Zpráva o XXI. MMO

XXI. mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 28. června — 9. července 1979 ve Velké Británii. Jejím hlavním dějištěm bylo Westfield College v Londýně, kde má své sídlo School Mathematics Project, který MMO zajišťoval po organizační stránce.

Co do účasti znamenala XXI. MMO rekord: oficiální delegace na ni vyslalo dvaadvacet zemí: Belgie, Brazílie, Bulharsko, Československo, Finsko, Francie, Holandsko, Izrael, Jugoslávie, Kuba, Maďarsko, NDR, NSR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Švédsko, USA, Velká Británie a Vietnam. S belgickou delegací přijel navíc jeden žák z Lucemburska; celkem se MMO zúčastnilo 166 soutěžících ze 23 zemí. Z tradičních účastníků tentokrát chybělo Mongolsko, nově se zúčastnila Brazílie a Izrael. Kromě toho byl na XXI. MMO přítomen pozorovatel z Austrálie, která se vážně zajímá o účast na některé příští MMO; myšlenka MMO tedy pronikla již na všechny kontinenty.

První etapa MMO byla zahájena 28. června v Bristolu, kde sídlila mezinárodní jury během přípravných prací. Zde se nejprve vybíraly soutěžní úlohy z návrhů zaslaných zúčastněnými zeměmi a předběžně zpracovaných organizátory MMO. Jury zasedala pod vedením předsedy *dr. Trevora Fletchera* v budově Churchill Hallu bristolské univerzity.

Vedle přípravy soutěže se na jednáních jury diskutovala i některá obecná témata. Mnoho pozornosti bylo věnováno vymezení tematiky olympiádních úloh. Tradiční požadavek, aby úlohy na MMO tematicky nevybočovaly z rámce průniku témat probíraných na školách všech zúčastněných zemí, je stále více pociťován jako nepříjemné a nežádoucí omezení. I když se nepodařilo ještě zcela sjednotit názory na tuto otázku, vyzněla diskuse alespoň ve všeobecné doporučení nevylučovat napříště a priori určitou problematiku jen proto, že se všude dokonale neprobírá. Šlo hlavně o komplexní čísla, trigonometrii, elementy analýzy, popř. též počtu pravděpodobnosti. Převládal názor, že od účastníků MMO je možno očekávat přece jen o něco víc než jen běžné školské znalosti — je ovšem třeba tyto požadavky včas specifikovat.

Výsledkem práce jury v této první etapě byl výběr šesti úloh pro soutěž:

1. Nechť p a q jsou přirozená čísla taková, že

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Dokažte, že p je dělitelné číslem 1979.

2. Je dán pětiboký hranol se základnami $A_1A_2A_3A_4A_5$ a $B_1B_2B_3B_4B_5$. Všechny hrany obou základen a všechny úsečky A_jB_k, $1 \leqq j \leqq 5$, $1 \leqq k \leqq 5$ obarvíme červenou nebo zelenou barvou tak, aby v každém trojúhelníku, jehož vrcholy jsou vrcholy hranolu a jehož všechny strany byly obarveny, existovala dvojice stran různých barev. Dokažte, že všech deset hran obou základen musí mít stejnou barvu.

3. V rovině jsou dány dvě protínající se kružnice k_1 a k_2. Označme A jeden z jejich průsečíků. Po kružnici k_1, resp. k_2 se pohybují body B_1, resp. B_2 ve stejném smyslu konstantní rychlostí tak, že se při každém oběhu setkávají v bodě A.

Dokažte, že v rovině existuje pevný bod P, pro který v každém okamžiku platí $|PB_1| = |PB_2|$.

4. Je dána rovina π, bod $P \in \pi$ a bod $Q \notin \pi$. Najděte všechny body $R \in \pi$, pro něž je podíl

$$\frac{|PQ| + |PR|}{|QR|}$$

maximální.

5. Najděte všechna reálná čísla b, pro něž existují nezáporná reálná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 taková, že platí

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = b\,, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = b^2\,, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = b^3\,.$$

6. Po vrcholech pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ skáče klokan. Každým skokem se přemisťuje z jednoho vrcholu do některého z obou sousedních; začíná v A a zastaví se, jakmile se poprvé dostane do E.

Označme a_n počet všech různých cest z A do Esložených z právě n skoků. Dokažte, že pro všechna $k = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$a_{2k-1} = 0\,, \qquad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x^{k-1} - y^{k-1})\,,$$

kde

$$x = 2 + \sqrt{2}\,, \qquad y = 2 - \sqrt{2}\,.$$

Poznámka. Cestou z A do E složenou z právě n skoků rozumíme posloupnost $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ vrcholů osmiúhelníku s těmito vlastnostmi:

(i) $P_0 = A\,, \qquad P_n = E;$

(ii) pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n-1$ je $P_j \neq E$;

(iii) pro každé $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ jsou P_j a P_{j+1} dva sousední vrcholy osmiúhelníku.

Výběr úloh na MMO je ovšem vždy výsledkem různých kompromisů; jury je omezena na předložené návrhy a nemá dostatek času úlohy ještě nějak dotvářet. Jako již často v posledních letech, byla i tentokrát v návrzích slabě zastoupena geometrie. Jury se však snažila, aby výsledný výběr byl tematicky pestrý a nepreferoval výrazně žádnou oblast školské matematiky. Vybrané úlohy pocházely z návrhů předložených NSR (1. a 6. úloha), Bulharskem (2.), SSSR (3.), USA (4.) a Izraelem (5.).

Součástí výběru úloh je také odhad jejich obtížnosti. To není lehký úkol, neboť žáci pracují při soutěži v podmínkách klausury a časový faktor může sehrát velkou roli. Po delší debatě se jury dohodla nezdůrazňovat příliš rozdíly mezi úlohami a ohodnotit je šesti (úlohy 1 a 4) a sedmi (úlohy 2, 3, 5, 6) body.

V sobotu 30. června dorazila již všechna soutěžící družstva do Londýna, a tak se jury v plném počtu a posílena o zástupce vedoucích delegací mohla pustit do konečné formulace přijatých úloh v národních jazycích žáků. V neděli 1. července byly již texty přeloženy, rozmnoženy a připraveny k rozdání soutěžícím. Jury tak zbylo trochu volna k návštěvě města Bristolu. Večer byli členové jury přijati náměstkem bristolského primátora a potom si v Churchill Hallu vyslechli koncert komorní hudby.

Vlastní soutěž XXI. MMO proběhla v Londýně ve Westfield College, kde byli všichni soutěžící také ubytováni. Slavnostní zahájení bylo 2. července dopoledne za přítomnosti státního sekretáře pro školství *Sira Jamese Hamiltona.* Jury přijela na toto zahájení ranním rychlíkem z Bristolu, kam se pak odpoledne vrátila, aby byla zachována obvyklá izolace od soutěžících. V Bristolu pak ještě jury navštívila Clifton College a prohlédla si areál této školy. Teprve v druhý den soutěže, 3. července ráno, přesídlila jury nadobro do Londýna do Westfield College.

Žáci řešili 2. července první tři a 3. července druhé tři soutěžní úlohy. V následujících dnech již měli volno k prohlídkám londýnských pamětihodností a k výletu lodí do Grenwiche, kdežto členové jury pilně pracovali na opravě žákovských řešení a koordinaci jejich hodnocení. Práce pokračovaly ve velkém tempu a dosti napjatý harmonogram byl dodržen jen za cenu některých „přesčasů". Vedle toho byl ve středu večer na programu koncert a ve čtvrtek přijetí všech účastníků MMO primátorem na londýnské radnici. V pátek 6. července byly již známy konečné výsledky soutěže a jury mohla rozhodnout o udělení cen. Celkem bylo uděleno 8 prvních cen — za řešení ohodnocená 37—40 body, 32 druhých cen (za 29—36 bodů) a 43 třetích cen (za 20—28 bodů). Navíc dostal jeden vietnamský žák zvláštní cenu za elegantní řešení třetí úlohy.

Na tomto posledním pracovním zasedání jury byly také prodiskutovány některé obecné otázky MMO v budoucnosti a byla přijata některá doporučení k organizaci příštích MMO. V pátek 6. července večer pak byla ve Westfield College uspořádána slavnostní závěrečná večeře pro všechny zúčastněné i četné hosty. V sobotu 7. července dopoledne se pak rovněž ve Westfield College konalo slavnostní rozdílení cen za přítomnosti vévodkyně z Gloucesteru, která osobně předala diplomy 83 žákům, kteří získali některou z udělených cen. Kromě diplomů dostali ocenění žáci také věcné dary (matematickou literaturu, plnicí pera).

Ihned po rozdělení cen odjeli všichni účastníci MMO autobusy do Oxfordu, cestou se nakrátko zastavili ve Windsoru, kde si prohlédli zámek. V Oxfordu pak byli většinou ubytováni v Keble College. Neděle 8. července byla věnována organizované prohlídce dalších oxfordských kolejí (čs. delegace navštívila Magdalen College) a odpolednímu autobusovému výletu do Stratfordu nad Avonou. Večer pak byla ve velké jídelně Keble College poslední, slavnostní večeře na rozloučenou.

V pondělí 9. července se již delegace opět rozjížděly do svých domovů. Československá delegace se vrátila do Prahy letadlem v odpoledních hodinách.

Československo se podílelo na XXI. MMO ve shodě s propozicemi této soutěže ve všech jejích fázích; návrhem úloh, prací v mezinárodní jury po celou dobu a soutěžním družstvem v plném počtu osmi žáků.

Jako návrh byl do Londýna již v květnu zaslán soubor čtyř úloh. Dvě z nich byly organizátory MMO zařazeny do širšího výběru, který byl předložen jury. Při postupném zužování výběru se jedna z našich úloh udržela až do posledního výběru šesti úloh z osmi. Byla to však algebraická úloha dosti náročná a jury usoudila, že by nebylo vhodné předkládat žákům více než jednu náročnou úlohu na každý den soutěže.

Československé družstvo pro XXI. MMO bylo jako obvykle vybráno z úspěšných účastníků naší MO kategorie A, a to podle výsledků dosažených ve III. i ve II. kole s přihlédnutím k výkonům podávaným v přípravných soustředěních a v korespondenčním semináři. Podle těchto kritérií byli jako nejlepší vybráni žáci:

Jaroslav Hančl	4. r. gymnázia v Bílovci
Miroslav Chlebík	4. r. gymnázia v Čadci
Jozef Jirásek	4. r. gymnázia v Košicích
Ladislav Kubini	3. r. gymnázia v Bardějově
Radan Kučera	4. r. gymnázia v Brně
Jan Nekovář	2. r. gymnázia v Praze 2
Otto Ritter	4. r. gymnázia v Praze 2
Josef Tkadlec	4. r. gymnázia v Bílovci

Výsledky, jichž dosáhli na XXI. MMO, jsou shrnuty v tabulce:

Žák	Počet bodů za řešení úlohy č.						Celkem	Udělená cena
	1	2	3	4	5	6		
Hančl	1	0	0	6	7	2	16	—
Chlebík	6	0	6	1	2	5	20	III.
Jirásek	0	7	7	6	0	4	24	III.
Kubini	0	0	6	6	4	1	17	—
Kučera	0	7	7	1	7	1	23	III.
Nekovář	6	7	7	6	7	7	40	I.
Ritter	0	2	0	6	3	1	12	—
Tkadlec	1	4	7	6	7	1	26	III.

Výsledky lze hodnotit jako úspěch, hlavně díky výbornému výkonu *J. Nekováře* — nejmladšího člena čs. družstva, který v soutěži neztratil ani bod (stejného výsledku dosáhli jen tři další soutěžící: dva sovětští a jeden vietnamský žák). Po jedenácti letech tak Československo opět získalo jednu z prvních cen na MMO.

I když výkony ostatních členů čs. družstva nepředčily očekávání, je zisk čtyř třetích cen jistě uspokojivý. Bližší pohled na tabulku výsledků svědčí o známé skutečnosti, že si naši žáci dovedou dobře poradit s úlohami se standardní tematikou algebraickou (úloha 5), ale zejména geometrickou (úlohy 3 a 4). Značné potíže měli naproti tomu s první úlohou, jejíž obtížnost jury poněkud podcenila.

Je to totiž úloha „triková“ (a tedy ne právě nejvhodnější pro klauzurní soutěž): kdo na úpravu vedoucí k jednoduchému řešení nepřišel, nedokázal zpravidla vůbec nic. Stejné potíže měla i většina ostatních soutěžících, některá družstva dokonce za první úlohu nezískala ani jeden bod. Také u šesté úlohy, kde šlo o v podstatě nepříliš těžké kombinatorické úvahy spojené s řešením rekurentních vztahů, nedopadli naši žáci právě nejlépe.

Šestice soutěžních úloh XXI. MMO vcelku dobře prověřila znalosti i nápaditost soutěžících a umožnila poměrně jemné odstupňování hodnocení podaných výkonů. Umístění čs. družstva na sedmém místě v neoficiální klasifikaci podle součtu bodů je uspokojivé a patrně odpovídá našim reálným možnostem. K tomu, abychom se zařadili mezi světovou špičku, nám chybí zatím větší vyrovnanost družstva a spolehlivost výkonu i v podmínkách MMO, které jsou přece jenom náročnější — po stránce odborné i psychickou zátěží — než na naší domácí matematické olympiádě.

Vedoucí a zástupci vedoucích delegací na XXI. MMO

Austrálie	prof. J. L. Williams, Sydney (pozorovatel)
Belgie	prof. A. Festraets, Brusel
	prof. W. van Harume
Brazílie	prof. A. Barone, Sao Paulo
Bulharsko	prof. J. B. Tabov, Sofia
	V. Michailov
Československo	dr. F. Zítek, Praha
	doc. dr. J. Moravčík, Žilina
Finsko	dr. M. Lahtinen, Helsinki
	dr. E. Pekkonen
Francie	prof. C. Deschamps, Paříž
	prof. D. Gerll
Holandsko	dr. J. van de Craats, Leiden
	dr. A. W. Boon, Haag
Izrael	prof. J. Gillis, Tel Aviv
	A. Markus
Jugoslávie	prof. D. Ljubić, Bělehrad
	V. Janković
Kuba	dr. F. Recío
Maďarsko	prof. E. Hódi, Budapešť
	dr. I. Reiman
NDR	prof. G. Burosch, Rostock
	dr. M. Noacková, Berlín

NSR	prof. A. Engel, Frankfurt n. M.
	dr. H. Sewerin
Polsko	Mgr. A. Mąkowski, Varšava
	dr. M. Bryński
Rakousko	prof. T. Mühlgassner, Eisenstadt
	prof. G. Windischbacher, Štýrský Hradec
Rumunsko	prof. I. Cuculescu, Bukurešť
	prof. P. Horia
Řecko	prof. I. Merminghis, Athény
SSSR	prof. A. P. Savin, Moskva
	V. I. Mišin
Švédsko	prof. L-Å. Lindahl, Uppsala
	dr. S. Jonsson
USA	prof. S. L. Greitzer, New Brunswick
	prof. M. Klamkin, Edmonton
Velká Británie	dr. C. Goldsmith, Wiltshire
	dr. T. Heard, Londýn
Vietnam	prof. Le Hai Chau, Hanoj
	Dao Van Phong

Celkové výsledky XXI. MMO
(pořadí zemí podle získaných cen)

Země	počet cen			celkem bodů
	1.	2.	3.	
SSSR	2	4	1	267
NSR	1	5	2	235
Rumunsko	1	4	2	240
Vietnam	1	3	–	134[1])
USA	1	2	2	199
Československo	1	–	4	178
Francie	1	–	1	155
Velká Británie	–	4	4	218
Polsko	–	2	3	160
NDR	–	2	2	180
Maďarsko	–	2	2	176
Švédsko	–	2	1	143
Jugoslávie	–	1	4	168
Holandsko	–	1	1	131
Bulharsko	–	–	5	150
Rakousko	–	–	4	152
Izrael	–	–	2	119
Finsko	–	–	1	89
Belgie	–	–	1	66
Řecko	–	–	1	57
Kuba	–	–	–	35[2])
Brazílie	–	–	–	19[3])
Lucembursko	–	–	–	7[4])

[1]) Vietnamské družstvo bylo jen čtyřčlenné.
[2]) Kubánské družstvo bylo jen čtyřčlenné.
[3]) Brazilské družstvo bylo pětičlenné.
[4]) Soutěžil jen jeden žák.

Řešení úloh XXI. MMO

1. Zkoumaný součet postupně upravíme

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}-$$

$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1318}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1319}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{659}\right)=$$

$$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\ldots+\frac{1}{1319}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)=$$

$$=\frac{1979}{660.1319}+\frac{1979}{661.1318}+\ldots+\frac{1979}{989.990}.$$

Zlomky uvedeme na společného jmenovatele a sloučíme. Poněvadž 1979 je prvočíslo, nemůže se při tom zkrátit, a čitatel výsledného zlomku bude nutně číslem 1979 dělitelný.

2. Nejprve dokážeme, že každé dvě sousední hrany téže základny mají touž barvu. Kdyby tomu tak nebylo, existovaly by na jedné základně — např. $A_1A_2A_3A_4A_5$ — dvě hrany, např. A_1A_2 a A_2A_3, z nichž první by byla červená a druhá zelená. Z tohoto předpokladu však odvodíme spor.

Z vrcholu A_2 vychází pět obarvených úseček A_2B_1, $A_2B_2, \ldots, A_2B_5$, alespoň tři z nich mají touž barvu.

Nechť tato barva je červená a nechť jsou to úsečky A_2B_j, A_2B_k, A_2B_l. Ze tří vrcholů B_j, B_k, B_l pětiúhelníku jsou nutně vždy dva sousední — např. B_jB_k. Úsečka B_jB_k je tedy hrana druhé základny, a je tedy obarvena. Kdyby však byla hrana B_jB_k červená, měl by trojúhelník $A_2B_jB_k$ všechny tři strany červené, což by odporovalo podmínkám úlohy, je tedy B_jB_k obarvena nazeleno.

Podívejme se nyní na úsečky A_1B_j, A_1B_k. Je-li aspoň jedna z nich — např. A_1B_j — červená, má trojúhelník $A_1A_2B_j$ všechny tři strany červené, což je opět spor. Jsou-li však obě úsečky A_1B_j, A_1B_k zelené, je celý trojúhelník $A_1B_jB_k$ zelený, tedy opět spor s podmínkami úlohy.

Předpokládáme-li, že z vrcholu A_2 vycházejí alespoň tři zelené úsečky A_2B_j, A_2B_k, A_2B_l, musí být hrana B_jB_k spojující dva sousedící vrcholy B_jB_k nutně červená, jinak by vznikl zelený trojúhelník $A_2B_jB_k$. Potom však obě úsečky A_3B_j, A_3B_k musí být červené (jinak by trojúhelník $A_2A_3B_j$, resp. $A_2A_3B_k$ měl tři zelené strany), to však znamená, že trojúhelník $A_3B_jB_k$ má všechny tři strany červené.

Dostali jsme tak spor v každém případě, což znamená, že všechny strany jedné a téže základny mají nutně touž barvu. Zbývá dokázat, že nemůže být jedna základna zelená a druhá červená.

Nechť $A_1 A_2$ jsou dva sousední vrcholy červené základny. Z vrcholu A_1 nutně vedou alespoň tři červeně obarvené úsečky A_1B_j, A_1B_k, A_1B_l. Kdyby jich totiž bylo méně, vedly by z A_1 nutně dvě zelené úsečky k dvěma sousedním vrcholům druhé, zelené základny a vznikl by tak trojúhelník s třemi stranami obarvenými nazeleno. Z vrcholů B_j, B_k, B_l jsou opět nutně dva sousední, např. B_j, B_k. Úsečky A_2B_j, A_2B_k nemohou být červené — trojúhelník $A_1A_2B_j$, resp. $A_1A_2B_k$ by pak měl všechny tři strany červené. Jsou tedy obě zelené, to však znamená, že trojúhelník $A_2B_jB_k$ má všechny tři strany zelené, což je opět spor s podmínkami úlohy.

Je tedy vidět, že všechny hrany obou základen musí být obarveny touž barvou. Úsečky A_jB_k, $j, k = 1, 2, \dots, 5$, pak mají — všechny nebo všechny s výjimkou jediné — druhou barvu.

3. Označme S_1, resp. S_2, střed kružnice k_1, resp. k_2, C střed úsečky S_1S_2 a A' druhý průsečík kružnic k_1 a k_2. Dokážeme, že hledaným bodem P je obraz bodu A' při středové souměrnosti vzhledem k bodu C. Tato souměrnost převádí S_1 v S_2 a zřejmě platí $|PS_2| = |A'S_1|$, $|PS_1| = |AS_2|$ a $PS_2 \parallel AS_1$, $PS_1 \parallel AS_2$.

Z toho, že se body B_1, B_2 pohybují konstantní rychlostí a že se při každém oběhu setkávají v bodě A, plyne, že jejich úhlová rychlost je stejná, tj., že se středové úhly $\sphericalangle AS_1B_1$, $\sphericalangle AS_2B_2$ vždy rovnají.

Veďme nyní libovolnou přímku bodem A' a označme B'_1, resp. B'_2 její další průsečíky s kružnicemi k_1, resp. k_2. (Je-li přímka tečnou k některé z kružnic, splyne B'_1, resp.

B_2' s bodem A'.) Dále rozlišíme dva případy podle toho, zda bod A' odděluje či neodděluje body B_1', B_2'.

Jestliže je neodděluje, je úhel $\sphericalangle AA'B_1' = \sphericalangle AA'B_2'$ obvodovým úhlem v obou kružnicích, kterému ovšem odpovídají stejné středové úhly. Jestliže A' odděluje body B_1' a B_2', jsou obvodové úhly $\sphericalangle AA'B_1'$ a $\sphericalangle AA'B_2'$ výplňkové, takže součet jim odpovídajících úhlů středových je 360°. V obou případech však vzhledem k definici pohybu bodů B_1 a B_2 vidíme, že B_1' a B_2' jsou odpovídající si polohy pohyblivých bodů B_1 a B_2. Znamená to, že v každém okamžiku leží bod A' na přímce B_1B_2.

Vezměme nyní přímku B_1B_2 a promítněme na ni kolmo body S_1, S_2, P; průměty označme po řadě S_1', S_2', P'. Z vlastností středové souměrnosti pak plyne $|S_1'A'| = |S_2'P'|$, $|S_2'A'| = |S_1'P'|$.

Nyní opět rozlišíme dva případy podle toho, zda bod A' odděluje či neodděluje body B_1, B_2. Navíc budeme pro jednoduchost předpokládat, že $|B_1A'| \leqq |B_2A'|$.

Jestliže A' odděluje B_1 a B_2, máme

$$|B_2P'| = |B_2S_2'| + |S_2'P'| = |B_2S_2'| + |S_1'A'| =$$
$$= \frac{1}{2}(|B_2A'| + |B_1A'|) = \frac{1}{2}|B_1B_2|.$$

V opačném případě pak

$$|B_2P'| = |B_2S_2'| - |S_2'P'| = |B_2S_2'| - |S_1'A'| =$$
$$= \frac{1}{2}(|B_2A'| - |B_1A'|) = \frac{1}{2}|B_1B_2|.$$

V obou případech tedy kolmý průmět bodu P na přímku B_1B_2 půlí úsečku B_1B_2, tedy vždy platí $|B_1P| = |B_2P|$.

4. Nejprve si odvodíme některé nutné podmínky, jimž musí vyhovovat bod R. Označme S patu kolmice spuštěné s bodu Q na rovinu π.

Zřejmě je $R \neq P$. V trojúhelníku PQR totiž platí $|PQ| + |PR| \geqq |QR|$, přičemž rovnost nastane právě tehdy, je-li $P = R$. Je tedy pro $P \neq R$

$$\frac{|PQ| + |PR|}{|QR|} > 1 = \frac{|PQ|}{|QP|}.$$

Bod S nutně leží na úsečce PR. Kdyby tomu tak nebylo, bylo by nutně $P \neq S$. Na přímce PS bychom pak vzali bod R' takový, aby S leželo na úsečce PR' a aby přitom $|SR'| = |SR|$. Bylo by pak ovšem také $|QR'| = |QR|$, neboť $QS \perp \pi$. Podle trojúhelníkové nerovnosti by však platilo

$$\frac{|PQ| + |PR'|}{|QR'|} = \frac{|PQ| + |PS| + |SR'|}{|QR|} > \frac{|PQ| + |PR|}{|QR|},$$

bod R by nevyhovoval úloze.

Úsečka QS je tedy nutně výškou v trojúhelníku PQR. Tento trojúhelník navíc musí být rovnoramenný: $|PR| = |PQ|$.

Označme γ úhel $\sphericalangle QPR$; je to úhel, který svírá přímka PQ s rovinou π. Označme dále $\alpha = \sphericalangle PRQ$, $\beta = \sphericalangle PQR$. Podle sinové věty platí

$$\frac{|PQ| + |PR|}{|QR|} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Při daném jmenovateli je pak čitatel maximální, je-li $\alpha = \beta$, tj. je-li trojúhelník PQR rovnoramenný.

Toto tvrzení se dokáže např. takto: Na kružnici se středem S a poloměrem rovným 1 zvolme tři body A, B, C tak, aby $\sphericalangle ASB = \alpha$, $\sphericalangle BSC = \beta$, $\sphericalangle ASC = \alpha + \beta$. Potom $\sin \alpha + \sin \beta$ je délka kolmého průmětu úsečky AC na přímku kolmou k SB. Je zřejmé, že tento průmět bude nejdelší, bude-li přímka, na kterou promítáme, rovnoběžná s úsečkou AC, tj. bude-li $AC \perp SB$, tj. bude-li SB osou úhlu $\sphericalangle ASC$, tj. bude-li $\alpha = \beta$.

Nyní již můžeme úlohu řešit: je-li $P \neq S$, existuje jediné řešení; je to bod R takový, aby S leželo na úsečce PR a aby trojúhelník PQR byl rovnoramenný, $|PR| = |PQ|$. Je-li $P = S$, tj. je-li $PQ \perp \pi$, pak existuje nekonečně mnoho bodů R; vyplňují celou kružnici o středu P a poloměru PQ.

5. Předpokládejme, že pro některé reálné číslo b existují čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 vyhovující podmínkám úlohy. Potom platí

$$b^3 = \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = b \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = b^2 \sum_{k=1}^{5} k x_k .$$

Poněvadž je zřejmě $b^3 - 2b^3 + b^3 = 0$, platí také

$$0 = \sum_{k=1}^{5} k x_k (k^4 - 2bk^2 + b^2) = \sum_{k=1}^{5} k x_k (k^2 - b)^2 .$$

Zde jsou však všechny sčítance nezáporné; má-li se jejich součet rovnat nule, musí být všechny nulové, tj. musí být

$$k x_k (k^2 - b) = 0$$

pro každé $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Jedno možné řešení je zřejmě $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, potom je také $b = 0$.

Je-li některé $x_k \neq 0$, je nutně $b = k^2$. To však znamená, že pro všechna $j \neq k$ je $x_j = 0$, a tedy $x_k = k$.

Číslo b tedy může být jen některé z čísel 0, 1, 4, 9, 16, 25 a kterékoli z těchto čísel může být číslem b.

6. Pro každý vrchol V daného osmiúhelníku označme $f_n(V)$ počet všech cest z A do V o n skocích, tj. počet všech posloupností

$$P_0, P_1, \ldots, P_n$$

vrcholů osmiúhelníku s těmito vlastnostmi:

(a) $P_0 = A$, $P_n = V$,

(b) P_n a P_{k+1} jsou dva sousední vrcholy pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

(c) $P_k \neq E$ pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

V důsledku symetrie vzhledem k ose AE platí

$$f_n(H) = f_n(B), \qquad f_n(G) = f_n(C), \qquad f_n(F) = f_n(D)$$

pro všechna n.

Do vrcholů A, B, C, E se lze dostat jedním skokem vždy z obou sousedních vrcholů, takže platí

$$f_n(A) = f_{n-1}(B) + f_{n-1}(H) = 2f_{n-1}(B),$$

$$f_n(B) = f_{n-1}(A) + f_{n-1}(C), \tag{1}$$

$$f_n(C) = f_{n-1}(B) + f_{n-1}(D), \tag{2}$$

$$f_n(E) = f_{n-1}(D) + f_{n-1}(F) = 2f_{n-1}(D).$$

Naproti tomu jsou vrcholy D a F dosažitelné pouze z vrcholu C, resp. G, takže

$$f_n(D) = f_{n-1}(C).$$

Číslo a_n, které máme určit, je v našem označení rovno

$$a_n = f_n(E) = 2f_{n-1}(D) = 2f_{n-2}(C).$$

Podle (1) je

$$f_n(B) = f_{n-1}(A) + f_{n-1}(C) = 2f_{n-2}(B) + f_{n-1}(C),$$

takže

$$f_{n-1}(C) = f_n(B) - 2f_{n-2}(B). \qquad (3)$$

Zároveň podle (2)

$$f_{n+1}(C) = f_n(B) + f_n(D) = f_n(B) + f_{n-1}(C),$$

takže

$$f_n(B) = f_{n+1}(C) - f_{n-1}(C).$$

Dosazením do (3) odtud dostáváme

$$f_{n-1}(C) = f_{n+1}(C) - f_{n-1}(C) - 2[f_{n-1}(C) - f_{n-3}(C)],$$

tzn.

$$f_{n+1}(C) - 4f_{n-1}(C) + 2f_{n-3}(C) = 0. \qquad (4)$$

Přímým výpočtem snadno zjistíme, že je

$$f_1(C) = 0, \quad f_2(C) = 1, \quad f_3(C) = 0, \quad f_4(C) = 4.$$

Odtud a ze (4) je již vidět, že $f_{2k+1}(C) = 0$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, tj. že je $a_{2k+1} = 0$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Obecný výraz pro a_{2k}, $k = 1, 2, 3, \ldots,$

$$a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1}), \tag{5}$$

kde $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$, ověříme: pro $k = 2, 3$ dostaneme dosazením

$$2 = 2 \,.\, f_2(C) = a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \,.\, 2 \,.\, \sqrt{2}\,,$$

$$8 = 2f_4(C) = a_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - y^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \,.\, (4 + 4)\sqrt{2}\,.$$

Rovnice (4) přepsaná pro a_{2k} pak zní

$$a_{2k} - 4\, a_{2\,(k-1)} + 2\, a_{2\,(k-2)} = 0\,; \tag{6}$$

dosadíme-li sem podle (5), vidíme, že (6) platí pro každé $k \geqq 2$.