28. ročník matematické olympiády

Kategorie A

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 28. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981. pp. 104–145.

Kategorie A

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

A - P - 1

Nech a_{jk} $(j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m)$ sú reálne čísla, pre ktoré je

$$0 \leqq a_{j1} \leqq a_{j2} \leqq \ldots \leqq a_{jm} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Dokážte nerovnosť

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} a_{2k}\right)\ldots\left(\sum_{k=1}^{m} a_{nk}\right) \leqq m^{n-1}\sum_{k=1}^{m} a_{1k}a_{2k}\ldots a_{nk}\,.$$

Kedy platí rovnosť?

Řešení: Nerovnost dokážeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ zřejmě platí a vždy nastává rovnost. Klíčem k důkazu bude případ $n = 2$. Změníme-li označení, abychom si ušetřili psaní indexů 1 a 2, a vynecháme-li předpoklad nezápornosti, který v tomto případě nebudeme potřebovat, redukuje se pro $n = 2$ úloha na důkaz následující věty:

Jsou-li $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_m$, $y_1 \leqq y_2 \leqq \ldots \leqq y_m$ reálná čísla, platí

$$\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right) \leqq m \sum_{k=1}^{m} x_k y_k .$$

Rovnost nastává, právě když buď $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$, nebo $y_1 = y_2 = \ldots = y_m$.

(Tato věta je známa jako tzv. Čebyševova nerovnost.)

Důkaz: Pro každé dva indexy, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ je

$$\begin{aligned} x_i y_j + x_j y_i = x_i y_i + x_j y_j - (x_i - x_j)(y_i - y_j) \leqq \\ \leqq x_i y_i + x_j y_j , \end{aligned} \tag{1}$$

neboť podle předpokladu je $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \geqq 0$. Sečteme-li nerovnosti (1) pro všech m^2 dvojic (i, j), dostaneme

$$2 \sum_{(i,j)} x_i y_j \leqq m \sum_{i=1}^{m} x_i y_i + m \sum_{j=1}^{m} x_j y_j ,$$

což po úpravě dává dokazovanou nerovnost.

Nastane-li v Čebyševově nerovnosti rovnost, nastane rovnost i ve všech nerovnostech (1), tj. pro každé dva indexy $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ platí

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) = 0 .$$

Speciálně tedy

$$(x_1 - x_m)(y_1 - y_m) = 0 .$$

Je proto buď $x_1 = x_m$ a tedy $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$, nebo $y_1 = y_m$ a tedy $y_1 = y_2 = \ldots = y_m$. Obráceně, platí-li tato podmínka, snadno se přesvědčíme, že v Čebyševově nerovnosti nastane rovnost.

Proveďme indukční krok, abychom dokázali nerovnost pro obecné n. Předpokládejme, že platí pro $n = p$, a dokážeme, že pak platí i pro $p + 1$ m-tic reálných čísel

$$0 \leqq a_{i1} \leqq a_{i2} \leqq \ldots \leqq a_{im} \quad (i = 1, 2, \ldots, p + 1).$$

Podle indukčního předpokladu je

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} a_{2k}\right)\ldots\left(\sum_{k=1}^{m} a_{pk}\right) \leqq$$
$$\leqq m^{p-1} \sum_{k=1}^{m} a_{1k}a_{2k}\ldots a_{pk}.$$

Vynásobíme-li obě strany nezáporným číslem $\sum\limits_{k=1}^{m} a_{p+1,\,k}$ dostaneme

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} a_{2k}\right)\ldots\left(\sum_{k=1}^{m} a_{pk}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} a_{p+1,\,k}\right) &\leqq \\ \leqq m^{p-1}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{1k}a_{2k}\ldots a_{pk}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} a_{p+1,k}\right)&.\end{aligned} \tag{2}$$

Protože kromě předpokladu

$$a_{p+1,1} \leqq a_{p+1,2} \leqq \ldots \leqq a_{p+1,m}$$

platí také

$$a_{11}a_{21}\ldots a_{p1} \leqq a_{12}a_{22}\ldots a_{p2} \leqq \ldots \leqq a_{1p}a_{2p}\ldots a_{pp},$$

jak plyne z předpokladů o prvních p m-ticích (s využitím předpokladu nezápornosti), podle Čebyševovy nerovnosti je

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{1k}a_{2k}\ldots a_{pk}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} a_{p+1,\,k}\right) &\leqq \\ \leqq m \sum_{k=1}^{m} a_{1k}a_{2k}\ldots a_{pk}a_{p+1,\,k}&.\end{aligned} \tag{3}$$

Z nerovností (2), (3) ihned plyne dokazovaná nerovnost pro $n = p + 1$. Důkaz je proveden.

Zbývá ještě zjistit, kdy nastane rovnost. Prozkoumáme-li právě provedený důkaz, zjistíme, že to bude, právě když pro alespoň $n-1$ indexů $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$a_{j1} = a_{j2} = \ldots = a_{jm},$$

nebo když pro alespoň jeden index $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je

$$a_{j1} = a_{j2} = \ldots = a_{jm} = 0.$$

A - P - 2

Nájdite všetky hodnoty parametra p, pre ktoré funkcia

$$f(x) = x^2 + 4px - |x^2 - 2px + p^2 - 1|$$

nemá lokálny extrém.

Řešení: Snadno zjistíme, že

$$f(x) = 2\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{2} - 1 \qquad \text{pro } x \in \langle p-1, p+1\rangle$$

$$f(x) = 6px - p^2 + 1$$

$$\text{pro } x \in (-\infty, p-1\rangle \cup \langle p+1, +\infty).$$

Jestliže $-\frac{p}{2} \in (p-1, p+1)$ neboli $p \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, pak funkce $f(x)$ v intervalu $\left\langle p-1, -\frac{p}{2}\right\rangle$ klesá a v intervalu $\left\langle -\frac{p}{2}, p+1\right\rangle$ roste, takže v bodě $x = -\frac{p}{2}$ má lokální extrém.

Jestliže $p \leqq -\frac{2}{3}$, funkce $f(x)$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$ klesá, a nemá tedy lokální extrém.

Jestliže $p \geqq \frac{2}{3}$, funkce $f(x)$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$ roste a nemá tedy lokální extrém.

Závěr: Funkce $f(x)$ nemá lokální extrém, právě když $|p| \geqq \frac{2}{3}$.

A - P - 3

V rovine je daný trojuholník ABC a priamka p. Zostrojte úsečku, ktorej krajné body rozpoľujú obvod trojuholníka ABC a ktorej stred leží na priamke p.

Řešení: Nejprve najdeme množinu středů všech úseček, jejichž krajní body půlí obvod trojúhelníku ABC. Využijeme při tom následující pomocnou větu:

Pohybují-li se v rovině body P, Q rovnoměrně a přímočaře, pohybuje se rovnoměrně a přímočaře i střed S úsečky PQ.

Pomocnou větu nejsnadněji dokážeme metodou souřadnic. Má-li na počátku pohybu bod P souřadnice $[a_1, a_2]$ a bod Q souřadnice $[b_1, b_2]$, má v čase t bod p souřadnice

$$p_1 = a_1 + tu_1\,,$$
$$p_2 = a_2 + tu_2$$

a bod Q souřadnice

$$q_1 = b_1 + tv_1 ,$$
$$q_2 = b_2 + tv_2 ,$$

kde $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ je vektor rychlosti bodu P a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ je vektor rychlosti bodu Q. Střed S úsečky PQ má tedy v čase t souřadnice $[s_1, s_2]$, kde

$$s_1 = \frac{p_1 + q_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2} + t\,\frac{u_1 + v_1}{2},$$

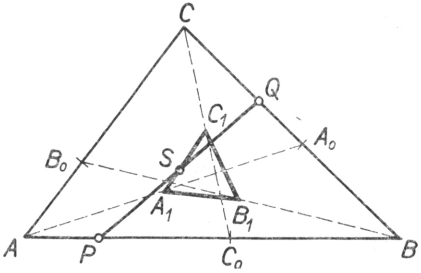
$$s_2 = \frac{p_2 + q_2}{2} = \frac{a_2 + b_2}{2} + t\,\frac{u_2 + v_2}{2}.$$

Odtud je vidět, že bod S se pohybuje také rovnoměrně a přímočaře (jeho pohyb začíná ve středu spojnice počátečních poloh bodů P, Q a jeho rychlost je $\frac{1}{2}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$). Pomocná věta je dokázána.

Vraťme se k trojúhelníku ABC. Označme A_0 takový bod na jeho hranici, že body A, A_0 půlí jeho obvod, tj.

$$|AB| + |BA_0| = |AC| + |CA_0|$$

(z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že bod A_0 leží uvnitř strany BC). Analogicky zaveďme body B_0 a C_0 a označme A_1, B_1, C_1 středy úseček AA_0, BB_0, CC_0 (obr. 25). Probíhá-li bod P úsečku AC_0, probíhá bod Q, který spolu s bodem P půlí obvod trojúhelníku ABC, úsečku A_0C a střed úsečky PQ probíhá úsečku A_1C_1. Pokračujeme-li

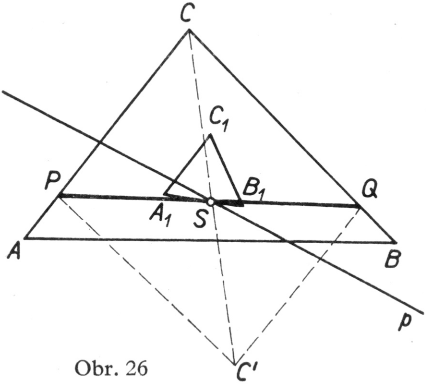


Obr. 25

dále, zjistíme, že hledanou množinou je hranice trojúhelníku $A_1B_1C_1$.*)

Zbývá vyřešit naši konstrukční úlohu. Snadno sestrojíme body A_1, B_1, C_1. Množina středů všech hledaných úseček je průnik přímky p s trojúhelníkem $A_1B_1C_1$. Ke každému bodu S tohoto průniku existuje, jak víme, jediná hledaná úsečka se středem v bodě S. Leží-li např. bod S na straně A_1B_1, bude jeden z krajních bodů této úsečky ležet na straně AC a druhý na straně BC. Bod S je středem jediné úsečky, která má krajní body na přímkách AC, BC. Tato úsečka je tedy hledanou úsečkou, tj. navíc půlí obvod trojúhelníku ABC, a snadno ji sestrojíme známou konstrukcí využívající faktu, že úhlopříčky rovnoběžníku se půlí (obr. 26): Sestrojíme bod C' souměrně sdružený s bodem C podle středu S. Bodem C' vedeme rovnoběžky se stranami AB, AC a ty je protnou v krajních bodech P, Q hledané úsečky.

*) Trojúhelník $A_1B_1C_1$ leží uvnitř trojúhelníku ABC. Body A_1, B_1, C_1 jsou skutečně vrcholy trojúhelníku — nesplynou ani neleží v přímce, jak je vidět z vyjádření vektoru rychlosti středu S pomocí vektorů rychlostí bodů P, Q, které jsme odvodili v důkazu pomocné věty.



Obr. 26

Úloha má 0, 1, 2 nebo nekonečně mnoho řešení podle toho, jaká je vzájemná poloha přímky p a trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

A - P - 4

Nech a, b, c sú veľkosti strán trojuholníka ABC a r je polomer jemu opísanej kružnice. Označme $V = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2$. Trojuholník ABC je ostrouhlý práve vtedy, keď $V > 0$, pravouhlý práve vtedy, keď $V = 0$, a tupouhlý práve vtedy, keď $V < 0$. Dokážte.

Řešení: Při obvyklém značení platí

$$a = 2r \sin \alpha\,, \quad b = 2r \sin \beta\,, \quad c = 2r \sin \gamma\,,$$

a tedy

$$V = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2 = 4r^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2)\,.$$

Podle základních trigonometrických vzorců je

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} +$$

$$+ 1 - \cos^2\gamma = 2 - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) -$$

$$- \cos^2(\alpha + \beta) = 2 - \cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) +$$

$$+ \cos(\alpha + \beta)] = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,.$$

Je tedy

$$V = 8r^2 \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,.$$

Jsou-li úhly α, β, γ ostré, jsou jejich kosiny kladné a $V > 0$. Je-li jeden z nich pravý, je jeho kosinus nula a $V = 0$.

Je-li jeden z nich tupý a ostatní ostré, je jeden kosinus záporný a ostatní kladné a $V < 0$.

A - I - 1

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť prirodzených čísel, ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla. Dokážte, že existujú indexy $i < j < k$ také, že $a_k - a_j = a_j - a_i$.

Řešení: Zvolme libovolně index i. Protože posloupnost $\{a_n\}$ není omezená, existují její členy a_h, pro které platí

$$a_h > \max(a_1, a_2, \ldots, a_i).$$

Jako j vezmeme index prvního takového a_h, tj.

$$j = \min(h;\, a_h > \max(a_1, a_2, \ldots, a_i)).$$

Zřejmě je $j > i$. Aby bylo $a_k - a_j = a_j - a_i$, musí platit

$$a_k = 2a_j - a_i. \qquad (1)$$

Protože $a_j > a_i$, je

$$2a_j - a_i > a_j. \qquad (2)$$

Protože posloupnost $\{a_n\}$ obsahuje všechna přirozená čísla, existuje index k tak, že platí (1). Z toho, jak jsme definovali index j, a z nerovnosti (2) vyplývá, že $k > j$. Tím je důkaz proveden. Ukázali jsme dokonce, že existuje nekonečně mnoho trojic indexů $i < j < k$ tak, že $a_k - a_j = a_j - a_i$ a při tom $a_i < a_j < a_k$.

V rovině je dána ortonormální soustava souřadnic. Body, jejichž obě souřadnice jsou celočíselné, nazveme mřížovými body. Nechť $\mathbf{M}_n$ je množina všech mřížových bodů $[i, j]$, pro které je $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$. Označme $f(n)$ nejmenší přirozené číslo k s touto vlastností: v $\mathbf{M}_n$ existuje k bodů $P_1, P_2, \ldots, P_k$ tak, že ke každému bodu $A \in \mathbf{M}_n$ lze najít bod P_s $(1 \leqq s \leqq k)$, jehož vzdálenost od bodu A je nejvýše rovna 1. Dokažte, že platí

$$\frac{n^2}{5} \leqq f(n) \leqq \frac{n^2 + 16n}{5}.$$

Řešení: Místo mřížový bod budeme pro stručnost říkat jen bod. Symbolem $|\mathbf{A}|$ budeme značit počet prvků konečné množiny $\mathbf{A}$. Řekneme, že dva body spolu sousedí, jsou-li buď totožné, nebo mají-li vzdálenost 1.

Nechť $\mathbf{P}$ je libovolná podmnožina množiny $\mathbf{M}_n$ taková, že každý bod z $\mathbf{M}_n$ sousedí s nějakým bodem z $\mathbf{P}$ (takové podmnožiny $\mathbf{P}$ existují, např. množina $\mathbf{M}_n$ sama). Protože každý bod sousedí právě s pěti body, sousedí každý bod z $\mathbf{P}$ nejvýše s pěti body z $\mathbf{M}_n$, a tedy

$$5\,|\mathbf{P}| \geqq |\mathbf{M}_n| = n^2.$$

Pro každou takovou podmnožinu $\mathbf{P}$ je tedy

$$|\mathbf{P}| \geqq \frac{n^2}{5}$$

a speciálně

$$f(n) \geqq \frac{n^2}{5}.$$

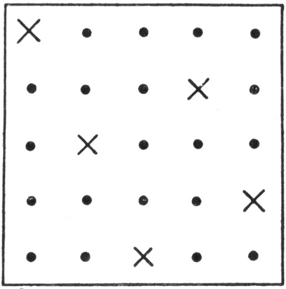
Dále sestrojíme „hodně řídkou“ množinu $\mathbf{R}_n \subset \mathbf{M}_n$, tak aby každý bod z $\mathbf{M}_n$ sousedil s nějakým bodem z $\mathbf{R}_n$. Ukážeme-li, že

$$|\mathbf{R}_n| \leqq \frac{n^2 + 16n}{5},$$

bude tím spíše

$$f(n) \leqq \frac{n^2 + 16n}{5}.$$

Rovinu rozdělme vodorovnými a svislými přímkami na čtverce 5×5. V každém čtverci vezměme body označené na obr. 27 křížky — množinu všech těchto bodů označme $\mathbf{P}$. Každý bod sousedí právě s jedním bodem z $\mathbf{P}$. Označme $\mathbf{P}_n$ množinu všech bodů $[i, j] \in \mathbf{P}$, pro které je $0 \leqq i \leqq n + 1$ a $0 \leqq j \leqq n + 1$. Každý bod z $\mathbf{M}_n$ sousedí právě s jedním bodem z $\mathbf{P}_n$. Některé body z $\mathbf{M}_n$ však (pokud n není příliš malé) sousedí s body z $\mathbf{P}_n$, které neleží v $\mathbf{M}_n$ (jsou to některé z bodů na stranách čtverce $\mathbf{M}_n$).



Obr. 27

Tyto body množiny $\mathbf{P}_n$ nahraďme jejich sousedy z množiny $\mathbf{M}_n$. Z množiny $\mathbf{P}_n$ tak dostaneme množinu $\mathbf{R}_n$. Teď už $\mathbf{R}_n \subset \mathbf{M}_n$ a každý bod z $\mathbf{M}_n$ sousedí alespoň s jedním bodem z $\mathbf{R}_n$. Přitom je $|\mathbf{R}_n| \leqq |\mathbf{P}_n|$. Snadno odhadneme počet bodů v $\mathbf{P}_n$. V každém z $n + 2$ „řádků" ($j = 0,1, \ldots, n + 1$) je, jak vidíme z konstrukce množiny $\mathbf{P}$, „každý pátý bod" z $\mathbf{P}_n$ a z $n + 2$ bodů ($i = 0, 1, \ldots, n + 1$) patří do $\mathbf{P}_n$ tedy nejvýše $\frac{n+2}{5} + 1$ bodů.

Celkem je tedy

$$|\mathbf{P}_n| \leqq (n + 2)\left(\frac{n+2}{5} + 1\right) = \frac{n^2 + 9n + 14}{5}.$$

Pro $n \geqq 2$ je

$$n^2 + 9n + 14 \leqq n^2 + 16n\,,$$

a tedy

$$f(n) \leqq |\mathbf{R}_n| \leqq |\mathbf{P}_n| \leqq \frac{n^2 + 9n + 14}{5} \leqq \frac{n^2 + 16n}{5}.$$

Pro $n = 1$ je $f(1) = 1$, a tedy také

$$f(1) \leqq \frac{1^2 + 16 \,.\, 1}{5}.$$

Jemnějšími metodami bychom dostali přesnější odhady čísla $f(n)$. I z našich úvah je zřejmé, že v dokazované nerovnosti platí na obou stranách ostrá nerovnost.

Nech $a_1, \ldots, a_n$ sú nezáporné čísla, pre ktoré platí $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$. Pre každé reálne číslo x platí

$$x^2 + x\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + n^3 \sum_{i=1}^{n} a_i^4 > 0 .$$

Dokážte!

Řešení: Diskriminant kvadratického polynomu

$$p(x) = x^2 + x\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + n^3 \sum_{i=1}^{n} a_i^4$$

je roven

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^4 - 4n^3 \sum_{i=1}^{n} a_i^4 .$$

Vzhledem k tomu, že

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0 \text{, je } \sum_{i=1}^{n} a_i^4 > 0$$

(obě nerovnosti jsou ekvivalentní s nenulovostí alespoň jednoho a_i), a tedy

$$D < \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^4 - n^3 \sum_{i=1}^{n} a_i^4 .$$

Aniž by úvaha ztratila na obecnosti, můžeme předpokládat, že čísla a_i jsou indexovaná tak, že

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n . \qquad (1)$$

Použijeme-li na čtyři stejné n-tice nezáporných čísel (1) nerovnost, kterou jsme odvodili v A—P—1, dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^4 \leqq n^3 \sum_{i=1}^{n} a_i^4 . \tag{2}$$

Odtud vidíme, že $D < 0$. Polynom $p(x)$ nemá tedy reálné kořeny a protože $p(0) > 0$, je $p(x) > 0$ pro každé reálné číslo x.

Jiné řešení: Nerovnost (2) můžeme dokázat také pomocí známé Cauchyovy-Schwarzovy-Buňakovského nerovnosti, která tvrdí:

Pro každých $2n$ reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

Položíme-li pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$x_i = a_i , \qquad y_i = 1 ,$$

dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

a po umocnění na druhou

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^4 \leqq n^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 . \tag{3}$$

Položíme-li pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$x_i = a_i^2 , \qquad y_i = 1 ,$$

dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 \leqq n \sum_{i=1}^{n} a_i^4 . \tag{4}$$

Z nerovností (3) a (4) dostaneme ihned (2).

Další řešení: Nerovnost (2) dostaneme i z Hölderovy nerovnosti, která tvrdí: Je-li $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ jsou nezáporná čísla, pak

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} .$$

Položíme-li $p = 4$ a pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

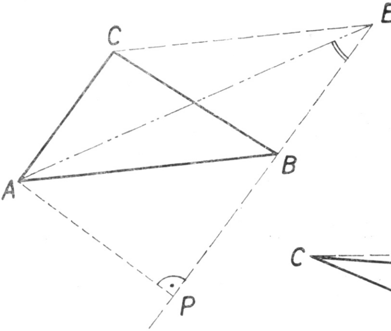
$$x_i = a, \; y_i = 1 ,$$

dostaneme po umocnění na čtvrtou hned (2).

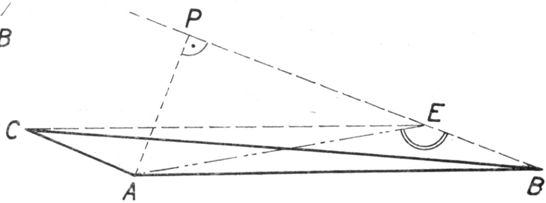
A - I - 4

V rovině jsou dány body A, B o vzdálenosti $|AB| = c > 0$ a přímka $p \parallel AB$ ležící ve vzdálenosti $d > 0$ od přímky AB. Na přímce p sestrojte bod C tak, aby v trojúhelníku ABC byly velikosti výšky v_b a těžnice t_a stejné. Jaká je podmínka řešitelnosti?

Řešení: *Rozbor:* Nechť trojúhelník ABC je řešením úlohy. Doplňme jej na rovnoběžník $ABEC$. Z bodu A spusťme kolmici na přímku BE a její patu označme P. Zřejmě je $|AE| = 2t_a$, $|AP| = v_b$ a tedy $|AE| : |AP| = 2 : 1$, takže $\sphericalangle AEP = 30°$. Úhel AEB není pravý, to by bylo



Obr. 28



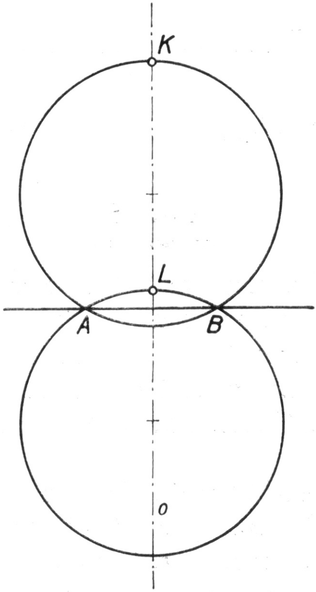
Obr. 29

$|AP| = |AE|$. Je-li $\sphericalangle AEB$ ostrý (obr. 28), leží bod P na polopřímce EB a $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AEP = 30°$. Je-li $\sphericalangle AEB$ tupý (obr. 29), leží bod P na polopřímce opačné k polopřímce EB a $\sphericalangle AEB = 180° - \sphericalangle AEP = 150°$.

Konstrukce: Známou konstrukcí sestrojíme množinu **M** všech bodů, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem 30° nebo 150°. (Jsou to dvě kružnice se společnou tětivou AB, s výjimkou bodů A, B.) Je-li E společný bod množiny **M** a přímky p a S střed úsečky AE, protnou se přímky BS, p v hledaném bodě C.

Zkouška: Označme P patu kolmice vedenou z bodu A na přímku BE. Je-li $\sphericalangle AEB = 30°$ (obr. 28), je $\sphericalangle AEP = \sphericalangle AEB = 30°$. Je-li $\sphericalangle AEB = 150°$ (obr. 29), je $\sphericalangle AEP = 180° - \sphericalangle AEB = 30°$. V trojúhelníku AEP je tedy $|AE| : |AP| = 2 : 1$ a v trojúhelníku ABC je $t_a = v_b$.

Diskuse: Body C, E si vzájemně jednoznačně odpovídají, a proto se počet řešení úlohy shoduje s počtem společných bodů množiny **M** a přímky p. Označme K, L průsečíky osy úsečky AB s množinou **M** ležící v té polorovině ohraničené přímkou AB, která obsahuje přímku p (obr. 30).



Obr. 30

Vzdálenost bodu K od přímky AB je $\frac{c}{2} \operatorname{tg} 75° = \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3})$,

vzdálenost bodu L od přímky AB je $\frac{c}{2} \operatorname{tg} 15° = \frac{c}{2}(2 - \sqrt{3})$.

Pro počet řešení tedy dostáváme

$d > \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3})$ . . . . 0 řešení

$d = \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3})$ . . . . 1 řešení

$$\frac{c}{2}(2-\sqrt{3}) < d < \frac{c}{2}(2+\sqrt{3}) \; \ldots \; 2 \text{ řešení}$$

$$d = \frac{c}{2}(2-\sqrt{3}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 3 \text{ řešení}$$

$$0 < d < \frac{c}{2}(2-\sqrt{3}) \ldots\ldots\ldots\ldots \; 4 \text{ řešení}$$

A - I - 5

V rovině je dána ortonormální soustava souřadnic. Dva mřížové body se nazývají sousední, je-li jejich vzdálenost rovna jedné (každý mřížový bod má tedy 4 sousední mřížové body). V uvažované rovině je dán kruh **K** o poloměru $r \geqq 2$, na hraniční kružnici kruhu **K** neleží žádný mřížový bod.

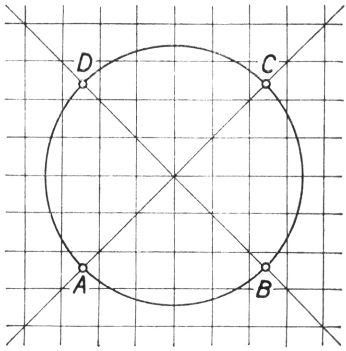
Mřížový bod A ležící uvnitř **K** nazveme „vnitřním okrajovým bodem", jestliže aspoň jeden bod sousední s A leží vně **K**. Obdobně nazveme mřížový bod B ležící vně **K** „vnějším okrajovým bodem", jestliže aspoň jeden bod sousední s B leží uvnitř **K**.

Dokažte, že počet vnějších okrajových bodů je o 4 větší než počet vnitřních okrajových bodů.

Řešení: Úlohu nejprve přeformulujeme do názornější podoby:

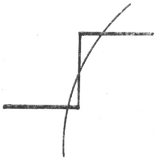
Na čtverečkovaném papíru je narýsována kružnice s poloměrem $r \geqq 2$ tak, aby neprocházela žádným průsečíkem linek. Vrchol čtverečku nazveme „vnitřním okrajovým bodem", leží-li uvnitř kružnice a některý sousední vrchol leží vně. Analogicky zavedeme „vnější okrajové body“. Máme dokázat, že vnějších okrajových bodů je právě o 4 více než vnitřních.

Označme A, B, C, D průsečíky dané kružnice s přímkami, které procházejí jejím středem a svírají s linkami čtverečkové sítě úhel 45° (obr. 31). Tyto body rozdělí



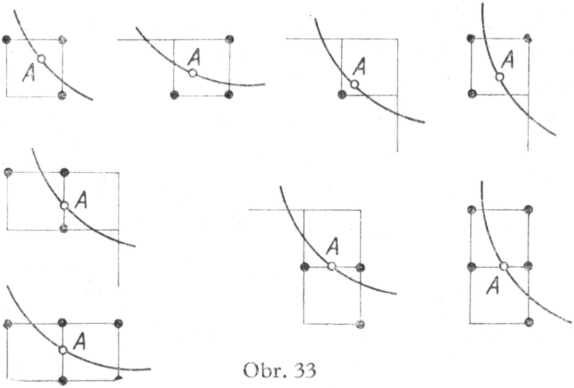
Obr. 31

kružnici na čtyři oblouky. Ke každému oblouku zahrneme i oba jeho krajní body. Čtverečkům, v nichž leží — třeba i jen na straně — některý z bodů A, B, C, D, budeme říkat kritické čtverečky. Vyznačme všechny vodorovné strany, které protínají oblouk AD nebo BC, a všechny svislé strany, které protínají oblouk AB nebo CD (budeme mluvit o vyznačených stranách) a nejsou přitom strany kritických čtverečků. Ukážeme, že všechny okrajové body, které nejsou vrcholy kritických čtverečků, jsou koncové body vyznačených úseček: Vezměme si nějaký okrajový bod, který není vrcholem kritického čtverečku. Ten je podle definice okrajových bodů koncovým bodem některé strany — nechť je to např. svislá strana (pro vodorovnou stranu bychom uvažovali analogicky). Pokud tato svislá strana protíná oblouk AB nebo CD, je vyznačena. Protíná-li oblouk AD (u oblouku BC bychom uvažovali analogicky), leží oba její koncové body na vodorovných vyznačených stranách protínajících oblouk AD (obr. 32).



Obr. 32

To je způsobeno tím, že v oblouku AD se kružnice „ve svislém směru mění rychleji než ve směru vodorovném". Přesněji: Nechť vodorovná a svislá přímka protínají oblouk AD v bodech V, resp. S a jejich průsečík P nechť na oblouku neleží. Pak $PV < PS$. Všechny okrajové body, které nejsou vrcholy kritických čtverečků, tedy leží na vyznačených úsečkách. Mezi všemi koncovými body vyznačených úseček je stejný počet vnitřních a vnějších okrajových bodů, neboť každá vyznačená úsečka spojuje jeden vnitřní a jeden vnější okrajový bod a žádné dvě nemají společný bod. Zbývá vyšetřit kritické čtverečky. V okolí bodu A může nastat 8 situací znázorněných na obr. 33. Vidíme, že v každém případě je mezi vrcholy kritických čtverečků, které neleží na vyznačených úsečkách, právě o jeden vnější okrajový bod více než vnitřních okrajových bodů. Stejně je tomu i v okolí bodů B, C, D. Celkem je tedy vnějších okrajových bodů o čtyři více než vnitřních.



Obr. 33

Jiné řešení: Sestrojme všechny strany čtverečků, které protínají danou kružnici a oba jejich koncové body jsou okrajové body (dál jim budeme říkat jen strany). Vnější a vnitřní okrajové body budeme počítat takto: Zvolíme si některou stranu jako výchozí a budeme postupovat po kružnici od průsečíku s výchozí stranou třeba ve směru otáčení hodinových ručiček. Jakmile dojdeme k průsečíku se stranou, připočítáme jeden vnitřní a jeden vnější okrajový bod, pokud jsme některý z nich nepočítali už dříve. Oběhneme-li celou kružnici, spočítáme tak všechny okrajové body. Setkáme se při tom se stranami vodorovnými a svislými. Dojdeme-li ke straně, která je rovnoběžná se stranou bezprostředně předcházející, zvětší se počet vnějších i vnitřních okrajových bodů o 1. Dojdeme-li ke straně kolmé ke straně bezprostředně předcházející, mají obě strany jeden okrajový bod společný a započteme jen druhý okrajový bod. Vyjděme od vodorovné strany, která leží nejvíc vlevo (je-li jich víc, zvolme libovolnou z nich). Popsaným způsobem postupujme tak dlouho, až dojdeme ke svislé straně, která leží nejvíc nahoře (k libovolné z nich, je-li jich víc). Procházíme-li tímto „kvadrantem", dvojice sousedních na sebe kolmých stran se pravidelně střídají. Následuje-li po vodorovné straně strana svislá, přibude 1 vnější okrajový bod, následuje-li po svislé straně vodorovná, přibude 1 vnitřní okrajový bod. Projdeme-li „kvadrant", napočítáme o 1 vnější okrajový bod víc než vnitřních, neboť jsme vyšli od vodorovné strany a skončili u svislé. Podobně je tomu i u ostatních tří „kvadrantů" a z toho je vidět, že vnějších okrajových bodů je o 4 víc než vnitřních.

A - I - 6

Dokažte, že v trojúhelníku o stranách a, b, c a úhlech α, β, γ (úhel α leží proti straně a, atd.) platí

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma > 0\,.$$

Řešení: Označme r poloměr kružnice opsané uvažovanému trojúhelníku. Pak je

$$a = 2\,r \sin \alpha\,, \qquad b = 2\,r \sin \beta\,, \qquad c = 2\,r \sin \gamma$$

a tedy

$$\begin{aligned} a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma &= 2\,r \sin \alpha \cos \alpha + \\ &+ 2\,r \sin \beta \cos \beta + 2\,r \sin \gamma \cos \gamma = \\ &= 2\,r[\sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + \sin \gamma \cos \gamma] = \\ &= 2\,r[\sin \gamma \cos (\alpha - \beta) - \sin \gamma \cos (\alpha + \beta)] = \\ &= 2\,r \sin \gamma\, [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] = \\ &= 4\,r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma\,. \end{aligned}$$

Protože v intervalu $(0, \pi)$ jsou hodnoty funkce sinus kladné, je uvažovaný výraz kladný.

Jiné řešení: Podle kosinové věty je

$$\begin{aligned} 2\,ab \cos \gamma &= a^2 + b^2 - c^2\,, \\ 2\,ac \cos \beta &= a^2 + c^2 - b^2\,, \\ 2\,bc \cos \alpha &= b^2 + c^2 - a^2\,. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li první rovnici číslem c^2, druhou b^2 a třetí a^2 a sečteme, dostaneme

$$\begin{aligned} &2\,abc\,(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) = \\ &= 2\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4 = \\ &= 4\,a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2 = 4a^2c^2 - (2ac \cos \beta)^2 = \\ &= 4a^2c^2\,(1 - \cos^2 \beta) > 0\,. \end{aligned}$$

Další řešení: Pokud trojúhelník není tupoúhlý, je platnost dokazované nerovnosti zřejmá. Nechť tedy γ je tupý úhel. Využijeme-li toho, že funkce kosinus na intervalu $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ klesá a je kladná, a trojúhelníkové nerovnosti, dostaneme

$$\begin{aligned} &a \cos \alpha + b \cos \beta > a \cos (\alpha + \beta) + b \cos (\alpha + \beta) > \\ &> c \cos (\alpha + \beta) = -\,c \cos \gamma\,. \end{aligned}$$

A - II - 1

Má-li rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ všechny kořeny reálné, potom $a^2 \geqq 3b$. Dokažte.

Řešení: Označíme-li kořeny dané rovnice x_1, x_2, x_3, je $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, tedy

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a\,, \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b\,,$$

a proto

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \geqq$$

$$\geqq 3\,(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3b\,.$$

Poslední nerovnost plyne z nerovnosti

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\,,$$

kterou dostaneme sečtením nerovností $(x_1 - x_2)^2 \geqq 0$, $(x_2 - x_3)^2 \geqq 0$, $(x_3 - x_1)^2 \geqq 0$. (Je též přímým důsledkem Cauchyovy nerovnosti.)

Jiné řešení: Není těžké zjistit, že má-li mnohočlen všechny kořeny reálné, má jeho derivace také všechny kořeny reálné. Derivace mnohočlenu $x^3 + ax^2 + bx + c$ je mnohočlen $3x^2 + 2ax + b$. Ten má všechny kořeny reálné, právě když má nezáporný deskriminant, tj.

$$4a^2 - 12b \geqq 0\,,$$

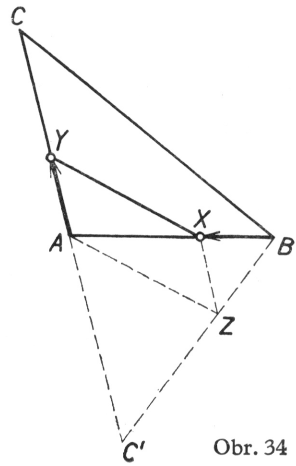
neboli

$$a^2 \geqq 3b\,.$$

A - II - 2

V trojúhelníku ABC se na úsečce BA pohybuje rovnoměrně bod X z bodu B do bodu A a na úsečce AC bod Y rovnoměrně z bodu A do bodu C tak, že v počátečním okamžiku je X v bodě B a Y v bodě A, v koncovém okamžiku je X v bodě A a Y v bodě C.
Sestrojte polohu bodů X a Y, při které mají nejmenší vzdálenost.

Řešení: Pro každý časový okamžik doplníme body X, Y a A na rovnoběžník $XYAZ$ (obr. 34). Je pak $XZ \parallel CA$,



Obr. 34

$|XZ| : |XB| = |YA| : |XB| = |CA| : |AB|$ (vzhledem k rovnoměrnosti pohybu bodů X, Y). Odtud plyne, že bod Z se pohybuje rovnoměrně po úsečce BC', kde C' je bod souměrný k bodu C podle bodu A.
Protože je $|XY| = |AZ|$, převádí se úloha na nalezení takového bodu Z_0 na úsečce BC', který má minimální vzdálenost od bodu A. Tímto bodem Z_0 je buď pata P kolmice vedené bodem A na přímku BC' (je-li P bodem úsečky BC'), nebo některý z krajních bodů úsečky BC'. K bodu P pak sestrojíme bod X_0 ($X_0Z_0 \parallel AC$) a bod Y_0 (doplněním bodů A, Z_0, X_0 na rovnoběžník $AZ_0X_0Y_0$). Je-li $Z_0 = B$, jsou hledané body $X = B$, $Y = A$. Je-li $Z_0 = C$, je $X = A$, $Y = C$.

Jiné řešení: Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby vrcholy trojúhelníku měly kartézské souřadnice $A = [0, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [c, d]$, pak polohy bodů X, Y mají souřadnice $X = [b(1-t), 0]$, $Y = [ct, dt]$ pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Funkce proměnné t

$$|XY|^2 = [(b+c)^2 + d^2]\left[t - \frac{b(b+c)}{d^2 + (b+c)^2}\right]^2 + \frac{b^2d^2}{d^2 + (b+d)^2}$$

nabývá v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ minima

$$\text{v bodě } t = \frac{b(b+c)}{d^2 + (b+c)^2} \quad \text{v případě } 0 < \frac{b(b+c)}{d^2+(b+c)^2} < 1,$$

$$t = 0 \qquad \text{v případě } \frac{b\,(b+c)}{d^2+(b+c)^2} \leqq 0,$$

$$t = 1 \qquad \text{v případě } \frac{b\,(b+c)}{d^2+(b+c)^2} \geqq 1.$$

Výrazy udávající souřadnice extremálních bodů X, Y se snadno sestrojí (konstrukci zde nepopisujeme).

A - II - 3a

Je dáno přirozené číslo $k > 1$. Najděte nejmenší přirozené číslo n s touto vlastností: ať zvolíme jakkoli n různých přirozených čísel, vždy bude součet nebo rozdíl některých dvou z nich dělitelný číslem k.

Řešení: Hledané číslo je $n = \dfrac{k+3}{2}$ pro lichá k, $n = \dfrac{k+4}{2}$ pro sudá k.

Nejprve ukážeme, že toto číslo n má požadovanou vlastnost. Zvolme n různých přirozených čísel a uvažujme jejich zbytky při dělení číslem k. Jsou-li si dva ze zbytků rovny, je rozdíl příslušných čísel dělitelný číslem k. Jsou-li zbytky navzájem různé, tj. tvoří-li n navzájem různých čísel z množiny $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, pak alespoň dva leží v téže z $n - 1$ podmnožin

$$\{0\}, \{1, k-1\}, \ldots, \left\{\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}\right\} \text{ pro lichá } k,$$

$$\{0\}, \{1, k-1\}, \ldots, \left\{\frac{k-2}{2}, \frac{k+2}{2}\right\}, \left\{\frac{k}{2}\right\} \text{ pro sudá } k$$

a součet příslušných dvou čísel je dělitelný číslem k.

Nakonec ukážeme, že uvedené číslo n je nejmenší číslo s požadovanou vlastností. Existuje totiž $n - 1$ různých přirozených čísel takových, že součet ani rozdíl žádných dvou z nich není dělitelný číslem k.

Jsou to např. čísla

$$1, 2, \ldots, \frac{k-1}{2}, k \text{ pro lichá } k,$$

$$1, 2, \ldots, \frac{k}{2}, k \text{ pro sudá } k.$$

A - II - 3b

V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník $\mathbf{T}$ s vrcholy A, B, C, s pravým úhlem při vrcholu C a odvěsnami délek a, b. Na polopřímce CA najděte bod A' a na polopřímce CB bod B' tak, aby vzniklý trojúhelník $\mathbf{T}'$ s vrcholy A', B', C byl rovnoramenný a přitom aby obsah rozdílu množin $\mathbf{T} \cup \mathbf{T}'$ a $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}'$ byl minimální. Trojúhelník $\mathbf{T}'$ sestrojte.

Řešení: Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že $a \leqq b$. Je-li $a = b$, stačí zvolit $\mathbf{T}' = \mathbf{T}$. Nechť tedy $a < b$, hledejme délku u odvěsen trojúhelníku $\mathbf{T}'$. Je-li u zatím proměnná délka odvěsen, označme $S(u)$ obsah rozdílu $\mathbf{T} \cup \mathbf{T}'$ a $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}'$. Je-li $u > b$, $S(u)$ lze zmenšit zmenšením u. Je-li $u < a$, lze $S(u)$ zmenšit zvětšením u. Stačí se proto omezit na případ, že $a \leqq u \leqq b$. Zvolíme-li ortonormální soustavu souřadnic tak, že kladná osa x je polopřímka CB a kladná osa y polopřímka CA, má přímka

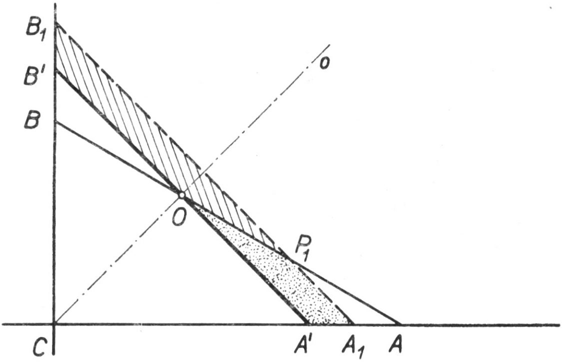
AB rovnici $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, přímka $A'B'$ rovnici $x + y - u = 0$. Jejich průsečík P má proto souřadnice $\left[a \frac{b-u}{b-a}, b \frac{u-a}{b-a}\right]$. Obsah $S(u)$ je roven součtu obsahu trojúhelníku (popř. degenerovaného v bod) PAA' a trojúhelníku PBB',

$$S(u) = \frac{1}{2} \frac{a}{b-a} (b-u)^2 + \frac{1}{2} \frac{b}{b-a} (u-a)^2 -$$

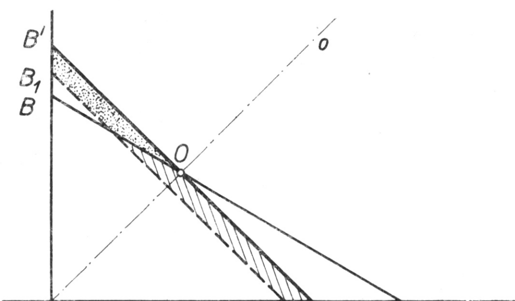
$$- \frac{1}{2} \frac{a+b}{b-a} \left(u - \frac{2ab}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{2} ab \frac{b-a}{a+b} .$$

Minimum $S(u)$ tedy nastane pro $u = u_0 = \frac{2ab}{a+b}$. Souřadnice bodu P jsou pak $\left[\frac{1}{2} u_0, \frac{1}{2} u_0\right]$. Bod P je proto průsečíkem přepony daného trojúhelníku $\mathbf{T}$ s osou pravého úhlu při vrcholu C. Přeponu trojúhelníku $\mathbf{T}'$ pak dostaneme, vedeme-li bodem P kolmici k přímce PC.

Jiné řešení: Jak už víme, stačí vyšetřit případ $a < b$. Označme O průsečík přepony AB s osou o úhlu BCA. Bodem O veďme přímku kolmou k ose o a její průsečíky s přímkami AC, BC označme A', B'. Sestrojme nyní přeponu $A_1B_1 \parallel A'B'$ tak, aby $A_1 \in AA'$ (obr. 35). Dostaneme tak trojúhelník $\mathbf{T}_1 \equiv A_1B_1C$. Průsečík P_1 přepon AB, A_1B_1 leží uvnitř úsečky OA, neboť $a < b$. Označme S' (resp. S_1) obsah rozdílu množin $\mathbf{T} \cup \mathbf{T}'$ a $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}'$ (resp. $\mathbf{T} \cup \mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}_1$).



Obr. 35



Obr. 36

Platí

$$S_1 = S' + B_1B'OP_1 - A'OP_1A_1 .$$

Ze souměrnosti čtyřúhelníku AA'_1B_1B' podle osy o plyne, že $B_1B'OP_1 > A'OP_1A_1$, a tedy $S_1 > S'$. Analogicky zjistíme, že i když přeponu $A_1B_1 \parallel A'B'$ vedeme tak, aby $B_1 \in BB'$ (obr. 36), je $S_1 > S'$. Pro ostatní polohy přepony $A_1B_1 \parallel A'B'$ je zřejmě také $S_1 > S'$. Trojúhelník $A'B'C$ má tedy požadovanou vlastnost.

A - III - 1

Nechť n je dané přirozené číslo. Určete počet všech uspořádaných trojic $[x, y, z]$ nezáporných celých čísel x, y, z, která vyhovují rovnici

$$x + 2y + 5z = 10\,n\,.$$

Řešení: Daná rovnice má v oboru nezáporných celých čísel právě tolik řešení jako nerovnice

$$2y + 5z \leqq 10\,n\,. \tag{1}$$

Je-li $[y, z]$ řešení této nerovnice, je

$$0 \leqq z \leqq 2n\,. \tag{2}$$

Ke každému z, pro které platí (2), existuje právě

$$\left[\frac{10n - 5z}{2}\right] + 1 = 5n + 1 + \left[-\frac{5z}{2}\right]$$

čísel y tak, že dvojice $[y, z]$ splňuje (1) — jsou to $y = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{10n - 5z}{2}\right]$. (Hranaté závorky označují celou část čísla, které obsahují.) Celkový počet řešení nerovnice (1) a tedy i dané rovnice je

$$\sum_{z=0}^{2n}\left(5n + 1 + \left[-\frac{5z}{2}\right]\right) = (2n + 1)(5n + 1) + \sum_{z=0}^{2n}\left[-\frac{5z}{2}\right].$$

Sčítáme-li přes sudá a lichá z zvlášť, dostaneme

$$\sum_{z=0}^{2n}\left[-\frac{5z}{2}\right]=\sum_{k=1}^{n}(-5k)+\sum_{k=1}^{n}(-5k+2)=$$

$$=-5n(n+1)+2n\,.$$

Celkem dostaneme právě $5n^2+4n+1$ řešení.

Jiné řešení: Je-li $z=0$, redukuje se daná rovnice na

$$x+2y=10n$$

a má $5n+1$ řešení. Je-li $z=1$, redukuje se rovnice na

$$x+2y=10n-5$$

a má $5n-2$ řešení. Je-li $z\geqq 2$, položme $t=z-2$. Označíme-li $P(n)$ počet řešení dané rovnice, má rovnice

$$x+2y+5t=10(n-1)$$

v oboru nezáporných celých čísel právě $P(n-1)$ řešení a přitom má právě tolik řešení jako daná rovnice v oboru celých čísel $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 2$. Je tedy

$$P(n)=5n+1+5n-2+P(n-1)=$$
$$=P(n-1)+10n-1\,.$$

Protože $P(0)=1$, je

$$P(n)=1+\sum_{k=1}^{n}(10k-1)=1-n+10(1+2+\ldots+n)=$$
$$=5n^2+4n+1\,.$$

A - III - 2

Je dán kvádr **Q** o rozměrech a, b, c, $a < b < c$. Najděte velikost hrany krychle **K**, která má s daným kvádrem rovnoběžné stěny a společný střed tak, aby objem rozdílu množin $\mathbf{Q} \cup \mathbf{K}$ a $\mathbf{Q} \cap \mathbf{K}$ byl minimální.

Řešení: Označme x neznámou velikost hrany krychle a $V(x)$ objem rozdílu těles $\mathbf{Q} \cup \mathbf{K}$ a $\mathbf{Q} \cap \mathbf{K}$. Tento rozdíl je složen z bodů, které jsou v **Q**, ale nejsou v **K**, a z bodů, které jsou v **K**, ale nejsou v **Q**.

Je-li $x > c$, lze $V(x)$ zmenšit zmenšením x, je-li $x < a$, lze $V(x)$ zmenšit zvětšením x. Stačí se tedy omezit na případ, že $a \leqq x \leqq c$.

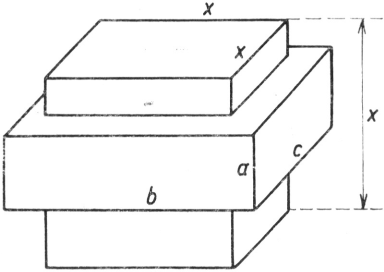
Budeme rozlišovat dva případy:

A. $a \leqq x \leqq b$. Pak je (obr. 37) objem $V(x)$ roven součtu objemu $a(bc - x^2)$ vnějšího prstence a objemu $x^2(x - a)$ dvou kvádrů, takže $V(x) = x^3 - 2ax^2 + abc$.

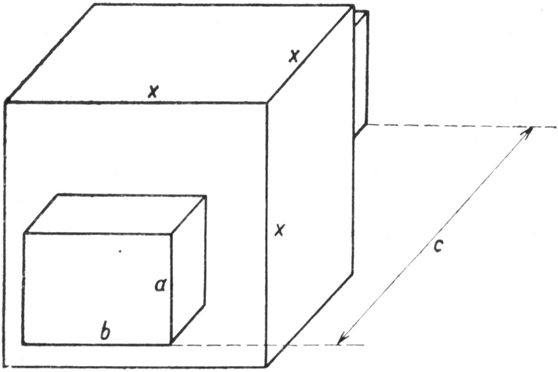
B. $b \leqq x \leqq c$. Pak je (obr. 38) objem $V(x)$ roven součtu objemu $(x^2 - ab)\,x$ prstence a objemu $ab(c - x)$ dvou kvádrů, takže $V(x) = x^3 - 2abx + abc$.

Protože derivace funkce $V(x)$ v intervalu (b, c) je $V'(x) = 3x^2 - 2ab > 0$, může v tomto intervalu nastat minimum jen pro $x = b$.

V intervalu (a, b) je derivace funkce $V(x)$ rovna $V'(x) = 3x^2 - 4ax$. Pokud $\frac{4}{3}a < b$, je záporná pro $a < x < \frac{4}{3}a$, kladná pro $\frac{4}{3}a < x < b$ a rovna nule pro $x =$



Obr. 37



Obr. 38

$= \dfrac{4}{3}a$. Je-li $\dfrac{4}{3}a \geqq b$, je derivace pro $a < x < b$ záporná.

Závěr: Hledaná hrana krychle má velikost $\dfrac{4}{3}a$, je-li $b >$
$> \dfrac{4}{3}a$, a má velikost b, je-li $b \leqq \dfrac{4}{3}a$.

A - III - 3

Jestliže ve čtyřúhelníku $ABCD$, jehož vrcholy leží na kružnici o poloměru 1, platí $|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| \geqq 4$, potom $ABCD$ je čtverec. Dokažte.
(Můžete užít Ptolemaiův vzorec

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD| \text{.)}$$

Řešení: Protože AC, BD jsou tětivy kružnice o poloměru 1, je $|AC| \leqq 2$, $|BC| \leqq 2$. Zkombinujeme-li ještě nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem s Ptolemaiovým vzorcem, dostáváme

$$4 \leqq |AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| \leqq$$

$$\leqq \frac{(|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|)^2}{4} = \frac{|AC|^2 \cdot |BD|^2}{4} \leqq 4\,.$$

Všude tedy nastává rovnost. Je proto $|AC| = 2$, $|BD| = 2$ a (z rovnosti mezi ar. a geom. průměrem) $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$. Tětivy AC, BD jsou tedy průměry kružnice, a proto $|AB| = |CD| = \sqrt{2}$, $|BC| = |AD| = \sqrt{2}$. Body A, B, C, D jsou vrcholy čtverce.

Připomeňme ještě, že Ptolemaiův vzorec se snadno odvodí pomocí kosinové věty — viz např. 16. svazek Školy mladých matematiků *S. Horák: Kružnice.*

Jiné řešení je založeno místo na Ptolemaiově vzorci na následujícím principu: Mějme dánu kružnici a na ní tři navzájem různé body X, Y, Z. Pohybuje-li se bod Z' po oblouku XZY, je součin $|XZ'| \, . \, |YZ'|$ maximální, právě když $|XZ'| = |YZ'|$. Trojúhelník XYZ' má totiž maximální obsah, právě když $|XZ'| = |YZ'|$, kdy má maximální výšku na stranu XY. Jeho obsah je roven $\frac{1}{2}|XZ'| \, . \, |YZ'| \, . \sin \sphericalangle XZ'Y$ a obvodový úhel $\sphericalangle XZ'Y$ zůstává při pohybu bodu Z' konstantní.

Uvažujme nyní čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do kružnice k o poloměru 1. Nejprve sestrojme čtyřúhelník $AB'CD'$ vepsaný do kružnice k tak, aby $|AB'| = |CB'|$, $|AD'| = |CD'|$. Podle zmíněného principu je pak

$$(|AB| \, . \, |BC|)(|CD| \, . \, |DA|) \leqq (|AB'| \, . \, |B'C|)(|CD'| \, . \, |D'A|)$$

a pokud $B' \neq B$ nebo $C' \neq C$, platí ostrá nerovnost. Dále sestrojme čtyřúhelník $A'B'C'D'$ vepsaný do kružnice k tak, aby $|B'A'| = |D'A'|$, $|B'C'| = |D'C'|$. Teď je

$$\begin{aligned}(|D'A| \, . \, |AB'|)(|B'C| \, . \, |CD'|) &\leqq \\ \leqq (|D'A'| \, . \, |A'B'|)(|B'C'| \, . \, |C'D'|)&\end{aligned}$$

a pokud $A' \neq A$ nebo $D' \neq D$, platí ostrá nerovnost. Odtud vidíme, že pokud čtyřúhelník $ABCD$ není totožný se čtyřúhelníkem $A'B'C'D'$, který z něho vznikl popsaným procesem, je

$$|AB| \, . \, |BC| \, . \, |CD| \, . \, |DA| < |A'B'| \, . \, |B'C'| \, . \, |C'D'| \, . \, |D'A'| \, .$$

Čtyřúhelník $A'B'C'D'$ je však zřejmě čtverec a důkaz je proveden.

A - III - 4

Nechť n je libovolné přirozené číslo. Najděte všechny n-tice reálných čísel $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$, pro které platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqq n \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_{n-i+1}.$$

Řešení: Nejprve ukážeme (což se provádělo v úloze A — P — 1), že platí pomocná věta:

Nechť $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$, $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$ jsou reálná čísla. Potom

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i ,$$

a rovnost nastane právě když buď $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, nebo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Pomocnou větu dostaneme sečtením nerovností

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqq 0$$

pro všechny dvojice indexů $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$. Použijeme-li ji na n-tice

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n , \quad -x_n \leqq -x_{n-1} \leqq \ldots \leqq -x_1,$$

dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} -x_{n-i+1} \leqq n \sum_{i=1}^{n} -x_i \cdot x_{n-i+1} ,$$

čili

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geqq n \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_{n-i+1} \, .$$

Právě, když zde platí rovnost, tj. právě, když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, platí nerovnost z textu úlohy.

A - III - 5

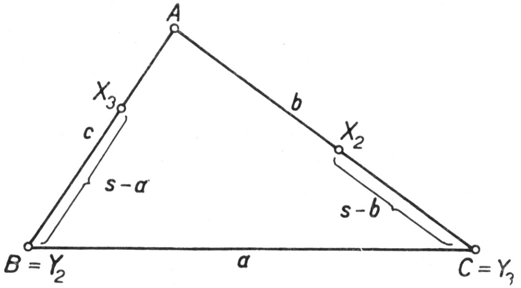
Je dán trojúhelník ABC s velikostmi stran $a \geqq b \geqq c$. Mezi všemi dvojicemi bodů X, Y na hranici trojúhelníku ABC, které tuto hranici dělí na dvě části stejné délky, najděte všechny takové, pro něž je vzdálenost $|XY|$ maximální.

Řešení: Předpokládejme, že se bod X pohybuje rovnoměrně po hranici trojúhelníku ABC. Potom se bod Y, který spolu s X půlí obvod trojúhelníku, pohybuje také rovnoměrně, a to stejnou rychlostí jako bod X. Pokud žádný z bodů X, Y není ve vrcholu trojúhelníku, jsou oba tyto body na různých stranách trojúhelníku, tedy na ramenech úhlu. Uvažujme nyní konvexní úhel φ s vrcholem V, na jednom jeho ramenu body R_1, R_2 a na druhém S_1, S_2 tak, že $|VR_1| = |VS_1| = u$, $|VR_2| = u + v$, $|VS_2| = u - v$ $(u \geqq v \geqq 0)$. Podle kosinové věty je

$$|R_2S_2|^2 = 2\,u^2\,(1 - \cos\varphi) + 2\,v^2\,(1 + \cos\varphi)\,,$$

a tedy $|R_2S_2|$ je maximální při $v = u$, tj. $S_2 \equiv V$. To však znamená pro naši úlohu, že největší vzdálenost mohou mít body X a Y jen v případě, že jeden z bodů X nebo Y

bude ve vrcholu trojúhelníku. Porovnejme proto tyto tři vzdálenosti (obr. 39). Je-li bod Y_2 ve vrcholu B, je bod



Obr. 39

X_2 na straně AC, a to ve vzdálenosti $s-a$ od bodu C, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ je poloviční obvod trojúhelníku ABC (je totiž $|Y_2C| + |CX_2| = s$). Ze stejného důvodu je pro $Y_3 = C$ bod X_3 ve vzdálenosti $s-a$ od bodu B na straně AB.

Podle kosinové věty je

$$|X_2Y_2|^2 = a^2 + (s-a)^2 - 2a(s-a)\cos\gamma$$

a

$$|X_3Y_3|^2 = a^2 + (s-a)^2 - 2a(s-a)\cos\beta\,.$$

Protože podle předpokladu $a \geqq b \geqq c$, je také $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$, tj. $\cos\beta \leqq \cos\gamma$, a proto

$$|X_2Y_2|^2 \leqq |X_3Y_3|^2. \tag{1}$$

Porovnáme-li stejným způsobem pro $Y_1 = A$ vzdálenosti $|X_2Y_2|$ a $|X_1Y_1|$, dostaneme, že

$$|X_1Y_1|^2 \leqq |X_2Y_2|^2. \tag{2}$$

Přitom v (1) nastává rovnost, právě když $\beta = \gamma$, a v (2) nastává rovnost, právě když $\alpha = \beta$. Proto vzdálenost je vždy maximální pro dvojici X_3Y_3, tj. je-li jeden z bodů X, Y ve vrcholu C. Je-li $c = b$, je vzdálenost maximální i v případě, je-li jeden z bodů X, Y ve vrcholu B; je-li $a = b = c$, je vzdálenost maximální, kdykoli jeden z bodů X, Y je ve vrcholu (rovnostranného) trojúhelníku.

A - III - 6

Najděte všechna přirozená čísla n, $n < 10^7$, pro která platí: Je-li přirozené číslo m, $1 < m < n$, nesoudělné s číslem n, pak je m prvočíslo.

Řešení: Nechť n je přirozené číslo, pro které platí tvrzení úlohy. Jestliže pro prvočíslo p platí $p^2 < n$, pak n je dělitelné číslem p. Skutečně, kdyby p nedělilo n, $p^2 < n$, potom p^2, n by byla nesoudělná čísla, ale p^2 není prvočíslo.

Snadno zjistíme, že čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30 vyhovují úloze. Žádné jiné číslo menší než 30 nemá vlastnost v úloze popsanou. Předpokládejme, že n má tuto vlastnost, $n > 30$. Protože $2^2 < 30$, $3^2 < 30$, $5^2 < 30$, je n dělitelno dvěma, třemi i pěti a tedy $n = 30k \geqq 60$. Protože $7^2 < 60$, je $n \geqq 7 . 60 = 420$. Potom $11^2 < 420$, $13^2 < 420$, $17^2 < 420$, $19^2 < 420$, a tedy $n \geqq 420 . 11 . 13 . 17 . 19 > 10^7$. Žádná další čísla $n < 10^7$ s požadovanou vlastností tedy neexistují. (Dá se dokonce ukázat, že neexistují už ani žádná taková $n \geqq 10^7$.)