29. ročník matematické olympiády

Kategorie Z

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 29. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1979-1980. 21. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 34–54.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404727

Kategorie Z

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

Z - P - 1

Jsou dány dva různé body P a Q. Sestrojte čtverec, který obsahuje body P a Q a má nejmenší možný obsah.

Řešení. Hledaný čtverec je čtverec s úhlopříčkou PQ. Obsah čtverce s úhlopříčkou PQ je totiž roven $\frac{1}{2}PQ^2$. Uvažujme čtverec, který obsahuje body P, Q, a přitom PQ není jeho úhlopříčka. Dokážeme-li, že jeho úhlopříčka u je pak větší než PQ, budeme hotovi, neboť jeho obsah $\frac{1}{2}u^2$ bude pak větší než $\frac{1}{2}PQ^2$. Dokážeme to dvěma způsoby.

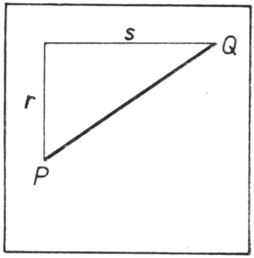
První způsob využívá Pythagorovy věty. Je-li úsečka PQ rovnoběžná se stranou a čtverce, je $PQ \leqq a$, kde a je velikost strany, a tedy

$$u = a\sqrt{2} > a \geqq PQ.$$

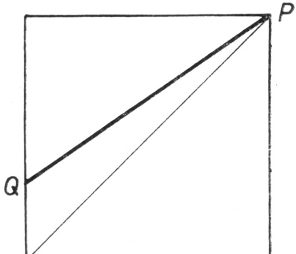
Není-li úsečka PQ rovnoběžná se stranou čtverce, doplníme ji na pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami rovnoběžnými se stranami čtverce (obr. 1). Pro odvěsny r, s platí $r \leqq a, s \leqq a$, přičemž alespoň jedna nerovnost je ostrá. (Pokud by pro obě platila rovnost, byla by úsečka PQ úhlopříčka). Podle Pythagorovy věty je

$$PQ^2 = r^2 + s^2 < a^2 + a^2 = u^2$$

Druhý způsob je založen na známé větě: V trojúhelníku je proti většímu úhlu větší strana. Důkaz provedeme jen pro



Obr. 1

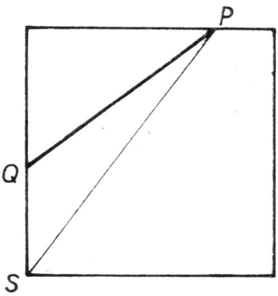


Obr. 2

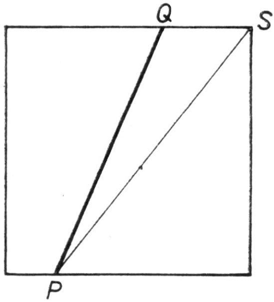
úsečky PQ, které mají oba krajní body na obvodu uvažovaného čtverce. (To stačí, jinak úsečku prodloužíme až k obvodu.)

V případě, kdy jeden krajní bod úsečky PQ leží ve vrcholu čtverce, dostaneme (obr. 2) z trojúhelníku PQR s tupým (pravým) úhlem při vrcholu Q nerovnost $PQ < PR = u$.

V případě, kdy bod P ani bod Q neleží ve vrcholu čtverce, dostaneme (obr. 3 pro P, Q na sousedních stranách, obr. 4 pro



Obr. 3



Obr. 4

P, Q na protějších stranách) z trojúhelníku PQS s tupým (pravým) úhlem při vrcholu Q že $PQ < PS$. Úsečka PS má krajní bod ve vrcholu čtverce a podle předešlého případu je $PS < u$.

Úkolem bylo minimální čtverec sestrojit, což je snadná konstrukce. Existuje jediný hledaný čtverec.

Poznámka. Úloha byla zařazena v XXVIII. ročníku MO jako Z-I-4.

Z - P - 2

Do kružnice je vepsán sedmiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Přímka p prochází středy stran A_3A_4, A_6A_7. Kolik úhlopříček daného sedmiúhelníku přímka p protíná?

Řešení je založeno na následujícím názorném faktu: V rovině je dána přímka p a dva různé body A, B, které na ní neleží. Potom přímka p protíná úsečku AB (tj. prochází jejím vnitřním bodem), právě když body A, B leží v opačných polorovinách určených přímkou p. V úloze leží v jedné polorovině určené přímkou p body A_4, A_5, A_6 a ve druhé body A_7, A_1, A_2, A_3. Z vrcholu A_5 vycházejí čtyři úhlopříčky do čtyř vrcholů opačné poloroviny, z vrcholů A_4 a A_6 po třech úhlopříčkách (a jedné straně). Celkem tedy přímka p protíná $4+3+3 = 10$ úhlopříček daného sedmiúhelníku. (Vyjdeme-li od bodů druhé poloroviny, dostaneme $3+3+2+2$ úhlopříček.)

Obecně, je-li v jedné polorovině určené přímkou p právě k vrcholů n-úhelníku, je počet proťatých úhlopříček roven

$$2(n-k-1)+(k-2)(n-k)=k(n-k)-2.$$

Z - P - 3

Určete dvojici různých trojciferných čísel, která má tyto dvě vlastnosti:

a) v desítkové soustavě mají čísla zápisy xyz a zyx,
b) mají co největšího společného dělitele.

Řešení. Úloha by se dala řešit tak, že bychom sestavili všechny dvojice různých čísel s vlastností a), určili největšího společného dělitele pro každou takovou dvojici čísel, a pak našli dvojici (nebo dvojice), jejíž největší společný dělitel je mezi všemi ostatními největší. Existuje však 360 dvojic různých trojciferných čísel s vlastností a), a to by dalo příliš práce. Pokusíme se tedy zmenšit počet dvojic, ze kterých budeme vybírat. Využijeme k tomu zápisu čísel v desítkové soustavě. Jsou-li N, N' dvě trojciferná čísla s vlastností a), můžeme psát

$$N = 100x + 10y + z, N' = 100z + 10y + x.$$

Jejich rozdíl má tvar

$$N - N' = 99\,(x - z) \tag{1}$$

Můžeme ještě předpokládat, že $N > N'$, tedy $x > z$.
Je-li D společný dělitel dvou čísel, je D též dělitelem jejich rozdílu. Víme tedy, že společný dělitel čísel N, N' je také dělitelem čísla (1). Dělitelé čísla (1) jsou ale pouze čísla 1, 3, 9, 11, 33, 99 a jejich k-násobky, kde k je dělitelem čísla $x - z \leqq 8$. Protože však hledáme dvojice vlastnosti a) s největším možným společným dělitelem, bude užitečné nejdříve vyzkoušet, jestli existují takové dvojice čísel vlastnosti a), která jsou obě dělitelná některým větším z vyjmenovaných čísel, třeba číslem 99. Všechny trojciferné násobky čísla 99 jsou

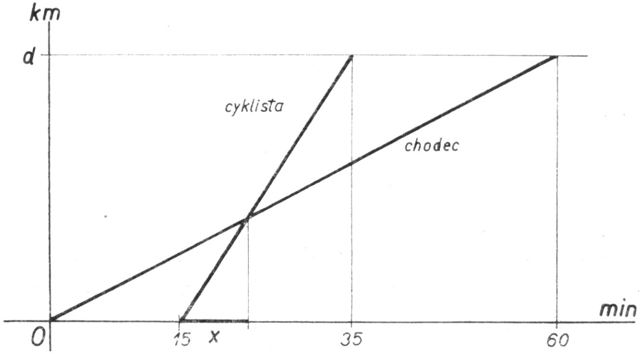
198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990

a mezi nimi jsou tyto dvojice vlastnosti a):
(198, 891) s největším společným dělitelem 99
(297, 792) s největším společným dělitelem 99
(396, 693) s největším společným dělitelem 99
(495, 594) s největším společným dělitelem 99

Teď musíme ještě vyzkoumat, zda neexistují dvojice čísel vlastnosti a), která sice nejsou dělitelná číslem 99, ale jsou obě dělitelná některým číslem větším než 99. Tímto společným dělitelem by muselo být některé z čísel tvaru $33k$, protože pro $k \leqq 8$ je $9k$ i $11k$ menší než 99. Přicházejí v úvahu pouze čísla $4 . 33 = 132$, $5 . 33 = 165$ a $7 . 33 = 231$. (Jsou-li obě čísla dělitelná číslem $8 . 33$, jsou též dělitelná číslem $4 . 33$.) Mezi všemi trojcifernými násobky čísla 132, tedy mezi čísly 132, 264, 396, 528, 660, 792, 924, není žádná dvojice čísel vlastnosti a) a totéž platí pro násobky čísla 165 a čísla 231. Existují tedy právě čtyři dvojice čísel daných vlastností, které jsme uvedli výše. Každá dvojice má za největšího společného dělitele číslo 99.

Z - P - 4

Dva přátelé z téže obce potřebují navštívit blízké město. První jde pěšky a cesta mu trvá hodinu. Druhý jede na kole



Obr. 5

a cesta mu trvá 20 minut. Chodec vyšel čtvrt hodiny před odjezdem cyklisty. Za jakou dobu po svém odjezdu ho cyklista dohoní, je-li pohyb každého z nich rovnoměrný?

Grafické řešení. Na vodorovné ose bude čas v minutách, na svislé vzdálenosti v kilometrech. (Obr. 5.) Pohyb chodce bude začínat v počátku a končit v bodě $(60, d)$, kde d je vzdálenost města od obce (tu neznáme, ani nezjistíme). Pohyb cyklisty pak začíná v bodě $(15, 0)$ a končí v bodě $(35, d)$. Souřadnice průsečíku obou úseček odpovídají času a místu, kdy a kde předjel cyklista chodce.

Řešení porovnáním vzdáleností. Chodec má rychlost d km/hod. a cyklista $3d$ km/hod. Označme x hledanou dobu (v hodinách). V okamžiku setkání tedy cyklista i chodec urazili tutéž vzdálenost, a to cyklista $3dx$ km a chodec $d\left(x + \frac{1}{4}\right)$ km $\left(\text{měl } \frac{1}{4} \text{ h náskok}\right)$. Je tedy

$$3dx = d\left(x + \frac{1}{4}\right),$$

a odtud

$$x = \frac{1}{8}\text{ h} \left(= 7\frac{1}{2}\text{min}\right).$$

Poznámka. V VII. ročníku MO byla úloha zařazena jako D-II-3. Ve sbírce *Vyšín-Macháček*: Vybrané úlohy MO kategorie Z je uvedena pod č. 56.

Z - I - 1

Je dán čtverec $ABCD$ s délkou strany 2. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA jsou postupně zvoleny body K, L, M, N tak, že $AK = BL = CM = DN = x$. Vyjádřete obsah čtverce $KLMN$ pomocí x. Pro které x je obsah čtverce $KLMN$ nejmenší?

Řešení. Podle Pythagorovy věty snadno zjistíme, že čtverec $KLMN$ má obsah $x^2 + (2 - x)^2$.

V naší úloze zbývá zjistit, pro které x nabývá výraz

$$x^2 + (2 - x)^2 = 2\,[(x - 1)^2 + 1]$$

nejmenší hodnoty, probíhá-li x množinu $\langle 0, 2\rangle$. Zřejmě je to pro $x = 1$. Minimální čtverec má tedy vrcholy ve středech stran daného čtverce a jeho obsah je polovina obsahu daného čtverce.

Z - I - 2

Je dán trojboký jehlan $ABCV$. Rovina protíná jeho hrany AB, BC, CV a neprochází žádným z bodů A, B, C, V. Které hrany jehlanu rovina ještě protíná?

Řešení. Daná rovina dělí prostor na dva poloprostory. Hrana daného čtyřstěnu je jí proťata, právě když koncové body leží v opačných poloprostorech. Protože hrany AB, BC, CV

jsou proťaty, leží v jednom poloprostoru vrcholy A, C a ve druhém B, V. Ze zbývajících hran tedy rovina protíná hranu AV; hrany AC, BV neprotíná.

Z - I - 3

Je-li N dvojciferné číslo, označme N' číslo, které z něho dostaneme změnou pořadí číslic. Najděte všechny dvojice dvojciferných čísel X, Y, pro které jsou čísla $XY - 1$, $X'Y' - 1$ obě dělitelná deseti.

Řešení. Úlohu bychom mohli řešit velmi pracně probráním všech dvojic dvojciferných čísel. Podobně jako v Z-P-3 raději využijeme rozvoje čísel v desítkové soustavě.

Je-li

$$X = 10r + s$$
$$Y = 10u + v,$$

bude

$$X' = 10s + r$$
$$Y' = 10v + u,$$

a tedy

$$XY - 1 = (10r + s)(10u + v) - 1 = 10(\ldots) + sv - 1$$
$$X'Y' - 1 = (10s + r)(10v + u) - 1 = 10(\ldots) + ru - 1$$

Obě tato čísla budou dělitelná deseti, právě když budou deseti dělitelná obě čísla $sv - 1$, $ru - 1$. Vzhledem k tomu, že

$$1 \leqq r \leqq 9,\ 1 \leqq u \leqq 9,\ 0 \leqq s \leqq 9,\ 0 \leqq v \leqq 9,$$

bude

$$0 \leqq sv \leqq 81,\ 1 \leqq ru \leqq 81.$$

Z čísel 1, 11, 21, ..., 81 jsou součinem dvou číslic jen

$$1 = 1.1,\ 21 = 3.7 \text{ a } 81 = 9.9.$$

Zkombinujeme-li všechny možnosti, dostaneme

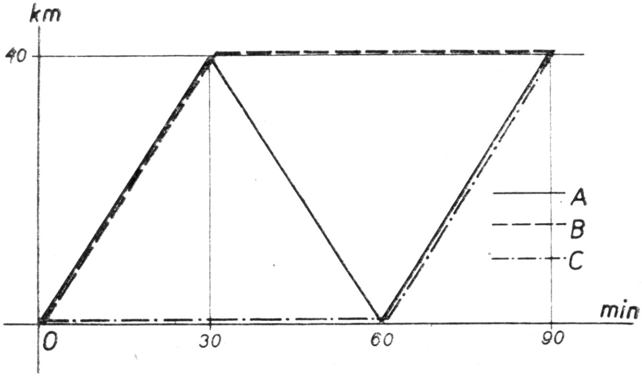
$X = 11$, $Y = 11$
$X = 13$, $Y = 17$
$X = 19$, $Y = 19$
$X = 31$, $Y = 71$
$X = 33$, $Y = 77$
$X = 37$, $Y = 73$
$X = 39$, $Y = 79$
$X = 91$, $Y = 91$
$X = 93$, $Y = 97$
$X = 99$, $Y = 99$

Všechna tato řešení vyhovují.

Z - I - 4

Zjistěte, jestli mohou tři cestující stihnout vlak, který odjíždí za 75 minut ze stanice vzdálené 40 km, dokáže-li každý z nich běžet průměrnou rychlostí 10 km/hod. a mají-li k dispozici dvoumístný motocykl, který může jet průměrnou rychlostí 80 km/hod.

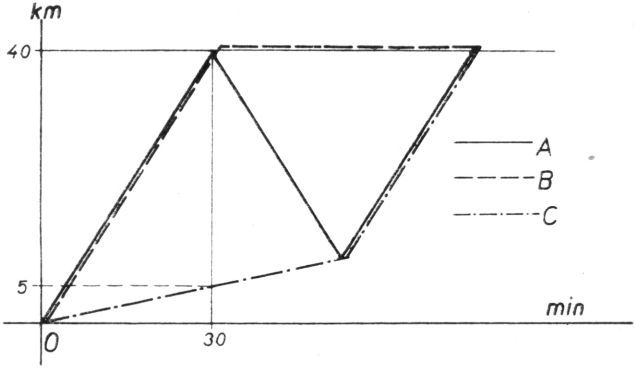
Řešení. Nejpohodlnější by bylo, kdyby A odvezl B na nádraží a C zatím počkal, než se pro něj A vrátí a také ho odveze na nádraží. Grafické znázornění přepravy je na obr. 6.



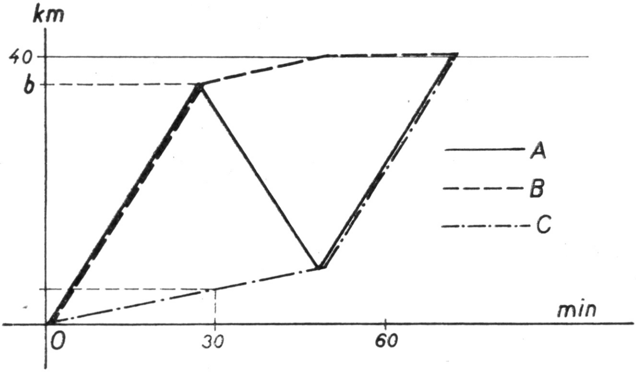
Obr. 6

To by ale motocykl urazil třikrát vzdálenost 40 km, což dokáže nejdříve za 90 minut, takže by cestujícím A a C vlak ujel.

Přepravu bychom zrychlili, kdyby A odvezl B na nádraží a C by mezitím běžel. A by mu pak jel naproti, a až by ho potkal, odvezl by ho na nádraží (obr. 7). Vypočteme, jak dlouho by přeprava trvala. Po 30 minutách vyjíždí motocykl z nádraží zpět a běžec uběhl 5 km. Součet jejich drah od tohoto okamžiku až do setkání na silnici bude tedy 35 km, běžec z něho urazí $\frac{1}{9}$ a motocyklista $\frac{8}{9}$ (úměrně rychlostem). Tutéž vzdálenost urazí pak motocykl s oběma cestujícími od místa setkání k nádraží. Motocykl tedy celkem ujede



Obr. 7



Obr. 8

$$40 + 2 \cdot \frac{8}{9} \cdot 35 = 102\frac{2}{9}\ \text{km},$$

což mu bude trvat déle než 75 minut. Ani tento způsob přepravy není dostatečně rychlý.

Zdokonalíme ho tak, že A neodveze B až na nádraží, ale vysadí ho b km od startu, ještě před nádražím. B na nádraží doběhne a A se mezitím vrátí naproti C, kterého doveze na nádraží (obr. 8). V tomto případě závisí celková doba transportu na b. Určíme ji podobně jako v minulém případě. V okamžiku první obrátky motocykl ujel b km a C uběhl $\frac{b}{8}$ km, a je tedy mezi nimi vzdálenost $\frac{7}{8}b$. Z té urazí motocyklista $\frac{8}{9}$, tj. $\frac{7b}{9}$, a běžec $\frac{1}{9}$, tj. $\frac{7b}{8.9}$, než se potkají. Pak zbývá k nádraží

$$40 - \frac{7b}{8.9} - \frac{b}{8} = 40 - \frac{2b}{9}.$$

Celkem ujede motocykl

$$b + \frac{7b}{9} + 40 - \frac{2b}{9} = 40 + \frac{14b}{9}$$

kilometrů, což mu trvá

$$\frac{40 + \frac{14}{9}b}{80} = \frac{1}{2} + \frac{7b}{9.40}$$

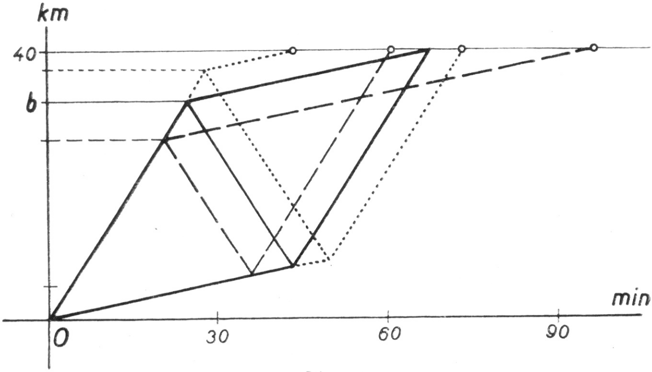
hodin.

Cestující B jede na motocyklu $\frac{b}{80}$ hod. a běží $\frac{40 - b}{10}$ hod., celkem $4 - \frac{7b}{80}$ hod. Existuje-li b tak, aby zároveň

$$0 \leqq b \leqq 40, \qquad \frac{1}{2} + \frac{7b}{9.40} \leqq \frac{5}{4}, \qquad 4 - \frac{7b}{80} \leqq \frac{5}{4},$$

umožní uvažovaný systém přepravy všem třem cestujícím stihnout vlak. Taková b skutečně existují, jsou to právě všechna

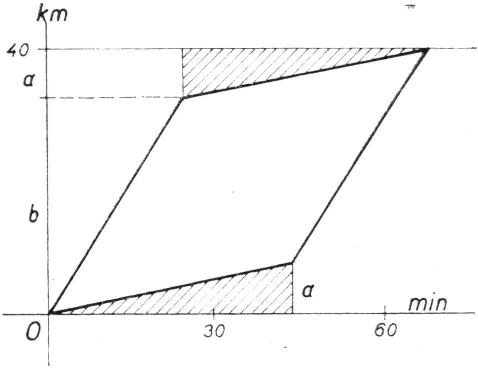
$$b \in \left\langle \frac{220}{7}, \frac{270}{7} \right\rangle \text{(km)}.$$



Obr. 9

Místo obecného rozboru jsme mohli úlohu řešit také tak, že bychom pro třetí systém přepravy odhadli některé vhodné b (např. 35 km), a pro ně pak vyřešili příslušnou pohybovou úlohu.

Všimněme si ještě jedné skutečnosti, zřejmé z grafického znázornění (obr. 9). Vyjdeme ze situace, kdy všichni tři cestující dorazí k nádraží současně (plná čára). Zvětšíme-li b, zpozdí se příjezd A a C na nádraží (tečkovaně). Zmenšíme-li b, zpozdí se příchod B na nádraží (čárkovaně). Případ, kdy všichni tři dorazí současně, je tedy nejrychlejší způsob dopravy uvažovaného typu. Stačí tedy vyřešit úlohu pro tuto speciální situaci. To lze provést tímto způsobem: Označme d vzdálenost k nádraží, v rychlost běžce a w rychlost motocyklu (tyto údaje jsou dány). Dále označme b vzdálenost první obrátky od startu. Vzdálenost druhé obrátky od nádraží je také b — to je patrno například z grafu (obr. 10) ze shodnosti vyšrafovaných



Obr. 10

trojúhelníků. Označme ještě $a = d - b$ vzdálenost první otáčky motocyklu od nádraží, což je také vzdálenost startu od druhé otáčky. Vzdálenost obou otáček je pak $d - 2a = 2b - d$. Motocykl urazí celkem $b + (2b - d) + b = 4b - d$, doba jízdy je $\dfrac{4b - d}{w}$. Zbývá určit b. Motocykl potřebuje k ujetí dráhy

od startu k první otáčce a zpět k druhé otáčce čas $\dfrac{b + 2b - d}{w}$,
běžec potřebuje k proběhnutí od startu k druhé otáčce čas
$\dfrac{a}{v} = \dfrac{d - b}{v}$. Je tedy $\dfrac{3b - d}{w} = \dfrac{d - b}{v}$, a proto $b = \dfrac{v + w}{3v + w}\, d$.

Dosazením tohoto výsledku do zlomku $\dfrac{4b - d}{w}$ dostaneme celkovou dobu přepravy $\dfrac{v + 3w}{w(3v + w)}\, d$ (hod.).

Dosadíme-li $v = 10$ km/hod., $w = 80$ km/hod., $d = 40$ km, vyjde čas $\dfrac{25}{22}$ hod., což je méně než $\dfrac{5}{4}$ hod., tj. 75 minut — cestující mohou vlak stihnout.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

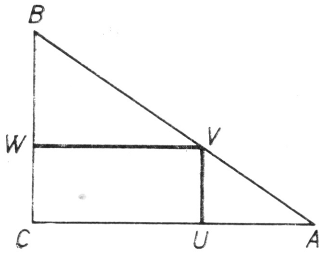
Z - II - 1

Do pravoúhlého trojúhelníku ABC vepište obdélník $CUVW$ (obr. 11) tak, aby součet druhých mocnin délek jeho stran byl nejmenší možný. Výsledek zdůvodněte.

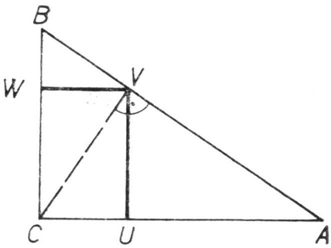
Řešení. Podle Pythagorovy věty je

$$S = CU^2 + UV^2 + VW^2 + CW^2 = 2\, CV^2$$

Součet S je tedy nejmenší možný, právě když je CV^2 nejmenší možné, tj. právě když je CV nejmenší možné. Ze všech bodů přepony AB má od vrcholu C nejmenší vzdálenost pata kolmice spuštěné na ni z bodu C. Úloha má vždy jediné řešení, které snadno sestrojíme (obr. 12).



Obr. 11



Obr. 12

Z - II - 2

Je-li N přirozené číslo, označme N' číslo, které z něho dostaneme obrácením pořadí číslic. Najděte všechna trojciferná čísla N, pro která je číslo $NN' - 3$ násobkem čísla 10 a zároveň číslo $N + N' + 4$ je násobkem čísla 100.

Řešení. Aby byl součin $NN' - 3$ dělitelný deseti, musí součin první a poslední číslice čísla N končit číslicí 3. To nastane jen v případech 1.3, 3.1, 7.9, 9.7. Kdyby první číslice čísla N byla 3 a poslední 1 (nebo obráceně), nebyl by součet $N + N' + 4$ dělitelný deseti. Hledané číslo N musí tedy mít první číslici 7 a poslední 9, nebo obráceně.

Druhou číslici čísla N označme x. Poslední číslice jednoho z čísel N, N' je 7 a druhého 9. Představíme-li si, jak bychom sčítali $N + N' + 4$ »odzadu«, vidíme, že druhá číslice tohoto součtu musí být poslední číslicí čísla $2x + 2$. Má-li být číslo $N + N' + 4$ dělitelné stem, musí jeho druhá číslice být 0. Poslední číslice čísla $2x$ musí být tedy 8, takže číslice x musí být buď 4, nebo 9.

Všechna hledaná čísla N jsou tedy mezi čísly 749, 799, 947, 977. Snadno se přesvědčíme, že všechna tato čísla vyhovují podmínkám úlohy.

Z - II - 3

Je dán pravidelný 33-úhelník $A_1A_2 \ldots A_{33}$. Určete počet úseček spojujících jeho vrcholy, které mají alespoň jeden společný bod s trojúhelníkem $A_{11}A_{22}A_{33}$.

Řešení. Z každého bodu A_1 až A_{10} vychází po 23 úsečkách protínajících daný trojúhelník $A_{11}A_{22}A_{33}$, jsou to spojnice zvoleného bodu s body A_{11}, A_{22}, ..., A_{33}. Podobně z bodů A_{12} až A_{21} a A_{23} až A_{32} vychází po 23 úsečkách protínajících trojúhelník. Z bodu A_{11} vychází 32 úseček s druhým koncovým bodem ve vrcholu 33-úhelníka a všechny mají s uvažovaným trojúhelníkem společný bod. Dvojnásobný počet hledaných úseček je tedy $30 . 23 + 3 . 32 = 786$, protože jsme každou takovou úsečku počítali dvakrát. Hledaný počet je 393.

Jiné řešení. Celkový počet úseček A_iA_j $(i \neq j)$ je $\dfrac{33 . 32}{2} = 528.$

Od tohoto počtu odečteme ty úsečky, které nemají s uvažovaným trojúhelníkem žádný společný bod. Z každého vrcholu

33-úhelníku, až na vrcholy A_{11}, A_{22}, A_{33}, jich vychází 9, celkem jich je $\frac{1}{2}.30.9 = 135$. Hledaný počet je $528 - 135 = 393$.

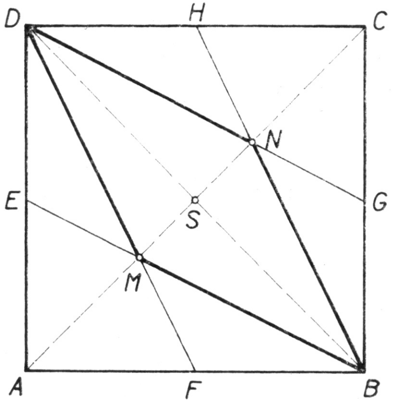
Z - II - 4

Z Prahy do Bratislavy vyjíždí přesně v 10 hod. auto značky Volha, které jede průměrnou rychlostí 100 km/hod. Zásilku veze z Bratislavy naproti přijíždějící volze auto zn. Škoda, které vyjíždí z Bratislavy také v 10 hod. Jakou nejmenší průměrnou rychlostí musí jet toto auto až do místa setkání s volhou, aby se volha po převzetí zásilky vrátila do Prahy nejpozději ve 14 hod.? (Vzdálenost z Prahy do Bratislavy je 350 km).

Řešení. Aby se volha vrátila do 14 hod., musí se otočit nejpozději za 2 hodiny po výjezdu, tedy ve vzdálenosti nejvýše 200 km od Prahy. Škodovka musí za tuto dobu ujet zbývající vzdálenost, tj. aspoň 150 km. Musí tedy jet rychlostí aspoň 75 km/hod. Při této rychlosti se auta setkají přesně ve 12 hod.

ÚLOHY III. KOLA V ČSR

1. Je dán čtverec $ABCD$ o straně s. Označme F, G, H, E středy stran AB, BC, CD, DA. Bod M je průsečíkem úseček BE, DF; bod N je průsečíkem úseček GD, BH. Body M, N leží na úhlopříčce AC (obr. 13).
   a) Vypočtěte obsah čtyřúhelníku $BNDM$.
   b) Určete, o jaký čtyřúhelník se jedná.



Obr. 13

2. Pro která dvojciferná čísla xy, yx $(x \neq y)$ je největší společný dělitel jejich součtu a rozdílu největší?

3. Je dán pravidelný osmiúhelník $A_1A_2A_3\dots A_8$ o straně velikosti a, S je střed kružnice opsané osmiúhelníku. Sestrojte kružnici k se středem S a poloměrem $\frac{a}{2}$.

   Určete počet úseček spojujících vrcholy daného osmiúhelníku, které nemají s kružnicí k žádný společný bod.

4. Na přímém úseku dvoukolejné trati z A do B (vzdálenost AB je 6 km) jezdí oběma směry tramvaje rychlostí 20 km/hod v šestiminutových intervalech. Chodec jde podél trati z A do B rychlostí 5 km/hod.

   a) V jakých intervalech bude chodec tramvaje potkávat a v jakých intervalech jej budou tramvaje předjíždět?

b) Jaký největší možný počet tramvají může chodec potkat a jaký největší možný počet tramvají jej může předjet v úseku z A do B?

ÚLOHY III. KOLA V SSR

1. Je daný obdĺžnik $ABCD$. Ak X je bod uhlopriečky BD, tak označme po rade E, F, G, H päty kolmíc vedených z bodu X na strany AB, BC, CD, DA. Určte bod X uhlopriečky BD tak, aby súčet obsahov obdĺžnikov $AEXH$ a $XFCG$ bol najväčší.
2. Automobil sa má dostať z miesta A do miesta B vzdialeného 1300 km. Benzín možno kupovať len v mieste A. V tomto mieste môže automobil tankovať do nádrže, ktorej obsah je 40 l a môže tiež kupovať benzín do 20 l kanistrov, z ktorých si po ceste môže nádrž doplniť. Automobil môže však viezť so sebou najviac tri plné kanistre a môže si tiež zriaďovať zásoby benzínu v kanistroch popri ceste. Zistite, či za predpokladu, že automobil má spotrebu 10 l na 100 km, stačí na cestu 195 l benzínu.
3. Určte najmenšie prirodzené číslo, ktorým treba násobiť číslo 1980, aby sme dostali druhú mocninu prirodzeného čísla.
4. V kruhu je 12 tetív. Určte maximálny počet neprekrývajúcich sa častí kruhu, na ktoré je kruh rozdelený danými tetivami.