \frac{1}{2}(b_1 + b_3)$$

nimi určenej úsečky celé čísla čiže stred úsečky leží v mrežovom bode, ako bolo treba dokázať.

C - II - 1

Určte všetky usporiadané trojice reálnych čísel x, y, z, ktoré vyhovujú rovniciam

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4\,, \\ 2xy - 3z^2 &= 4\,. \end{aligned} \qquad (1)$$

Riešenie: Z prvej rovnice sústavy (1) vyplýva, že $x = 4 - 2y$ a po dosadení do druhej rovnice postupne dostaneme

$$\begin{aligned} 2(4 - 2y)y - 3z^2 &= 4\,, \\ 4 + 4y^2 - 8y + 3z^2 &= 0\,, \\ 4(1 - y)^2 + 3z^2 &= 0\,. \end{aligned} \qquad (2)$$

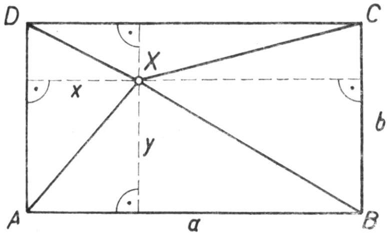
Z (2) priamo vyplýva, že musí platiť $y = 1$, $z = 0$, z čoho pre x dostaneme $x = 2$.

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že usporiadaná trojica $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$ sústave (1) vyhovuje.

C - II - 2

V rovine je daný obdĺžnik $ABCD$ so stranami $|AB| = a$, $|BC| = b$. Vo vnútri obdĺžnika $ABCD$ nájdite všetky body X také, pre ktoré súčet štvorcov vzdialeností od vrcholov A, B, C, D je minimálny.

Riešenie: Označme si x vzdialenosť bodu X od strany AD a y jeho vzdialenosť od strany AB (obr. 14). Podľa



Obr. 14

Pythagorovej vety potom dostaneme

$$|AX|^2 = x^2 + y^2, \ |BX|^2 = (a - x)^2 + y^2, \ |CX|^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2, \ |DX|^2 = x^2 + (b - y)^2.$$

Je teda

$$S = |AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 + |DX|^2 = x^2 + y^2 + (a - x)^2 + y^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 + x^2 + (b - y)^2,$$

z čoho po jednoduchej úprave dostaneme

$$S = a^2 + b^2 + (2x - a)^2 + (2y - b)^2.$$

Súčet $a^2 + b^2$ je konštantný. Štvorce $(2x - a)^2$, $(2y - b)^2$ sú nezáporné a svoju najmenšiu, t.j. nulovú hodnotu nadobúdajú práve vtedy, keď $2x = a$, $2y = b$, čo znamená, že súčet S je minimálny práve vtedy, keď X je stredom obdĺžnika $ABCD$.

C - II - 3a

Označme **M** množinu všetkých sedemciferných čísel zostavených z číslic 1, 2, 3, . . . , 7 bez opakovania.

a) Určte počet čísel z množiny **M** deliteľných číslom 25.
b) Určte počet čísel z množiny **M** deliteľných číslom 15.

Riešenie: a) Číslo je deliteľné číslom 25 práve vtedy, keď jeho posledné dvojčíslie je buď 00, alebo 25, alebo 50, alebo 75. Z čísel množiny **M** žiadne neobsahuje číslicu 0. Zostávajú preto len dve možnosti: 25 a 75. Zostávajúcich päť cifier môžeme usporiadať ľubovoľne, pričom pre výber prvej máme 5 možností a pre výber ostatných postupne už len 4, 3, 2 možnosti a výberom prvých štyroch cifier je piata cifra už jednoznačne určená. Pre každé dvojčíslie 25 a 75 je teda celkom $5 . 4 . 3 . 2 = 120$ možností, z čoho vyplýva, že v množine **M** je práve $2 . 120 = 240$ čísel deliteľných číslom 25.

b) K tomu, aby nejaké číslo bolo deliteľné číslom 15, musí byť deliteľné číslom 3. To však nastane práve vtedy, keď je číslom 3 deliteľný jeho ciferný súčet. Všetky čísla množiny **M** majú ciferný súčet rovnaký, a to

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28,$$

čo nie je číslo deliteľné 3. Z čísel množiny **M** teda žiadne nie je deliteľné číslom 3 a v dôsledku toho ani číslom 15.

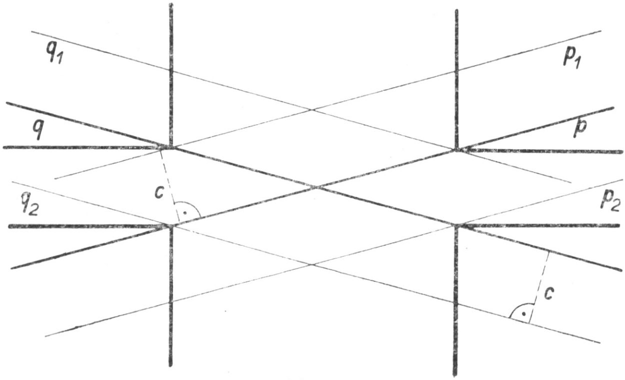
C - II - 3b

V rovine sú dané dve rôznobežky p, q a dané je kladné číslo c. Určte množinu všetkých bodov danej roviny, pre ktoré je absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od priamok p, q rovná číslu c.

Riešenie: Nech X je ľubovoľný bod hľadanej množiny. Označme d_p jeho vzdialenosť od priamky p a d_q vzdialenosť od priamky q. Podľa podmienok úlohy musí platiť:

$$|d_p - d_q| = c \text{ čiže buď } d_p = d_q + c, \text{alebo } d_q = d_p + c\,.$$

Ak je $d_p = d_q + c$, je vzdialenosť bodu X od priamky p väčšia alebo rovná c. Bod X musí preto ležať v niektorej z polrovín ohraničenej priamkami p_1, resp. p_2 neobsahujúcej priamku p (obr. 15), pričom p_1, p_2 sú rovnobežky



Obr. 15

s priamkou p, ktoré majú od nej vzdialenosť c. Ak hľadaný bod X leží v príslušnej polrovine ohraničenej priamkou p_1 vrátane tejto priamky, je $d_p = d_{p1} + c$ čiže $d_{p1} = d_q$. Bod X leží teda na niektorej z osí uhla priamok p_1 a q v príslušnej polrovine.

Obrátene, každý bod X, ktorý leží na niektorej z týchto dvoch polpriamok, vyhovuje podmienke $d_p = d_q + c$.

Analogickou úvahou ukážeme, že hľadanej množine patria všetky body osí uhlov priamok p_2 a q v príslušnej polrovine.

Ak vyjdeme z rovnosti $d_q = d_p + c$, dostaneme podobným spôsobom ďalšie dve časti hľadanej množiny. Ak totiž q_1, q_2 sú rovnobežky s priamkou q vo vzdialenosti c, potom hľadanej množine patria osi uhlov priamok p, q_1, resp. p, q_2 v polrovine ohraničenej priamkou q_1, resp. q_2 a neobsahujúcej priamku q.