28. ročník matematické olympiády

Kategória B

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 28. ročník matematické olympiády. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981. pp. 73–103.

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

B - P - 1

Pre každé prirodzené číslo k existuje prirodzené číslo n také, že $12\,n + 5$ alebo $12\,n - 5$ je prvočíslo a je väčšie ako k.

Riešenie: Pre každé prirodzené číslo p existujú nezáporné celé čísla m, r také, že

$$p = 12\,m + r$$

a

$$0 \leqq r < 12\,.$$

Ak p je prvočíslo, tak $r \neq 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$, t. j. $r \in \{1, 5, 7, 11\}$.

Keďže $1 \,.\, 11 = 11 \,.\, 1 = 11$, $1 \,.\, 1 = 1$, $11 \,.\, 11 = 121 = 12 \,.\, 10 + 1$, tak súčin čísiel tvaru

$$12m + r\,, \quad r \in \{1, 11\} \tag{1}$$

je zase číslo tohoto tvaru.

Nech x je ľubovoľné číslo tvaru $12n + 5$. Potom x možno napísať ako súčin prvočísiel $p_1, \ldots, p_k$, t.j. $x = p_1, \ldots, p_k$. Keby každé prvočíslo p_i, $i = 1, \ldots, k$ bolo tvaru (1), tak aj x by muselo byť tvaru (1). Ale x nie je tohto tvaru. Teda aspoň jedno z prvočísiel $p_1, \ldots, p_k$ je tvaru $12m + 5$ alebo $12m + 7$.

Ak $k < 7$, tak napr. prvočíslo 7 vyhovuje podmienke úlohy.

Nech teda $k \geqq 7$. Označíme l súčin všetkých prvočísiel väčších ako 5 a menších ako k. Číslo $12l + 5$ je deliteľné prvočíslom p, ktoré má tvar $12n + 5$ alebo $12n + 7$. Keby bolo p menšie alebo rovné číslu k, tak p delí l. Potom p delí aj $12l + 5 - 12l = 5$. Ak prvočíslo p delí číslo l, tak $p > 5$ a to je spor. Teda p musí byť väčšie ako k. Takže p je hľadané prvočíslo tvaru $12n + 5$ alebo $12n + 7$ a väčšie ako číslo k.

B - P - 2

V množine všetkých reálnych čísel riešte sústavu rovníc o neznámych x, y

$$2x + py = 16, \tag{2}$$

$$x - 2y = \frac{1}{2}p^2, \tag{3}$$

$$(p-1)x + 2y = 12p - 6. \tag{4}$$

Preveďte diskusiu vzhľadom k parametru p.

Riešenie: Riešime najprv prvé dve rovnice. Z rovnice (3) dostávame

$$x = \frac{1}{2}p^2 + 2y .$$

Dosadením do (2) máme

$$4y + p^2 + py = 16$$

a teda

$$y(4 + p) = 16 - p^2 . \tag{5}$$

Rozlíšime dva prípady.

1. $p = -4$. Potom rovnice (2), (3), (4) majú tvar

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 16 , \\ x - 2y &= 8 , \\ -5x + 2y &= -54 . \end{aligned}$$

Ak spočítame druhú a tretiu rovnicu, tak dostávame

$$-4x = -46 ,$$

t. j.

$$x = \frac{23}{2} .$$

Potom napr. z druhej rovnice vyplýva, že

$$y = \frac{1}{2}(-8 + x) = \frac{1}{2}\left(-8 + \frac{23}{2}\right) = \frac{7}{4} .$$

Skúškou sa presvedčíme, že $x = \dfrac{23}{2}$, $y = \dfrac{7}{4}$ skutočne vyhovuje sústave (2), (3), (4) pre $p = -4$.

2. Nech $p \neq -4$. Potom z rovnosti (5) vyplýva, že

$$y = \frac{16 - p^2}{4 + p} = 4 - p\,.$$

Jednoduchým výpočtom máme tiež hodnotu

$$x = \frac{1}{2}p^2 + 2y = \frac{1}{2}p^2 + 8 - 2p\,.$$

Dosadíme hodnoty x a y do rovnice (4):

$$(p - 1)\left(\frac{1}{2}p^2 + 8 - 2p\right) + 2(4 - p) = 12p - 6\,.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme rovnicu

$$p^3 - 5p^2 - 8p + 12 = 0\,.$$

Zrejme $p = 1$ je koreň tejto rovnice. Po vydelení koreňovým činiteľom $(p - 1)$ dostávame rovnicu

$$p^2 - 4p - 12 = 0\,.$$

Jej korene sú čísla

$$2 \pm \sqrt{4 + 12} = 2 \pm 4\,.$$

Zistili sme, že p musí mať niektorú z hodnôt 1, 6, -2. Skúškou sa presvedčíme, že pre $p = 1$ čísla $x = \dfrac{13}{2}$, $y = 3$, pre $p = 6$ čísla $x = 14$, $y = -2$ a pre $p = -2$ čísla $x = 14$, $y = 6$ sú riešenia rovníc (2), (3), (4).

B - P - 3

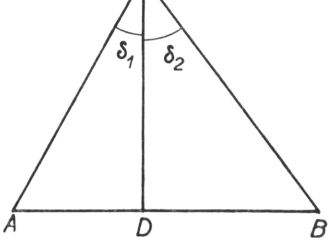
Ku každému ostrouhlému trojuholníku **T** o obsahu 1 existuje aspoň jeden taký pravouhlý trojuholník **T**′, že jeho obsah je najviac $\sqrt{3}$ a že platí **T** $\subseteq$ **T**′. Dokážte!

Riešenie: Nech A, B, C sú vrcholy trojuholníka **T**, AB je jeho strana maximálnej dĺžky c. Označíme pätu výšky z vrcholu C na stranu AB písmenom D. Nech v je dĺžka tejto výšky. Potom platí

$$\frac{1}{2} c \,.\, v = 1 \,.$$

Rozlíšime dva prípady.

1. Uhol $\delta_1 = \sphericalangle DCA$ je nie väčší ako 45° a súčasne uhol $\delta_2 = \sphericalangle BCD$ je nie väčší ako 45° (pozri obr. 16). Nech **T**′ je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s preponou EF ležiacou na priamke AB a vrcholom C. Zrejme platí **T** $\subseteq$ **T**′.



Obr. 16

Plošný obsah trojuholníka **T**′ je v^2. Plošný obsah trojuholníka **T** je $\frac{1}{2} c \,.\, v = 1$. Stačí teda ukázať, že $v \leqq \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Zrejme platí $c = |AD| + |DB|$. Ľahko vidieť, že platí

$$|AD| = v \,.\, \mathrm{tg} \sphericalangle DCA = v \,.\, \mathrm{tg}\, \delta_1 \,,$$
$$|BD| = v \,.\, \mathrm{tg} \sphericalangle DCB = v \,.\, \mathrm{tg}\, \delta_2 \,.$$

Potom

$$c = v(\mathrm{tg}\, \delta_1 + \mathrm{tg}\, \delta_2) = v \,.\, \frac{\sin(\delta_1 + \delta_2)}{\cos \delta_1 \,.\, \cos \delta_2}\,.$$

Keďže AB je strana maximálnej dĺžky, tak $\sphericalangle BCA$ je uhol maximálnej veľkosti a teda $\delta_1 + \delta_2 \geqq 60°$.

Použitím známych vlastností goniometrických funkcií postupne dostávame

$$\cos \delta_1 \,.\, \cos \delta_2 = \frac{1}{2}[\cos(\delta_1 + \delta_2) + \cos(\delta_1 - \delta_2)] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}(\cos 60° + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right),$$

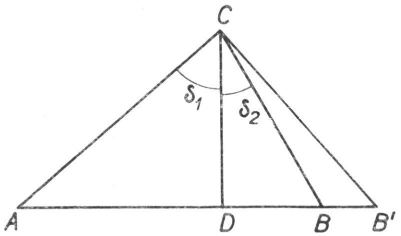
$$\sin(\delta_1 + \delta_2) \geqq \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Potom

$$c \geqq v \,.\, \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = v \,.\, \frac{2}{\sqrt{3}}$$

a to sme chceli ukázať.

2. Uvažujme teraz prípad, keď jeden z týchto uhlov, napr. $\delta_1 = \sphericalangle DCA$, je väčší ako $45°$. Potom musí byť $\delta_2 = \sphericalangle DCB < 45°$. Označíme B' priesečník kolmice na stranu AC idúcej bodom C (pozri obr. 17) s priamkou AB. Trojuholník $\mathbf{T}'$ s vrcholmi A, B', C je pravouhlý a obsahuje trojuholník $\mathbf{T}$. Zostáva nám odhadnúť jeho plošný obsah.



Obr. 17

Uhol $\sphericalangle CAB$ je rovný $90° - \delta_1$ a teda menší ako $45°$. Strana AC nie je dlhšia ako strana AB. Pre plošný obsah P' trojuholníka $\mathbf{T}'$ dostávame

$$P' = \frac{1}{2} v \,.\, AB' = \frac{1}{2} v \,.\, \frac{AC}{\cos \sphericalangle CAB} \leqq \frac{1}{2} v \,.\, \frac{c}{\cos 45°} =$$

$$= 1 \,.\, \sqrt{2} < \sqrt{3}\,.$$

V tomto prípade je $\mathbf{T}'$ hľadaný trojuholník a úloha je vyriešená.

B - P - 4

Daná je úsečka AB a bod C jej vnútra tak, že platí $|AC| \geqq |BC|$. Ku každej kružnici k obsahujúcej body A, C zostrojíme obidve kružnice k' zhodné s k, ktoré obsahujú body B, C. Vyšetrite množinu všetkých priesečníkov dvojíc k, k'.

Riešenie: Nech **M** je množina všetkých priesečníkov dvojíc k , k' s uvedenou vlastnosťou.

Zrejme bod C patrí do množiny **M**. Nech $X \in$ **M** a $X \neq C$. Existujú teda dve kružnice k, k' také, že k obsahuje body A, C, X, kružnica k' obsahuje body B, C, X a majú rovnaké polomery. Úsečka CX je tetivou obidvoch kružníc. Obvodové uhly $\sphericalangle XAC$ a $\sphericalangle XBC$ sú rovnaké. Teda trojuholník ABX je rovnoramenný. Odtiaľ vyplýva, že bod X leží na osi s úsečky AB a neleží na úsečke AB.

Ukážeme, že je to množina **M**, t.j. že každý bod priamky s neležiaci na úsečke AB patrí do množiny **M**.

Nech teda X leží na priamke s a neleží na úsečke AB . Trojice bodov A, C, X a B, C, X určujú dve kružnice k, k', ktoré sa pretínajú v bodoch C a X. Stačí dokázať, že kružnice k a k' majú rovnaké polomery. Keďže X leží na osi úsečky AB, tak trojuholník ABX je rovnoramenný a teda $\sphericalangle XAC = \sphericalangle XBC$. Uhly $\sphericalangle XAC$ a $\sphericalangle XBC$ sú obvodové uhly tetivy XC v kružniciach k a k'. Odtiaľ vyplýva, že kružnice k a k' majú rovnaké polomery.

Teda vyšetrovaná množina **M** obsahuje bod C a všetky body osi úsečky AB neležiace na AB.

B - I - 1

V texte tejto úlohy symbol $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ ($x_1 \neq 0$) bude značiť dekadický zápis prirodzeného čísla. Koľko je navzájom rôznych sedemciferných čísel $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, pre ktoré platí

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + x_6x_5x_4x_3x_2x_1 = x_7x_7x_7x_7x_7x_7 \ ? \qquad (1)$$

Riešenie: Aby zápis šesťciferného čísla $x_6x_5x_4x_3x_2x_1$ mal zmysel, musí byť $x_6 \neq 0$. Z rovnakých dôvodov musí byť $x_7 \neq 0$.

Z rovnosti (1) pre cifry najvyššieho rádu (stotisíce) vyplýva rovnosť $x_1 + x_6 = x_7$ alebo $x_1 + x_6 + 1 = x_7$. Porovnaním cifier najnižšieho rádu (jednotiek) dostávame rovnosti $x_1 + x_6 = x_7$ alebo $x_1 + x_6 = 10 + x_7$. Teda musí platiť $x_1 + x_6 = x_7$.

Podobnou úvahou dostaneme rovnosti $x_2 + x_5 = x_7$, $x_3 + x_4 = x_7$.

Počet riešení v množine nezáporných celých čísel sústavy rovníc

$$x_1 + x_6 = x_7 \,, \qquad (2)$$
$$x_2 + x_5 = x_7 \,, \qquad (3)$$
$$x_3 + x_4 = x_7 \,, \qquad (4)$$

pre ktoré je $x_1 > 0$, $x_6 > 0$, je počet riešení rovnice (1).

Keďže $x_1 > 0$, $x_6 > 0$, tak x_7 môže nadobúdať hodnoty 2, 3, . . . , 9.

Rovnica (2) má $x_7 - 1$ riešení $1, x_7 - 1; 2, x_7 - 2; \ldots; x_7 - 1, 1$. Podobne rovnica (3) a (4) má $x_7 + 1$ riešení $0, x_7; 1, x_7 - 1; \ldots; x_7, 0$. Úhrnom sústava rovníc (2), (3), (4) má

$$\sum_{x_7=2}^{9} (x_7 - 1) . (x_7 + 1) . (x_7 + 1) \text{ riešení.}$$

Výpočtom zistíme

$$\sum_{x_7=2}^{9} (x_7 - 1) . (x_7 + 1) . (x_7 + 1) = 1 . 3 . 3 +$$
$$+ 2 . 4 . 4 + \ldots + 8 . 10 . 10 = 2256 .$$

Celkový počet sedemciferných čísel $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ spĺňajúcich podmienku (1) je teda 2256.

B - I - 2

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y, pre ktoré platí

$$x^y = y^{x-y} . \tag{5}$$

Riešenie: Nech x, y sú prirodzené čísla také, že platí rovnosť (5).

Ak $y = 1$, tak dostávame $x = x^1 = 1^{x-1} = 1$.

Ak $x = y$, tak zase

$$x^y = x^x = y^0 = 1$$

a to je možné len pre $x = 1$.

Predpokladajme teraz $x \neq y, y \neq 1$. Keďže $x^y \geqq 1$, tak aj $y^{x-y} \geqq 1$ a teda $x - y \geqq 0$. Predpokladáme $x \neq y$, takže $x > y > 1$. Číslo $d = x - y$ je prirodzené a platí

$$(y + d)^y = y^d . \tag{6}$$

Odtiaľ vyplýva, že $d > y$. Označíme $e = d - y$. Dosadením do (6) a vydelením číslom y^y postupne dostaneme

$$(y + d)^y = y^{e+y} ,$$

$$\left(\frac{y + d}{y}\right)^y = y^e .$$

Kedže y^e je prirodzené číslo, aj $\frac{y + d}{y} = 1 + \frac{d}{y}$ musí byť číslo prirodzené. Odtiaľ vyplýva, že existuje také prirodzené číslo n, že platí $d = ny$. Dosadením do rovnice (6) dostaneme

$$y^y . (1 + n)^y = y^{ny}$$

a po odmocnení

$$y . (1 + n) = y^n . \tag{7}$$

Pre $n = 1$ rovnica (7) nemá riešenie. Pre $n = 2$ rovnica (7) dáva

$$3y = y^2$$

a teda $y = 3$. Potom

$$x = y + d = 3 + 2 . 3 = 9 .$$

Pre $n = 3$ z rovnice (7) vyplýva

$$4y = y^3 ,$$

odtiaľ zase $y = 2$. Potom

$$x = 2 + 3 . 2 = 8 .$$

Ak $n > 3$, tak

$$2^{n-1} > n + 1 .$$

Potom (spomeňme, že predpokladáme $y > 1$) platí

$$y^n \geqq y \cdot 2^{n-1} > y(n + 1)$$

a teda rovnica (7) nemá riešenie.

Ukázali sme, že ak dvojica prirodzených čísel $[x, y]$ je riešením rovnice (5), tak musí byť niektorou z dvojíc [1, 1], [8, 2] alebo [9, 3]. Skúškou sa presvedčíme, že tieto dvojice sú riešením rovnice (5). (Podľa riešenia *Jana Vlačihu*, žiaka II. C triedy gymnázia v Prahe 4, Budějovická 680.)

B - I - 3

V obore a) všetkých racionálnych čísel,
b) všetkých celých čísel

riešte sústavu $(n + 1)$ rovníc o $(n + 1)$ neznámych

$$x_k x_0 + x_{k-1} x_1 + x_{k-2} x_2 + \ldots + x_0 x_k = 2^k x_k \qquad (8)$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Riešenie: Napíšeme sústavu rovníc (8) explicitne:

$$\begin{aligned} x_0^2 &= x_0 , \\ x_1 x_0 + x_0 x_1 &= 2 \cdot x_1 , \\ x_2 x_0 + x_1 x_1 + x_0 x_2 &= 2^2 \cdot x_2 , \\ &\;\;\vdots \\ x_n x_0 + \ldots + x_0 x_n &= 2^n x_n . \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyplýva, že $x_0 = 0$ alebo $x_0 = 1$. Ak $x_0 = 0$, tak z druhej rovnice vyplýva $x_1 = 0$. Matematickou indukciou potom ľahko dostaneme $x_i = 0$ aj pre $i = 2, 3, \ldots, n$. Teda jedným riešením sú čísla

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0 . \tag{9}$$

Nech $x_0 = 1$. Potom z druhej rovnice máme

$$2x_1 = 2x_1$$

a zdá sa, že x_1 môže byť ľubovoľné reálne číslo. Z tretej rovnice vyplýva

$$x_1^2 = 4 . x_2 - 2x_2$$

a teda

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2} .$$

Matematickou indukciou ukážeme, že

$$x_k = \frac{x_1^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n . \tag{10}$$

Pre $k = 0, 1, 2$ je tvrdenie pravdivé. Nech platí pre každé $k < i \leqq n$. Potom z rovnice

$$x_i x_0 + x_{i-1} x_1 + \ldots + x_0 x_i = 2^i x_i$$

dosadením dostávame

$$2^i x_i - 2x_i = \frac{x_1^i}{(i-1)!} + \frac{x_1^i}{(i-2)!2!} + \ldots + \frac{x_1^i}{2!(i-2)!} \tag{11}$$

Z binomickej vety však vyplýva

$$(1+1)^i = \binom{i}{0} + \binom{i}{1} + \ldots + \binom{i}{i} =$$

$$= 1 + \frac{i!}{(i-1)!1!} + \frac{i!}{(i-2)!2!} + \ldots + \frac{i!}{2!(i-1)!} + \frac{i!}{i!}.$$

Teda

$$\frac{1}{(i-1)!} + \frac{1}{(i-2)!2!} + \ldots + \frac{1}{2!(i-2)!} =$$

$$= \frac{2^i - 2}{i!}.$$

Po dosadení do rovnice (11) jednoduchou úpravou máme

$$x_i = \frac{x_1^i}{i!}.$$

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že čísla (10) sú riešením sústavy rovníc (8).

Ak x_1 je racionálne číslo, tak aj ostatné (10) sú racionálne.

Teda čísla (9) a (10) predstavujú všetky racionálne riešenia sústavy rovníc (8), kde x_1 je ľubovoľné racionálne číslo.

Čísla (9) a (10) predstavujú aj všetky celočíselné riešenia sústavy rovníc (8), keď x_1 je také celé číslo, že x_1^k je deliteľné číslom k ! pre $k = 2, 3, \ldots, n$.

Ak A_1, A_2, A_3 sú vrcholy ostrouhlého trojuholníka, potom najmenší kruh, ktorý ho obsahuje, je kruh ohraničený kružnicou opísanou trojuholníku $A_1A_2A_3$. Ak body A_1, A_2, A_3 nie sú vrcholy ostrouhlého trojuholníka a sú aspoň dva z nich navzájom rôzne, potom najmenší kruh, ktorý obsahuje A_1, A_2, A_3, je kruh ohraničený Thalesovou kružnicou nad najdlhšou z úsečiek A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1. Dokážte.

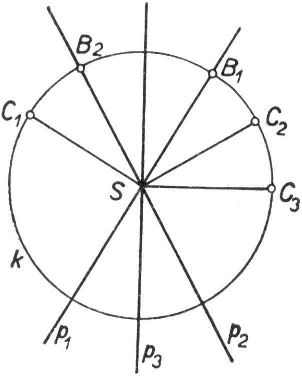
Riešenie: Najprv upresníme pojem „najmenší kruh". Kruh (S_o, r_o) je najmenší kruh obsahujúci body A_1, A_2, A_3, ak (i) kruh (S_o, r_o) obsahuje body A_1, A_2, A_3 a (ii) ak nejaký kruh (S, r) obsahuje body A_1, A_2, A_3, tak $r \geqq r_o$ a v prípade $r = r_o$ je $S = S_o$.

Najprv dokážeme dve pomocné tvrdenia.

Pomocné tvrdenie 1. Nech body C_1, C_2, C_3 sú body na kružnici k so stredom S také, že každý z uhlov $\sphericalangle C_1SC_2$, $\sphericalangle C_2SC_3$, $\sphericalangle C_3SC_1$ je menší ako 180°. Nech p_i je priamka idúca bodom S a kolmá na polomer cez bod C_i, $i = 1, 2, 3$. Nech σ_i je polrovina určená priamkou p_i a obsahujúca bod C_i, $i = 1, 2, 3$. Potom množina $\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3$ obsahuje jediný bod S.

Nech B_1 označuje ten priesečník priamky p_1 s kružnicou k, ktorý leží v polrovine σ_2. Podobne nech B_2 je priesečník priamky p_2 s kružnicou k ležiaci v polrovine σ_1. Potom $\sigma_1 \cap \sigma_2$ je uhol B_2SB_1.

Keby priamka p_3 prechádzala uhlom $\sigma_1 \cap \sigma_2$ (rozumieme tým: p_3 a $\sigma_1 \cap \sigma_2$ majú iný spoločný bod ako stred kružni-



Obr. 18

ce S, pozri obr. 18), tak jeden z bodov B_1, B_2 leží v polrovine σ_3. Môžeme predpokladať, že je to bod B_1. Potom uhol $\sphericalangle B_1SC_3$ je ostrý alebo pravý. Takže

$$\sphericalangle C_1SC_3 = \sphericalangle C_1SB_1 + \sphericalangle B_1SC_3 \leqq 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

a teda

$$\sphericalangle C_3SC_1 \geqq 180^\circ,$$

čo nie je možné.

Teda priamka p_3 neprechádza uhlom $\sigma_1 \cap \sigma_2$. Odtiaľ vyplýva, že uhol $\sigma_1 \cap \sigma_2$ leží v polrovine σ_3 alebo $\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \cap \sigma_3$ má jediný prvok S. Vylúčime prvú možnosť. Keby uhol $\sigma_1 \cap \sigma_2$ ležal v polrovine σ_3, tak bod C_3 leží buď vnútri uhla B_2SB_1, alebo jeden z uhlov $\sphericalangle C_3SB_2$, $\sphericalangle B_1SC_3$ je menší ako 90°. V prvom prípade by bol uhol $\sphericalangle C_1SC_3$ menší ako uhol $\sphericalangle C_1SB_1 = 90^\circ$ a potom $\sphericalangle C_3SC_1$ väčší ako 180° a to nie je možné. Keby napr. bol uhol $\sphericalangle C_3SB_2$ menší ako 90°, tak

$$\sphericalangle C_3SC_2 = \sphericalangle C_3SB_2 + \sphericalangle B_2SC_2 < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

čo nie je možné, lebo uhol $\sphericalangle C_2SC_3$ je menší ako 180°.

Podobne sa ukáže, že uhol $\sphericalangle B_1SC_3$ nemôže byť menší ako 90°.

Pomocné tvrdenie 2. Nech C_1, C_2, C_3 sú body na kružnici k so stredom S a polomerom r. Nech žiaden z uhlov $\sphericalangle C_1SC_2$, $\sphericalangle C_2SC_3$, $\sphericalangle C_3SC_1$ nie je väčší ako 180°. Potom kruhy (C_1, r), (C_2, r), (C_3, r) majú jediný spoločný bod S.

Ak jeden z uvažovaných uhlov, napr. $\sphericalangle C_1SC_2$, je priamy, tak kruhy (C_1, r), (C_2, r) sa dotýkajú v bode S a teda nemajú iný spoločný bod. Ak všetky tri uhly sú menšie ako 180°, tak kruh (C_i, r) leží v polrovine určenej dotyčnicou v bode S a obsahujúcej bod C_i. Tvrdenie vyplýva bezprostredne z prvého pomocného tvrdenia.

Dokážeme teraz prvú časť tvrdenia. Nech body A_1, A_2, A_3 sú vrcholy ostrouhlého alebo pravouhlého trojuholníka. Nech S_0 je stred kružnice k opísanej tomuto trojuholníku a r_0 je jej polomer. Kruh (S_0, r_0) má vlastnosť (i). Ukážeme, že má aj druhú vlastnosť (ii). Nech (S, r) je kruh obsahujúci body A_1, A_2, A_3. Ak $r > r_0$, tak nemáme čo dokazovať. Nech teda $r \leqq r_0$.

Body A_1, A_2, A_3 ležia na kružnici k a spĺňajú podmienku druhého pomocného tvrdenia. Body A_1, A_2, A_3 ležia však v kruhu (S, r) a teda bod S je vzdialený od každého z nich o vzdialenosť, ktorá je menšia alebo rovná $r \leqq r_0$. Teda bod S leží v každom kruhu (A_1, r_0), (A_2, r_0), (A_3, r_0) a podľa druhého pomocného tvrdenia je $S = S_0$. To sme chceli dokázať.

Uvažujme prípad, že body A_1, A_2, A_3 nie sú vrcholy ostrouhlého trojuholníka. Máme tri možnosti:

1. body A_1, A_2, A_3 sú vrcholy pravouhlého trojuholníka,

2. body A_1, A_2, A_3 sú vrcholy tupouhlého trojuholníka,

3. body A_1, A_2, A_3 ležia na priamke.

Prípad 1. sme už vybavili vyššie.

Prípady 2. a 3. uvažujme súčasne. Predpokladáme, že ak nastane prípad 2., tak A_1A_2 je najdlhšia strana trojuholníka a v prípade 3. bod A_3 leží na úsečke A_1A_2.

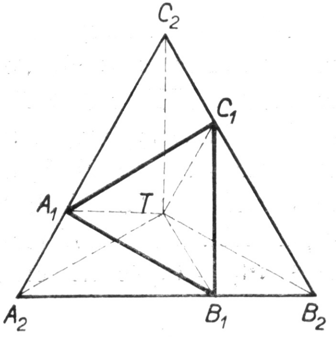
Potom Thalesova kružnice nad A_1A_2 obsahuje bod A_3. Ak nejaký kruh (S, r) obsahuje body A_1, A_2, tak musí byť $2r \geqq |\overline{A_1A_2}|$. Ak platí rovnosť $2r = |\overline{A_1A_2}|$, tak A_1A_2 je priemer tohoto kruhu, S je stred úsečky A_1A_2 a teda kružnica (S, r) je Thalesova kružnica nad A_1A_2.

B - I - 5

V rovnostrannom trojuholníku ABC je D stred strany AC, E stred strany BC. Nájdite množinu, ktorú tvoria ťažiská všetkých rovnostranných trojuholníkov obsiahnutých v trojuholníku ABC tak, že majú s úsečkou DE neprázdny prienik.

Riešenie: Najprv dokážeme pomocné tvrdenie: Nech $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sú rovnostranné trojuholníky také, že vrcholy A_1, B_1, C_1 ležia na stranách trojuholníka $A_2B_2C_2$. Potom trojuholníky majú spoločné ťažisko.

Ak trojuholníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ nesplývajú, tak na každej strane trojuholníka $A_2B_2C_2$ leží práve jeden vrchol trojuholníka $A_1B_1C_1$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že A_1 leží na strane A_2C_2, B_1 leží na strane A_2B_2 a C_1 leží na strane B_2C_2 (pozri obr. 19). Porovnaním uhlov zistíme, že trojuholníky $A_1A_2B_1$, $B_1B_2C_1$, $C_1C_2A_1$



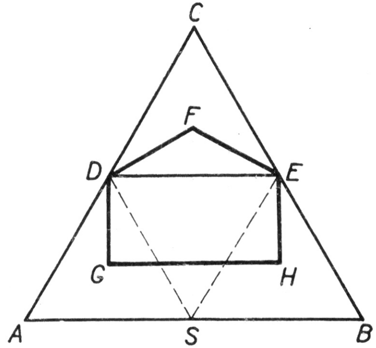
Obr. 19

sú podobné. Majú rovnaké strany $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$ a teda sú zhodné. Nech T je ťažisko trojuholníka $A_1B_1C_1$. Potom trojuholníky A_1A_2T, B_1B_2T, C_1C_2T sú zhodné, lebo majú rovnaké strany $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$, $A_1T = B_1T = C_1T$ a rovnaké uhly pri vrcholoch A_1, B_1, C_1. Teda platí $A_2T = B_2T = C_2T$. Odtiaľ vyplýva, že T je ťažisko trojuholníka $A_2B_2C_2$.

Teraz môžeme prejsť k riešeniu pôvodnej úlohy. Nech $\mathbf{M}$ je množina ťažísk rovnostranných trojuholníkov obsiahnutých v trojuholníku ABC, ktoré majú neprázdny prienik s úsečkou DE. Nech $\mathbf{M}_1$ je množina ťažísk tých trojuholníkov obsiahnutých v trojuholníku ABC, ktoré sú rovnoľahlé s trojuholníkom ABC a pretínajú úsečku DE. Zrejme platí $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}$.

Ak bod T patrí do množiny $\mathbf{M}$, tak existuje rovnostranný trojuholník XYZ obsiahnutý v trojuholníku ABC taký, že má neprázdny prienik s úsečkou DE a T je jeho ťažisko. Nech $X'Y'Z'$ je najmenší trojuholník rovnoľahlý s trojuholníkom ABC, ktorý obsahuje trojuholník XYZ (jeho konštrukcia je evidentná). Zrejme $X'Y'Z'$ má neprázdny prienik s úsečkou DE a je obsiahnutý v trojuholníku ABC. Teda jeho ťažisko patrí do množiny $\mathbf{M}_1$. Podľa pomocného tvrdenia však trojuholníky XYZ a $X'Y'Z'$ majú spoločné ťažisko. Teda $T \in \mathbf{M}_1$. Odtiaľ vyplýva, že $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$.

Nech S je stred strany AB. Nech F, G, H sú ťažiská trojuholníkov DEC, ADS, BES. Nech $\mathbf{M}_2$ je množina všetkých bodov päťuholníka $EFDGH$ rôznych od bodov D a E. Ukážeme, že $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$ (pozri obr. 20).



Obr. 20

Ak T je ťažisko trojuholníka XYZ rovnoľahlého s trojuholníkom ABC obsiahnutého v trojuholníku ABC a pretínajúceho úsečku DE, tak jednoduchou úvahou zistíme, že $T \in \mathbf{M}_2$ (stačí určiť vzdialenosť ťažiska T od strán trojuholníka ABC).

Naopak, nech $T \in \mathbf{M}_2$. Rozlíšime tri prípady.

a) Ak T leží v trojuholníku EFD a neleží na strane DE, tak trojuholník so stranou ležiacou na úsečke DE, s ťažiskom T a rovnoľahlý s trojuholníkom ABC je obsiahnutý v trojuholníku ABC a teda $T \in \mathbf{M}_1$.

b) Ak T leží na úsečke DE a $T \neq D$, $T \neq E$, tak sa ľahko zostrojí trojuholník XYZ rovnoľahlý s trojuholníkom ABC, s ťažiskom T a ležiaci vnútri trojuholníka ABC. Teda $T \in \mathbf{M}_1$.

c) Nech T leží v štvoruholníku $EDGH$ a neleží na úsečke DE. Trojuholník XYZ rovnoľahlý s trojuholníkom ABC, s vrcholom Z na úsečke DE a s ťažiskom T má požadované vlastnosti. Teda $T \in \mathbf{M}_1$.

Ukázali sme teda, že $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$ a $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$.

Môžeme zhrnúť: hľadaná množina bodov $\mathbf{M}$ je množina všetkých bodov päťuholníka $EFDGH$ rôznych od bodov D a E.

B - I - 6

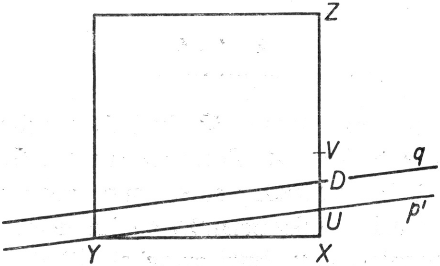
V rovine je daný štvorec $\mathbf{Q}$, bod M a priamka p neprechádzajúca bodom M. Zostrojte štvorec $\mathbf{Q}'$ tak, aby jeho strany boli rovnobežné so stranami štvorca $\mathbf{Q}$ a aby bod M a dva priesečníky priamky p s hranicou štvorca $\mathbf{Q}'$ delili túto hranicu na tri časti rovnakej dĺžky.

Riešenie: Pretože štvorec $\mathbf{Q}$ môžeme nahradiť ľubovoľným iným štvorcom, ktorý má strany rovnobežné so stranami štvorca $\mathbf{Q}$ a výsledok úlohy sa nezmení, tak môžeme predpokladať, že štvorec $\mathbf{Q}$ nepretína ani priamku p ani kolmicu cez bod M na priamku p.

Zostrojíme najprv priamku q a bod N, ktoré delia hranicu štvorca $\mathbf{Q}$ na tri časti rovnakej dĺžky. Potom pomocou rovnoľahlosti zostrojíme hľadaný štvorec $\mathbf{Q}'$.

Nech X je vrchol štvorca **Q**, ktorého vzdialenosť od priamky p je minimálna. Nech Y, Z sú vrcholy štvorca **Q** susediace s vrcholom X, pritom vzdialenosť vrcholu Z od priamky p nie je menšia ako vzdialenosť vrcholu Y od priamky p. Nech V je bod na strane XZ taký, že $|VZ| = 2 \cdot |XV|$. Nech p' je priamka rovnobežná s priamkou p a idúca vrcholom Y. Nech U je priesečník priamky p' so stranou XZ (ľahko vidieť, že U leží na úsečke XZ). Rozlíšime dva prípady:

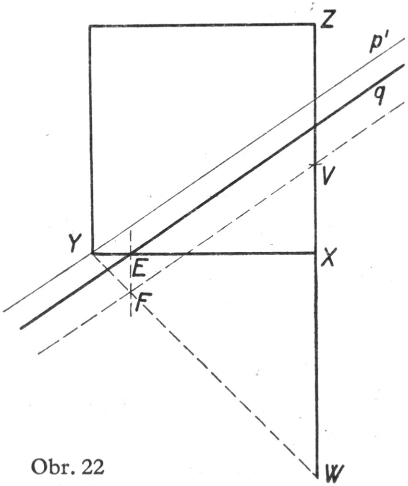
a) $|XU| \leqq |XV|$. Nech D je stred úsečky UV a q je priamka rovnobežná s priamkou p idúca bodom D. Zrejme q delí hranicu štvorca **Q** v pomere 1 : 2 (obr. 21).



Obr. 21

b) $XU > XV$. Na priamke XZ zostrojíme bod W tak, aby $WX = XZ$. Nech F je priesečník priamky YW a priamky rovnobežnej s priamkou p a idúcej bodom V. Nech E je taký bod na strane YX, že priamka EF je rovnobežná so stranou XZ. Priamka q idúca bodom E a rovnobežná s priamkou p delí obvod štvorca **Q** v pomere 1 : 2. (Obr. 22.)

Teraz jednoducho zostrojíme bod N taký, že N a priesečníky priamky q so stranami štvorca **Q** delia obvod štvorca **Q** na tri časti rovnakej dĺžky.



Obr. 22

Nech P je päta kolmice z bodu N na priamku q. Nech P' je päta kolmice z bodu M na priamku p. Ak priamky PP' a NM sú rovnobežné, tak posunutím štvorca $\mathbf{Q}$ o vektor NM dostaneme hľadaný štvorec $\mathbf{Q}'$. Ak priamky PP' a NM nie sú rovnobežné, tak sa pretínajú v bode, ktorý označíme S. Rovnoľahlosťou o strede S, ktorá prevedie bod N do bodu M, dostaneme zo štvorca $\mathbf{Q}$ hľadaný štvorec $\overline{\mathbf{Q}'}$.

B - II - 1

Ostrouhlý trojuholník $\mathbf{T}_1$ je obsiahnutý v trojuholníku $\mathbf{T}_2$. Potom o polomeroch r_1, r_2 kružníc opísaných trojuholníkom $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$ platí $r_1 \leqq r_2$. Dokážte.

Riešenie: Podľa úlohy B — I — 4, najmenší kruh obsahujúci trojuholník $\mathbf{T}_1$ je kruh ohraničený kružnicou opísanou trojuholníku $\mathbf{T}_1$.

Nech R je polomer najmenšieho kruhu, ktorý obsahuje trojuholník $\mathbf{T}_2$. Podľa úlohy B — I — 4 platí $r_2 \geqq R$.

Keďže najmenší kruh obsahujúci trojuholník $\mathbf{T}_2$ obsahuje aj trojuholník $\mathbf{T}_1$, tak polomer R tohoto kruhu nie je menší, ako polomer r_1 najmenšieho kruhu obsahujúceho trojuholník $\mathbf{T}_1$, teda

$$r_2 \geqq R \geqq r_1 .$$

(Riešil *Jan Nekovář*, 2. D trieda, gymnázium, Praha 2).

B - II - 2

Je daná šachovnica tvaru $n \times n$. Koľko figuriek možno maximálne na túto šachovnicu rozmiestniť tak, aby žiadne dve figurky nestáli na susedných políčkach? (Za susedné považujeme také políčka, ktoré majú spoločnú stranu alebo roh.)

Riešenie: Očíslujeme políčka šachovnice dvojicami prirodzených čísel tak, že $[i, j]$ je číslo políčka v i-tom stĺpci a j-tom riadku.

Na každé políčko $[i, j]$, kde i, j sú nepárne čísla, umiestnime jednu figurku. Takéto rozmiestnenie vyhovuje požiadavke úlohy, t. j. žiadne dve figurky nestoja na susedných políčkach.

Ak n je párne, tak sme umiestnili $\frac{n^2}{4}$ figuriek na šachovnicu. Ak n je nepárne, tak sme umiestnili $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ figuriek.

Ukážeme, že viacej figuriek sa nedá umiestniť na šachovnicu tak, aby bola splnená požiadavka úlohy. Musíme zase rozlíšiť dva prípady:

1. Nech n je párne. Šachovnicu rozdelíme na $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ častí tvaru 2×2. Nech na šachovnici je umiestnené m figuriek tak, že žiadne dve figurky nestoja na susedných políčkach. Potom vnútri každej časti tvaru 2×2 smie byť najviac jedna figurka. Teda $m \leqq \left(\frac{n}{2}\right)^2$.

2. Nech n je nepárne. Nech na šachovnici je umiestnené m figuriek a žiadne dve nie sú na susedných políčkach. Šachovnicu rozšírime o nové políčka na šachovnicu tvaru $(n + 1) \times (n + 1)$ a figurky necháme umiestnené tak, ako pôvodne boli. Potom $(n + 1)$ je párne a podľa predchádzajúcej úvahy je $m \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

Z uvedeného vyplýva, že maximálny počet figuriek umiestnených na šachovnici tvaru $n \times n$ tak, aby žiadne dve nestáli na susedných políčkach, je $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ pre n párne a $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ pre n nepárne.

B - II - 3a

Určte, koľko rôznych trojíc x, y, z prirodzených čísel spĺňa rovnosť

$$x^1y^{97}z^9 = 19^{791} \,.\, 97^9 \tag{1}$$

Riešenie: Nech prirodzené čísla x, y, z vyhovujú rovnici (1). Ľahko zistíme, že 19 a 97 sú prvočísla. Preto čísla x, y, z musia byť súčinom mocnín čísel 19 a 97 s nezápornými celočíselnými exponentmi. Naviac, číslo y nemôže obsahovať ako súčiniteľ kladnú mocninu čísla 97, lebo na pravej strane rovnosti (1) je mocnina 97^9. Teda existujú nezáporné celé čísla a, b, c, d, e také, že platí

$$x = 19^a \,.\, 97^b, \quad y = 19^c, \quad z = 19^d \,.\, 97^e.$$

Dosadíme do rovnice (1):

$$19^a \,.\, 97^b \,.\, 19^{97c} \,.\, 19^{9d} \,.\, 97^{9e} = 19^{791} \,.\, 97^9.$$

Z toho dostaneme pre čísla a, b, c, d, e dve rovnice

$$a + 97c + 9d = 791\,, \tag{2a}$$

$$b + 9e = 9\,. \tag{2b}$$

Každému nezápornému celočíselnému riešeniu rovníc (2a) a (2b) odpovedá jedno riešenia rovnice (1). Teda stačí zistiť počet nezáporných celočíselných riešení rovníc (2a) a (2b).

Rovnica (2b) má dve riešenia: $e = 0$, $b = 9$ a $e = 1$, $b = 0$.

Keďže $8 . 97 = 776 < 791 < 9 . 97 = 873$, tak číslo c môže nadobúdať hodnoty 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Postupne tieto hodnoty dosadíme do rovnice (2a).

1. $c = 0$. Potom

$$a + 9d = 791\,,$$
$$a = 9(87 - d) + 8\,.$$

Číslo d môže nadobúdať hodnoty $0, 1, \ldots, 87$.

Pre každú z uvedených hodnôt čísla d existuje práve jedno číslo a vyhovujúce rovnici (2a).

Teda máme 88 riešení.

2. $c = 1$. Potom

$$a + 9d = 694\,,$$
$$a = 9(77 - d) + 1\,.$$

Podobne ako v prípade 1. máme 78 riešení.

3. $c = 2$. Potom

$$a + 9d = 597\,,$$
$$a = 9(66 - d) + 3\,.$$

Máme 67 riešení.

4. $c = 3$. Potom

$$a + 9d = 500\,,$$
$$a = 9(55 - d) + 5\,.$$

Máme 56 riešení.

5. $c = 4$. Potom

$$a + 9d = 403,$$
$$a = 9(44 - d) + 7.$$

Máme 45 riešení.

6. $c = 5$. Potom

$$a + 9d = 306,$$
$$a = 9(34 - d).$$

Máme 35 riešení.

7. $c = 6$. Potom

$$a + 9d = 209,$$
$$a = 9(23 - d) + 2.$$

Máme 24 riešení.

8. $c = 7$. Potom

$$a + 9d = 112,$$
$$a = 9(12 - d) + 4.$$

Máme 13 riešení.

9. $c = 8$. Potom

$$a + 9d = 15,$$
$$a = 9(1 - d) + 6.$$

Máme 2 riešenia.

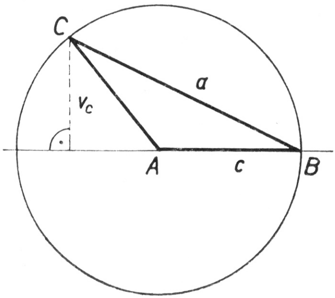
Celkový počet nezáporných celočíselných riešení sústavy (2a), (2b) a teda počet prirodzených riešení rovnice (1) je

$$2 \cdot (88 + 78 + 67 + 56 + 45 + 35 + 24 + 13 + 2) = 816.$$

(Riešil *Roman Kamarýt*, 2. D trieda, gymnázium W. Piecka, Praha 2.)

Určte všetky trojuholníky o obsahu 18 cm², ktoré majú jedinú stranu dlhšiu ako 6 cm.

Riešenie: Nech ABC je trojuholník o obsahu 18 cm² a pre jeho strany platí $a > 6$ cm, $b \leqq 6$ cm, $c \leqq 6$ cm (obr. 23). Potom trojuholník leží v kruhu so stredom A



Obr. 23

a polomerom 6 cm. Výška v_c na stranu AB je nie väčšia ako polomer tohoto kruhu, t. j. 6 cm. Plošný obsah trojuholníka ABC je

$$\frac{1}{2} c \,.\, v_c = 18 \,.$$

Keďže $c \leqq 6$, $v_c \leqq 6$, tak musí byť $v_c = c = 6$. Potom musí byť aj $b = 6$ a trojuholník je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A. Takýto trojuholník zrejme vyhovuje požiadavkám úlohy.

Jediným riešením je teda rovnoramenný trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole A a odvesnami $b = c = 6$ cm.

(Riešil *Jaroslav Lapšanský*, 2. D trieda, gymnázium, Humenné).

Iné riešenie: Nech ABC je trojuholník vyhovujúci úlohe a strana BC je dlhšia ako 6 cm. Označíme D pätu výšky v_a na stranu BC. Dĺžku úsečiek BD, DC označíme x, y. Teda

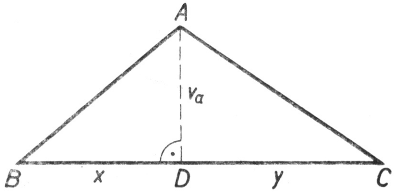
$$x + y = a > 6$$

(obr. 24). Podľa zadania úlohy platí

$$\frac{v_a \,.\, (x + y)}{2} = 18\,,$$

t. j.

$$v_a x + v_a y = 36\,. \qquad (3)$$



Obr. 24

Podľa Pythagorovej vety a zadania úlohy platí

$$x^2 + v_a{}^2 = c^2 \leqq 36\,, \qquad (4)$$

$$y^2 + v_a{}^2 = b^2 \leqq 36\,. \qquad (5)$$

Spočítame nerovnosti (4), (5) a rovnosť (3) vynásobenú -2. Dostaneme

$$x^2 - 2v_a x + v_a{}^2 + y^2 - 2v_a y + v_a{}^2 \leqq 0\,,$$

teda

$$(x - v_a)^2 + (y - v_a)^2 \leqq 0 .$$

Súčet druhých mocnín môže byť nula len vtedy, ak obidva sčítance sú nulové, t. j.

$$x - v_a = 0 ,$$

$$y - v_a = 0 .$$

Dostali sme

$$x = y = v_a .$$

Po dosadení do rovnice (3) dostaneme

$$2x^2 = 36 .$$

Odtiaľ

$$x = y = v_a = 3\sqrt{2} .$$

Po dosadení do (4) a (5) máme

$$9 . 2 + 9 . 2 = c^2 \leqq 36 ,$$

$$9 . 2 + 9 . 2 = b^2 \leqq 36 .$$

Teda $b = c = 6$.

Z výpočtu vyplýva, že ABC je rovnoramenný trojuholník so stranami $b = c = 6$ a $c = 6\sqrt{2}$. Uhol pri vrchole A je pravý.

Tento trojuholník vyhovuje požiadavke úlohy a je teda jediným trojuholníkom vyhovujúcim úlohe.