29. ročník matematické olympiády

Korespondenční seminář MO

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 29. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1979-1980. 21. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 148–155.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404731

Korespondenční seminář MO

Cílem korespondenčního semináře bylo dále zvyšovat úroveň špičkových řešitelů MO, kteří nejsou z Prahy ani z Bratislavy a neměli tak možnost pracovat v tamních seminářích pro přípravu na MO. K účasti bylo předsednictvem ÚV MO na základě výsledků v MO, návrhů KV MO a individuálního zájmu pozváno asi 50 žáků, z nichž se přihlásilo a zúčastnilo asi 30. Pravidelně jim byla rozesílána série sedmi poměrně náročných úloh, které měli během 4—5 týdnů vyřešit. Došlá řešení byla pak opravena, ohodnocena a spolu s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům. Uvádíme znění všech úloh v korespondenčním semináři zadaných.

1. Velká čísla

1.1 Najděte největší přirozené číslo x takové, že

$$(x!)\,! < 10^{10^{10}},$$

a nejmenší přirozené číslo y takové, že $y!$ je násobkem čísla $10^{10^{10}}$.

1.2 Dokažte, že kvadratická rovnice

$$8^{8^8} . x^2 + 10^{10^{10}} . x + 9^{9^9} = 0$$

má dva různé reálné iracionální kořeny.

1.3 Napíšeme-li za sebou všechna čísla od 100 do 999, vznikne dekadický zápis jistého čísla N. Dokažte, že N není prvočíslem ani mocninou (s přirozeným exponentem větším než 1) žádného přirozeného čísla.

1.4 Dokažte, že existuje mocnina dvou (s přirozeným exponentem), jejíž dekadický zápis začíná číslicemi

197919801981

1.5 Najděte dvě poslední nenulové číslice čísla 1000!.

1.6 Dokažte, že při žádné volbě znamének není číslo

$$\pm 1^{1^1} \pm 2^{2^2} \pm \ldots \pm 59^{59^{59}} \pm 60^{60^{60}}$$

druhou, třetí, čtvrtou, pátou ani šestou mocninou žádného celého čísla.

1.7 Dokažte, že mezi přirozenými čísly menšími než $10^{10^{10}}$ existuje 10^{10} po sobě následujících složených čísel.

2. Goniometrie

2.1 Najděte všechna reálná x, pro která platí

$$26 \sin^2 x^2 + 12 \cos 2x + 5 \sin 2x = 13.$$

2.2 Najděte všechny trojúhelníky, pro jejichž vnitřní úhly A, B, C platí

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}\,.$$

2.3 Najděte všechna reálná a, pro něž je funkce

$$f(x) = \cos ax + \cos x$$

periodická.

2.4 Jsou dána lichá přirozená čísla m, n. Najděte všechna reálná x, pro která platí

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}\,.$$

2.5 Bez pomoci tabulek, počítačky a logaritmického pravítka vypočtěte

$$\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ - \sin 83^\circ.$$

2.6 Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin (2x \sqrt{1 - x^2})$$

v intervalu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2.7 Najděte všechna reálná x, pro něž platí

$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2.$$

3. Obsahy

3.1 V rovině je dáno několik pásů, žádné dva nejsou rovnoběžné. Posuňte pásy tak, aby zachovaly své směry a obsah jejich průniku byl co největší. (Pásem rozumíme část roviny mezi dvěma rovnoběžkami. Dané pásy nemusí mít stejnou šířku).

3.2 Dva shodné obdélníky jsou v rovině umístěny tak, že jejich obvody mají 8 společných bodů. Dokažte, že obsah jejich průniku je větší než polovina obsahu každého z nich.

3.3 Dokažte, že každý trojúhelníkový řez čtyřstěnu má obsah menší než některá stěna.

3.4 Jakou polohu má krychle, vrhá-li na rovinu kolmou ke směru světla stín s největším možným obsahem?

3.5 Je dán trojúhelník.

a) Umístěte do něho středově souměrný mnohoúhelník s co největším obsahem.

b) Umístěte ho do konvexního středově souměrného mnohoúhelníku s co nejmenším obsahem.

V obou případech extrémní obsahy vyjádřete pomocí obsahu daného trojúhelníka.

3.6 V jednotkovém čtverci je obsažen útvar U (ne nutně souvislý). Pokud v U neexistují dva body vzdálené 0,001, je obsah U menší než 0,3. Dokažte.

3.7 V jednotkovém čtverci je 102 bodů, žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že jisté tři z nich jsou vrcholy trojúhelníku s obsahem nejvýše 0,005.

4. Obdélníková schémata

4.1 Čísla 1, 2, ..., n^2 jsou zapsána ve čtvercové tabulce, jejíž řádky jsou očíslovány indexy 1, 2, ..., n a sloupce také. Číslo 1 je na libovolném místě; číslo 2 je v řádku, který má stejný index jako sloupec obsahující číslo 1; číslo 3 je v řádku, který má stejný index jako sloupec obsahující číslo 2 atd. Určete rozdíl součtu čísel v řádku obsahujícím číslo 1 a součtu čísel ve sloupci obsahujícím číslo n^2.

4.2 V obdélníkové tabulce jsou zapsána reálná čísla. Je dovoleno současně změnit znaménka všech čísel v řádku nebo ve sloupci. Je možno každou tabulku převést postupným prováděním těchto změn na tabulku obsahující samá nezáporná čísla?

4.3 Do čtvercové tabulky 8×8 je zapsáno 64 nezáporných čísel, jejichž součet je 1956. Součet všech 16 čísel ležících na úhlopříčkách je 112. Čísla umístěná souměrně podle některé úhlopříčky jsou si rovna. Dokažte, že součet čísel je v každém řádku i v každém sloupci menší než 518.

4.4 Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je zapsáno n^2 čísel x_{pq} (tak značíme číslo v p-tém řádku a q-tém sloupci). Dokažte, že je-li $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ pro libovolné tři indexy $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, existují čísla $t_1, t_2, \dots, t_n$ tak, že $x_{ij} = t_i - t_j$ pro všechny $i, j, \in \{1, 2, \dots, n\}$.

4.5 Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je zapsáno n^2 čísel. Vynecháme-li jakoukoliv podmnožinu řádků, která neobsahuje všechny řádky (včetně prázdné), bude ve zbylé tabulce vždy nějaký sloupec obsahovat jedinou nulu. Dokažte, že ať pak vynecháme jakoukoliv podmnožinu sloupců, která neobsahuje všechny sloupce, bude ve zbylé tabulce vždy nějaký řádek obsahovat jedinou nulu.

4.6 Ve čtvercové tabulce 8×8 je zapsáno 64 nenulových čísel. Jediné z nich je záporné a není umístěno v rohu. Je dovoleno změnit znaménka všech čísel nějakého řádku nebo sloupce nebo řady rovnoběžné s úhlopříčkou (sem patří i změna znaménka rohového čísla). Dokažte, že postupným prováděním těchto změn nemůžeme nikdy dostat tabulku obsahující samá kladná čísla.

4.7 Ve čtvercové tabulce 8×8 je zapsáno 64 čísel. Je dovoleno změnit znaménka všech čísel v libovolné její souvislé části 3×3 nebo 4×4. Je možno každou takovou tabulku převést postupným prováděním těchto změn na tabulku obsahující samá nezáporná čísla?

5. Posloupnosti

5.1 Dokažte, že pro každou posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy jsou navzájem různá přirozená čísla, která nemají ve svém dekadickém zápise číslici 0, platí:
Pro každé přirozené číslo k je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} < 29.$$

5.2 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu m existuje přirozené číslo k tak, že

$$\left| \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{m} a_i \right| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|$$

5.3 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$, která má tuto vlastnost: Existuje přirozené číslo m takové, že

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 0$$

a pro každé přirozené číslo k je

$$a_{m+k} = a_k.$$

Dokažte, že existuje přirozené číslo p tak, že pro každé celé nezáporné číslo k platí

$$a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{p+k} \geqq 0.$$

5.4 Uvažujme čtyři posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ takové, že pro každé přirozené číslo n je

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n \qquad & c_{n+1} &= c_n + d_n \\ b_{n+1} &= b_n + c_n \qquad & d_{n+1} &= d_n + a_n \end{aligned}$$

Dokažte, že pokud existují přirozená čísla k, m tak, že

$$a_{k+m} = a_m,\ b_{k+m} = b_m,\ c_{k+m} = c_m,\ d_{k+m} = d_m,$$

pak je

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0.$$

5.5 Pro posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ platí, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_n + a_{n+2} \geqq 2a_{n+1}.$$

Dokažte, že pak pro každé přirozené číslo n je

$$\frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}}{n+1} \geqq \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}{n}.$$

5.6 Jsou dána přirozená čísla a_1, a_2. Pro přirozená čísla $n > 2$ položme $a_n = |a_{n-2} - a_{n-1}|$. Tak jsme definovali posloupnost nezáporných celých čísel $\{a_n\}$. Je-li největší člen této posloupnosti 1980, jaký je největší možný index prvního nulového členu?

5.7 Je dána posloupnost číslic $\{a_n\}$ neobsahující číslici 9. Ta určuje posloupnost $\{b_n\}$, jejíž členy mají dekadické zápisy

$$b_1 = (a_1)$$
$$b_2 = (a_1a_2)$$
$$b_3 = (a_1a_2a_3)$$
atd.

Dokažte, že posloupnost $\{b_n\}$ obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.