29. ročník matematické olympiády

Kategorie C

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 29. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1979-1980. 21. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 55–77.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404728

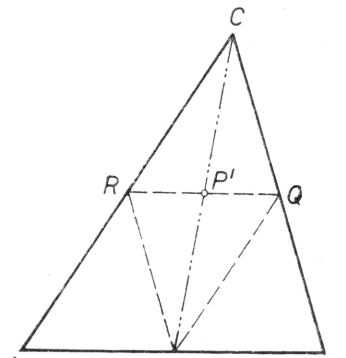
Kategorie C

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

C - P - 1

Je dán trojúhelník ABC. Označme P, Q, R středy jeho stran. Dokažte, že trojúhelníky ABC a PQR mají těžiště v tomtéž bodě.

Řešení. Dokážeme, že těžnice (přímky) trojúhelníku ABC splynou s těžnicemi trojúhelníku PQR; z toho plyne, že těžiště



Obr. 14

obou trojúhelníků splynou. Důkaz provedeme pro těžnici CP (obr. 14). Úsečka QR je střední příčka trojúhelníku ABC, a je tedy $QR \parallel AB$ a $QR = \frac{1}{2} AB$. Označme P' průsečík úseček CP, QR. Pak je úsečka RP' střední příčka trojúhelníku APC, neboť prochází středem R strany AC a je $RQ \parallel AP$. Z obdobného důvodu je úsečka QP' střední příčka trojúhelníku BPC. Pro bod P' tedy platí

$$RP' = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} BP = QP',$$

tj. bod P' je střed úsečky QR, tj. přímka CP je těžnice trojúhelníku PQR.

Jiné řešení. Úsečka PQ je střední příčka trojúhelníku ABC, je proto $PQ = CR$ a $PQ \parallel CR$. Body P, Q, C, R tvoří tedy rovnoběžník. Úhlopříčky rovnoběžníku se půlí, přímka CP tedy prochází středem úsečky QR a je to těžnice trojúhelníku PQR.

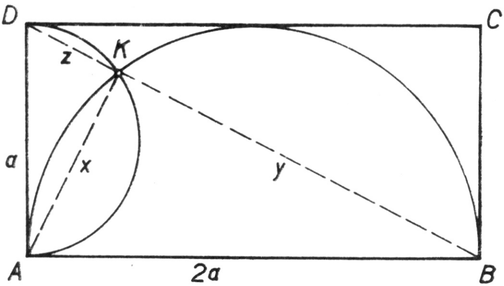
C - P - 2

Je dán obdélník $ABCD$, v němž $AB = 2a$, $BC = a$. Nad stranami AB, AD jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice, které kromě bodu A mají společný ještě bod K.

a) Dokažte, že bod K leží na úhlopříčce BD.

b) Vypočtěte vzdálenosti bodu K od vrcholů A, B, D.

Řešení. a) Poněvadž podle Thaletovy věty jsou úhly AKD, AKB pravé, leží body B, K, D v přímce (obr. 15).



Obr. 15

b) Podle Pythagorovy věty je $BD = a\sqrt{5}$. Označme hledané vzdálenosti $AK = x$, $BK = y$, $DK = z$. Snadno vypočteme x – je to výška na základnu BD v trojúhelníku ABD, jehož obsah je a^2, je $x = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Z pravoúhlých trojúhelníků ABK, ADK dostáváme podle Pythagorovy věty

$$y = \sqrt{4a^2 - x^2} = \frac{4a}{\sqrt{5}},\ z = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Mohli jsme využít také podobnosti trojúhelníků,

$$\triangle DAB \sim \triangle AKB \sim \triangle DKA,$$

které mají shodné odpovídající si úhly. Poměry velikostí odvěsen jsou

$$\frac{DA}{AB} = \frac{AK}{BK} = \frac{DK}{AK},$$

takže

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{y} = \frac{z}{x}.$$

Odtud vidíme, že $x = 2z$, $y = 4z$. Teď už stačí určit některou z veličin (například x z pravoúhlého trojúhelníku AKB o odvěsnách x, $2x$ a přeponě $2a$), abychom dostali ostatní.

Poznámka. Úloha byla uvedena v XIX. roč. MO jako Z-I-3. V brožuře *Vyšín-Macháček*: Vybrané úlohy MO — kategorie Z je zařazena pod č. 33.

C - P - 3

Najděte všechna trojciferná čísla s touto vlastností: Napíšeme-li před hledané číslo stejnou cifru, jako je ta, která stojí na místě jeho jednotek, dostaneme čtyřciferné číslo, které je o 18 menší než sedminásobek hledaného čísla.

Řešení. Má-li hledané číslo v desítkové soustavě zápis *abc*, má pozměněné číslo zápis *cabc*. Pro číslice a, b, c přitom platí $a \neq 0$ (trojcifernost původního čísla), a $c \neq 0$ (čtyřcifernost pozměněného čísla). Podle podmínky úlohy je

$$1000c + 100a + 10b + c = 7\,(100a + 10b + c) - 18,$$

odkud dostaneme

$$c = \frac{3(100a + 10b - 3)}{497}.$$

Vzhledem k tomu, že c je celé číslo a 497 není dělitelno třemi, je nutně $100a + 10b - 3$ dělitelno 497. Mohou nastat jen dvě možnosti:

(I) $100a + 10b - 3 = 497$

(II) $100a + 10b - 3 = 994$

Případ (I) vede ke vztahu

$$10a + b = 50,$$

kterému vyhovují jen číslice $a = 5$, $b = 0$. Hledané číslo je pak 503 - snadno ověříme, že splňuje podmínky úlohy. Případ (II) vede ke vztahu

$$100a + 10b = 997,$$

ale ten pro žádné číslice a, b neplatí — pravá strana není totiž dělitelná deseti.
Úloha má jediné řešení - číslo 503.

Poznámka. V XII. ročníku byla úloha zařazena jako D-I-2. V brožuře *Vyšín-Macháček*: Vybrané úlohy MO - kategorie Z je uvedena pod č. 6.

C - P - 4

Určete všechna čísla a, b, pro která platí

$$(a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 \geqq 0.$$

Zjistěte všechna a, b, pro která nastane rovnost.

Řešení. Jednoduchými ekvivalentními úpravami převedeme danou nerovnost na nerovnost

$$a^2b^2 (3a^2 - 2ab + 3b^2) \geqq 0.$$

Výraz a^2b^2 je pro všechna reálná čísla nezáporný, a protože

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 = (a - b)^2 + 2(a^2 + b^2),$$

je také výraz $3a^2 - 2ab + 3b^2$ nezáporný pro každou dvojici reálných čísel a, b. Platí tedy vždy

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geqq 0,\ a^2b^2 \geqq 0,$$

a tedy také

$$a^2b^2 (3a^2 - 2ab + 3b^2) \geqq 0.$$

Pro každou dvojici reálných čísel a, b tedy platí také daná nerovnost. Rovnost nastává v dané nerovnosti právě tehdy, platí-li

$$a^2b^2 [(a - b)^2 + 2(a^2 + b^2)] = 0.$$

V dané nerovnosti platí proto znaménko rovnosti tehdy a jen tehdy, je-li $a = 0$ nebo $b = 0$.

Poznámka. Úloha byla zařazena v XV. ročníku MO jako D-II-1. V brožuře *Vyšín-Macháček*: Vybrané úlohy MO — kategorie Z je uvedena pod č. 23.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

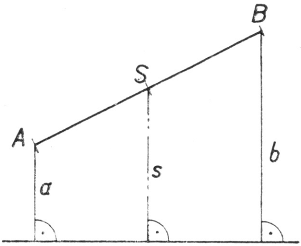
C - I - 1

V rovině je dán trojúhelník ABC a přímka p, která neprochází žádným jeho vnitřním bodem. Dokažte, že součet vzdáleností bodů A, B, C od přímky p se rovná součtu vzdáleností středů stran AB, BC, AC od přímky p.

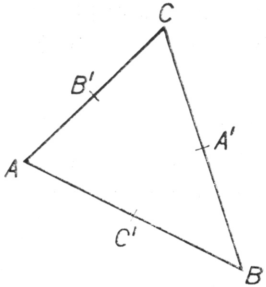
Řešení. Nejprve dokážeme pomocnou větu, jejímž přímým důsledkem bude věta, kterou máme dokázat v úloze.

Leží-li body A, B v téže polorovině s hranicí p, je vzdálenost středu S úsečky AB od přímky p aritmetickým průměrem vzdáleností obou bodů A, B od přímky p (obr. 16).

Pomocná věta zřejmě platí v případech $AB \parallel p$ nebo $AB \perp p$. Má-li úsečka AB jinou polohu, označme a, b, s vzdálenosti bodů A, B, S od přímky p. Přitom je s délka střední příčky



Obr. 16



Obr. 17

lichoběžníka se základnami a, b (nebo pravoúhlého trojúhelníku, je-li $a = 0$ nebo $b = 0$). Platí tedy

$$s = \frac{a + b}{2}.$$

Při řešení úlohy C-I-1 označíme vrcholy trojúhelníku A, B, C, středy stran A', B', C' a jejich vzdálenosti od přímky p označme a', b', c' (obr. 17). Podle pomocné věty platí

$$a' = \frac{1}{2}(b + c), \quad b' = \frac{1}{2}(c + a), \quad c' = \frac{1}{2}(a + b).$$

Je tedy

$$a' + b' + c' = a + b + c$$

C - I - 2

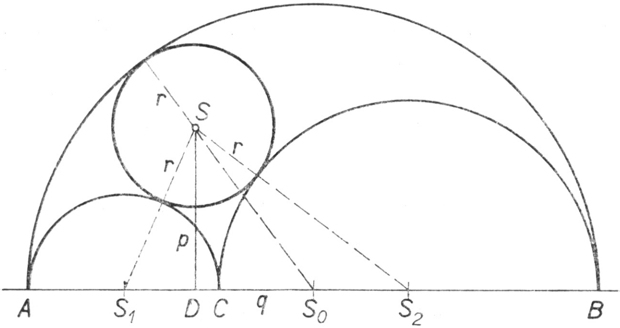
Úsečka AB délky 12 cm je rozdělena bodem C v poměru 1 : 2. V jedné polorovině určené přímkou AB jsou sestrojeny polokružnice s průměry AB, AC, CB. Vypočítejte poloměr kružnice, která se dotýká všech tří polokružnic.

Řešení. Poloměr uvažované kružnice označme r a její střed S (obr. 18). Spustíme-li z bodu S kolmici na úsečku AB a její patu označíme D, vidíme tři pravoúhlé trojúhelníky, které mají společnou odvěsnu SD a jejichž přepony úzce souvisí s poloměry daných polokružnic a s hledaným poloměrem r. Budeme se snažit tyto souvislosti vyjádřit rovnicemi a z nich určit r. Podle Pythagorovy věty dostáváme, označíme-li ještě $SD = p$, $S_0D = q$,

z $\triangle S_0SD$: $$p^2 + q^2 = (6 - r)^2,$$

z $\triangle S_1SD$: $$p^2 + (4 - q)^2 = (2 + r)^2,$$

z $\triangle S_2SD$: $$p^2 + (2 + q)^2 = (4 + r)^2.$$



Obr. 18

To je soustava tří rovnic o třech neznámých p, q, r, které sice nejsou lineární, ale snadno je vyřešíme, všimneme-li, že se v každé vyskytuje $p^2 + q^2$ vlevo a r^2 vpravo. Po úpravě je dostaneme ve tvaru

$$p^2 + q^2 - r^2 = -12r + 36$$

$$p^2 + q^2 - r^2 = 4r + 8q - 12$$

$$p^2 + q^2 - r^2 = 8r - 4q + 12.$$

Odtud plyne, porovnáme-li pravé strany 1. a 2., resp. 1. a 3. rovnice

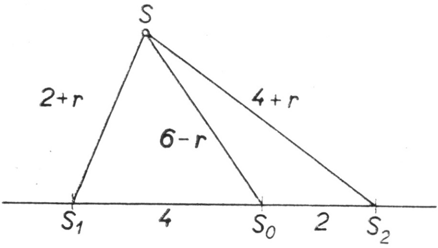
$$2r + q = 6$$

$$5r - q = 6.$$

To už je soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kterou snadno vyřešíme: sečtením obou rovnic hned dostaneme $r = \frac{12}{7}$. Existuje-li popsaná kružnice, má poloměr $\frac{12}{7}$.

Jiné řešení. Vyhneme se zavádění dvou pomocných neznámých. Vyjdeme opět z trojúhelníku S_1S_2S rozděleného příčkou ve dva trojúhelníky $T_1 = S_1S_0S$ a $T_2 = S_2S_0S$ (obr. 19). Pro jejich obsahy platí

$$T_1 = 2\,T_2, \tag{*}$$



Obr. 19

neboť mají společnou výšku z vrcholu S na strany $S_1S_0 = 4$, $S_2S_0 = 2$. Podle známého Heronova vzorce pro obsah trojúhelníka

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde s je poloviční obvod a a, b, c jsou délky stran, dostaneme

$$T_1^2 = 12\,r\,(4-r)$$

$$T_2^2 = 24\,r\,(2-r).$$

Dosadíme-li odtud do vztahu (*), dostaneme

$$12\,r\,(4-r) = 4 \,.\, 24\,r\,(2-r)$$

neboli

$$4 - r = 8\,(2-r),$$

a odtud pro hledaný poloměr $r = \dfrac{12}{7}$.

Poznámka. Kružnici, jejíž poloměr jsme vypočítali, snadno sestrojíme. Vzdálenost jejího středu S od bodu S_1 bude $2 + \frac{12}{7}$, od bodu S_2 bude $4 + \frac{12}{7}$.

C - I - 3

Kružnice $k_1 = (S_1, r_1)$, $k_2 = (S_2, r_2)$ se dotýkají vně v bodě C. Kromě společné tečny v bodě C mají ještě další dvě společné tečny. Vezměme jednu z nich a body dotyku těchto kružnic na ní označme A, B.

a) Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.

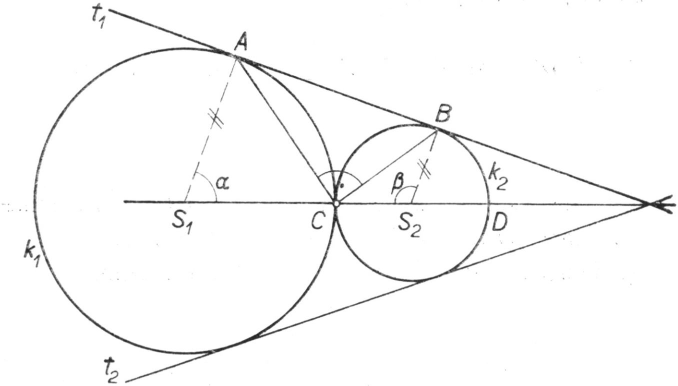
b) Vyjádřete obsah trojúhelníku ABC pomocí r_1 a r_2.

Řešení části a). Přímky S_1A a S_2B jsou rovnoběžné, neboť obě jsou kolmé ke společné tečně. Označme D druhý průsečík přímky S_1S_2 s kružnicí k_2 (obr. 20). Trojúhelníky S_1AC, S_2BD jsou podobné, neboť jsou oba rovnoramenné a mají stejné úhly při vrcholech S_1, S_2. Proto přímky AC a BD jsou rovnoběžné a úhly ACB, CBD jsou stejně velké. Podle Thaletovy věty je úhel CBD pravý.

Jiné řešení části a). Přímky S_1A a S_2B jsou rovnoběžné. Je-li tedy α velikost úhlu AS_1C a β velikost úhlu BS_2C, je $\alpha + \beta = 180°$. Dále, protože trojúhelníky ACS_1 a CBS_2 jsou rovnoramenné, je $\sphericalangle S_1CA = 90° - \frac{\alpha}{2}$ a $\sphericalangle S_2CB = 90° - \frac{\beta}{2}$.

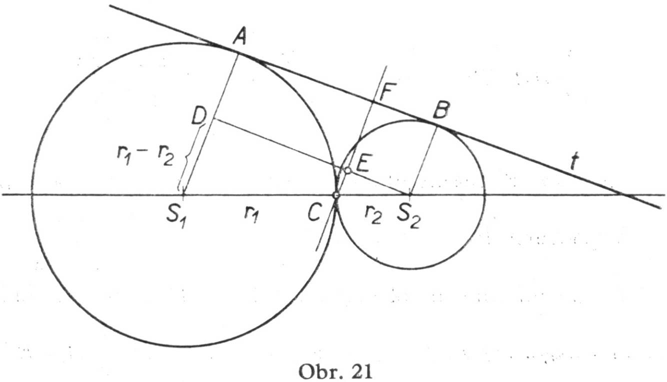
Odtud dostaneme

$$\sphericalangle ACB = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°.$$



Obr. 20

Řešení části b). Zvolme označení tak, aby $r_1 \geqq r_2$. Na přímce S_1A najdeme bod D tak, aby přímka DS_2 byla rovnoběžná s AB. Dostaneme pravoúhlý trojúhelník S_1S_2D a obdélník DS_2BA (obr. 21).



Obr. 21

Podle Pythagorovy věty

$$AB^2 = DS_2^2 = S_1S_2^2 - DS_1^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 =$$

$$= 4r_1r_2.$$

Dále veďme bodem C kolmici na přímku AB. Tato kolmice protne přímku DS_2 v bodě E a přímku AB v bodě F.

Z podobných trojúhelníků S_1S_2D, CS_2E dostaneme

$$CE = \frac{CS_2 . DS_1}{S_1S_2} = \frac{r_2 (r_1 - r_2)}{r_1 + r_2},$$

a tedy

$$CF = CE + EF = \frac{r_2 (r_1 - r_2)}{r_1 + r_2} + r_2 = \frac{2r_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

Obsah trojúhelníku ABC je pak

$$\frac{1}{2} AB . CF = \frac{1}{2}\sqrt{4r_1r_2} . \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} = 2 \frac{r_1r_2 \sqrt{r_1r_2}}{r_1 + r_2}$$

Poznámka. K řešení úlohy se nabízí i následující postup: Vypočteme $AC = 2r_1 \sqrt{\dfrac{r_2}{r_1 + r_2}}$, $BC = 2r_2 \sqrt{\dfrac{r_1}{r_1 + r_2}}$ a AB. To nám umožní dokázat pravoúhlost ABC pomocí obrácené Pythagorovy věty a vypočíst jeho obsah jako $\frac{1}{2} AC . BC$.

Tento způsob je však daleko pracnější než postupy uvedené výše.

C - I - 4

Uvažujme všechny výrazy, které dostaneme z výrazu

$$u - v - x - y - z$$

doplněním alespoň jedné dvojice závorek tak, aby se tím ve výrazu neobjevilo násobení. [Jeden z těchto výrazů je například $u - ((v - x) - y - z)$. Avšak například výraz $(u - v)(- x - - y - z)$ mezi uvažované výrazy nepatří, neboť je v něm násobení.] Kolika různých hodnot mohou nejvýše tyto výrazy nabývat pro jednu pětici čísel u, v, x, y, z?

Řešení. Ať si vezmeme kterýkoli z uvažovaných výrazů, můžeme vždy postupně provést úpravy, naznačené závorkami, a dospět k výrazu tvaru

$$u - v \alpha x \beta y \gamma z,$$

kde každý ze symbolů α, β, γ znamená buď $+$, nebo $-$. Výrazů tohoto tvaru existuje 8. Ukážeme, že každý z nich může vzniknout uvažovaným způsobem:

$$u - v + x + y + z = u - (v - x - y - z)$$

$$u - v + x + y - z = u - (v - x - y) - z$$

$$u - v + x - y + z = u - (v - x) - (y - z)$$

$$u - v + x - y - z = u - (v - x) - y - z$$

$$u - v - x + y + z = u - v - (x - y - z)$$

$$u - v - x + y - z = u - v - (x - y) - z$$

$$u - v - x - y + z = u - v - x - (y - z)$$

$$u - v - x - y - z = (u - v) - x - y - z$$

Pro jakoukoliv pětici čísel x, y, z, u, v nabývají tedy všechny výrazy popsané v úloze nejvýše osmi různých hodnot. Existují však pětice, pro něž nabývá osm naposled uvedených výrazů osmi navzájem různých hodnot (např. $u = v = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$). Hledaný počet je tedy 8.

C - I - 5

Při oslavě svých narozenin Josef zjistil, že sečte-li číslice momentálního letopočtu, dostane svůj věk, a odečte-li momentální letopočet od jeho zrcadlového obrazu, dostane čtyřnásobek svého roku narození. V kterém roce našeho tisíciletí Josef provedl výpočet?

Řešení. Provedl-li Josef výpočet v roce $1000 + 100a + 10b + c$, bylo mu právě $1 + a + b + c$ let a narodil se v roce $999 + 99a + 9b$. Rozdíl momentálního letopočtu a zrcadlového obrazu je

$$(1000c + 100b + 10a + 1) - (1000 + 100a + 10b + c) =$$

$$= 4(1000 + 100a + 10b + c - 1 - a - b - c)$$

a po úpravě

$$(\star)\ 37c + 2b - 18a - 185 = 0.$$

Odtud vidíme, že číslice c je nutně lichá, a dostáváme odhad

$$c = \frac{1}{37}(185 + 18a - 2b) \geqq \frac{1}{37}(185 + 18.0 - 2.9) > 4.$$

Číslice c může tedy být jen 5, 7 nebo 9.

Pro $c = 5$ se rovnice $(\star)$ redukuje na $b = 9a$, a té vyhovují dvě dvojice: $(a = 0, b = 0)$, $(a = 1, b = 9)$.

Pro $c = 7$ dostáváme rovnici $b = 9(a - 4) - 1$, a té vyhovuje jediná dvojice: $a = 5, b = 8$.

Pro $c = 9$ dostáváme rovnici $b = 9(a - 8) - 2$, a té vyhovuje jediná dvojice: $a = 9, b = 7$.

Příslušné letopočty jsou 1005, 1195, 1587 a 1979. Snadno se přesvědčíme, že všechny vyhovují podmínkám úlohy. (Šestiletý Josef v r. 1005 měl však neuvěřitelné matematické schopnosti).

C - I - 6

Platí-li pro povrchy P_1, P_2, P_3 tří krychlí $P_3 = P_1 + P_2$, pak pro jejich objemy V_1, V_2, V_3 je

$$V_1 + V_2 < V_3 \leqq \sqrt{2}\,(V_1 + V_2).$$

Dokažte.

Řešení. Úloha je formulována geometricky, okamžitě se však převede na čistě algebraický problém.

Text úlohy sugeruje označit velikosti hran krychlí symboly a_1, a_2, a_3. Označíme je však raději a, b, c, abychom se vyhnuli indexům a výrazy byly přehlednější.

Z podmínky pro povrchy plyne $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ a dosazením nabude dokazovaná nerovnost tvar

$$a^3 + b^3 < (\sqrt{a^2 + b^2})^3 \leqq \sqrt{2}\,(a^3 + b^3). \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že pracujeme v oboru kladných čísel a, b, je soustava nerovností (1) ekvivalentní se soustavou nerovností

$$(a^3 + b^3)^2 < (a^2 + b^2)^3 \leqq 2\,(a^3 + b^3)^2.$$

Máme vlastně dokázat, že pro všechna kladná čísla a, b platí tyto dvě nerovnosti:

$$(a^3 + b^3)^2 < (a^2 + b^2)^3 \tag{2}$$

$$(a^2 + b^2)^3 \leqq 2(a^3 + b^3)^2 \tag{3}$$

První nerovnost už jsme dokázali v úloze C-P-4 (protože $a > 0$, $b > 0$, platí ostrá nerovnost). Druhá nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$a^6 - 3a^4b^2 + 4a^3b^3 - 3a^2b^4 + b^6 \geqq 0.$$

Výraz na levé straně je však roven

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4)$$

a pro kladná a, b je vskutku nezáporný.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

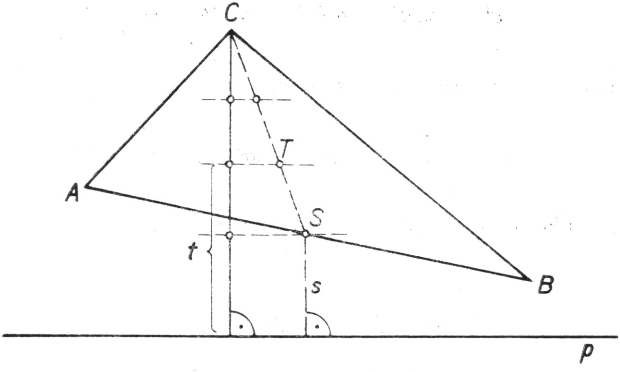
C - II - 1

V rovině je dán trojúhelník ABC a přímka p, která neprochází žádným vnitřním bodem trojúhelníku. Vyjádřete vzdálenost těžiště T trojúhelníku od přímky p pomocí vzdáleností bodů A, B, C od přímky p.

Řešení. Označme vzdálenosti bodů A, B, C od přímky p po řadě a, b, c. Můžeme předpokládat, že bod C má z vrcholů A, B, C od přímky p největší vzdálenost, tj. $c \geqq a$, $c \geqq b$. Označme ještě s a t vzdálenosti středu S úsečky AB a těžiště T od přímky p (obr. 22). Pak je

$s = \dfrac{a + b}{2}$, $t = s + \dfrac{c - s}{3}$. Po dosazení za s dostaneme

$$t = \frac{1}{3}(a + b + c).$$



Obr. 22

C - II - 2

Určete, kolik různých součtů můžeme dostat z výrazu

$$\underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1}_{\text{1980 jedniček}}$$

doplněním alespoň jednoho páru závorek tak, aby vznikl správně uzávorkovaný výraz a nedostali jsme přitom zápis součinu.

Řešení. Nejprve dokážeme, že můžeme dostat součty

$$-1978, -1976, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, 1974, 1976.$$

Součet tvaru $-2k$ pro $k = 989, 988, \ldots, 1$ dostaneme např. uzávorkováním

$$1 \underbrace{-(1+1)-(1+1)-\ldots-(1+1)}_{k \text{ párů závorek}} -1+1-\ldots+1-1$$

Součet tvaru $2k$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, 988$ dostaneme např. uzávorkováním

$$1-(1+1\underbrace{-(1+1)-(1+1)-\ldots-(1+1))}_{k+1 \text{ párů závorek}}-1+\ldots+1-1.$$

Dále dokážeme, že jiné hodnoty dostat nemůžeme. Po doplnění závorek dostaneme výraz, který lze upravit na výraz bez závorek s 1980 členy, který se od původního bude lišit jen znaménky členů. Je-li v něm a znamének $+$ a b znamének $-$, je jeho součet $a - b$, a je tedy sudý, protože $a + b = 1980$. První člen má vždy kladné a druhý záporné znaménko, takže součty -1980 ani 1980 nemohou vzniknout. Součet zřejmě nemůže v absolutní hodnotě přesáhnout 1980. Zbývá dokázat, že nemůže vzniknout součet 1978.

a) Má-li po odstranění závorek čtvrtý člen znaménko $-$, pak alespoň dva členy (druhý a čtvrtý) mají znaménko $-$ a součet nemůže přesáhnout 1976.

b) Má-li čtvrtý člen znaménko $+$, znamená to, že leží uvnitř závorky, před kterou je znaménko $-$. V této závorce leží i třetí člen, a ten pak má v upraveném výraze znaménko $-$. Opět tedy alespoň dva členy mají znaménko $-$.

C - II - 3a

Nechť P_1, P_2, P_3, P_4 jsou obsahy čtyř čtverců a o_1, o_2, o_3, o_4 jejich obvody (v tomtéž pořadí).
Platí-li

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_4,$$

pak

$$o_1 + o_2 + o_3 \leqq o_4 \sqrt{3}.$$

Dokažte.

Řešení. Označíme-li velikosti stran čtverců a, b, c, d, platí

(1) $$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

Máme dokázat nerovnost

(2) $$a + b + c \leqq d \sqrt{3}.$$

Kdyby

$$a + b + c > d \sqrt{3},$$

bylo by

$$(a + b + c)^2 > 3\, d^2 = 3\, (a^2 + b^2 + c^2)$$

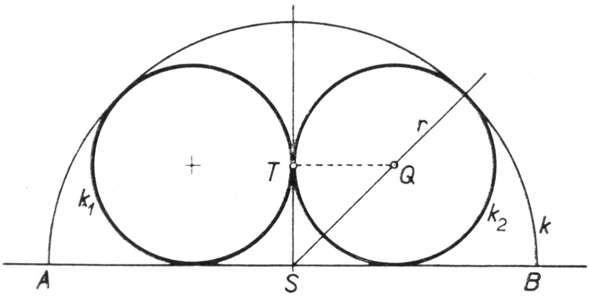
neboli

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 < 0,$$

a to je spor.

Nad průměrem AB délky 10 cm je sestrojena polokružnice k. Kružnice k_1, k_2 mají stejně velké poloměry, dotýkají se vzájemně a obě se dotýkají polokružnice k a průměru AB. Určete velikost jejich poloměru.

Řešení. Zvolme označení podle obr. 23, r je hledaný poloměr. Je $SQ = 5 - r$, $ST = TQ = r$ a trojúhelník STQ je pravoúhlý. Podle Pythagorovy věty je $(5 - r)^2 = 2r^2$, tedy $r = 5(\sqrt{2} - 1) \doteq 2{,}07$.



Obr. 23