30. ročník matematické olympiády

Kategorie Z

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); František Zítek (editor): 30. ročník matematické olympiády. Školní rok 1980-1981. 22. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983. pp. 50–60.

Kategorie Z

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

Z - P - 1

Určete nejmenší přirozené číslo, jehož 1979násobek končí čtyřčíslím 1980.

Řešení: Představme si, že jsme hledané číslo písemně vynásobili číslem 1979. Celý zápis by vypadal takto

$$
\begin{array}{r}
\ldots dcba \\
\times\ 1979 \\
\hline
\ldots.\ srqp \\
\ldots.wvu \\
\ldots.yx \\
\ldots.z \\
\hline
\ldots.1980,
\end{array}
$$

kde jsme tečkami a písmeny označili zatím neznámé číslice (neznáme vlastně ani počet číslic hledaného čísla). Postupně vidíme, že $p = 0$, a tedy $a = 0$. Pak je však též $u = x = z = 0$ a tudíž $q = 8$. To však platí pouze v případě $b = 2$ a důsledkem toho je $v = 4$, $y = 8$. Musí proto být $r = 5$, a tedy číslo $9c$

musí končit číslicí 4, je proto $c = 6$. Pak je $w = 3$ a číslo $9d$ musí končit číslicí 5, tedy $d = 5$. Obráceně se snadno přesvědčíme, že vynásobením každého čísla končícího čtyřčíslím 5620 dostaneme číslo končící čtyřčíslím 1980. Hledané číslo je proto 5620.

Z-P-2

Ke každé hraně krychle je připsáno přirozené číslo tak, že součet tří čísel připsaných hranám vycházejícím z jednoho vrcholu krychle je pro všechny vrcholy stejný, rovná se S.
a) Jaký vztah platí mezi S a součtem všech dvanácti čísel, připsaných k hranám krychle?
b) Je možno hrany krychle očíslovat čísly 1, 2, ..., 12 tak, že součet tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany krychle vycházející z téhož vrcholu, je pro všechny vrcholy stejný?

Řešení: Krychle má 12 hran, 8 vrcholů, na každé hraně leží právě dva vrcholy, z každého vrcholu vycházejí tři hrany. Sečteme-li čísla připsaná třem hranám vycházejícím z téhož vrcholu krychle, dostaneme osm čísel, jejichž součet dává dvojnásobek součtu T všech dvanácti čísel připsaných k hranám krychle. Podle podmínky úlohy je tedy $8S = 2T$, tj. $4S = T$, tím je vyřešena část a). Protože $1 + 2 + \ldots + 12 = 78$ a toto číslo není dělitelné čtyřmi, nemůže se rovnat číslu $4S$ pro žádné přirozené číslo S, a proto je odpověď na otázku b) záporná. Hrany krychle nelze očíslovat čísly 1, 2, ..., 12 tak, aby součet tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany krychle vycházející z téhož vrcholu, byl pro všech osm vrcholů krychle stejný.

Z - P - 3

Dvě dvojmístná přirozená čísla, která mají na místě desítek stejné cifry a na místě jednotek cifry doplňující se do deseti (například 87, 83), se mohou násobit tak, že číslo na místě desítek znásobíme číslem zvětšeným o jednu a k tomuto součinu připíšeme dvojciferný součin jednotek ($8(8 + 1) = 72$, $7.3 = 21$, $87.83 = 7221$). Odůvodněte tento postup.

Řešení: Nechť jedno z čísel má tvar $10a + b$, druhé $10a + c$, kde a je společná číslice na místě desítek, b, c jsou číslice na místě jednotek, přičemž $b + c = 10$. Pak je

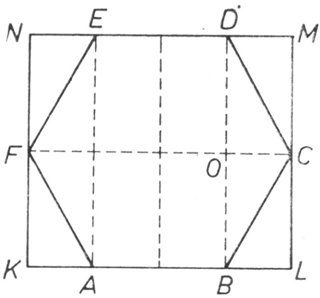
$$(10a + b)(10a + c) = 100a^2 + 10a(b + c) + bc =$$
$$= 100(a^2 + a) + bc = 100a(a + 1) + bc.$$

Tento výsledek již ukazuje, že čísla můžeme vynásobit způsobem popsaným v úloze.

Z - P - 4

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Sestrojte pravoúhelník $KLMN$ tak, že úsečka AB je částí úsečky KL, úsečka ED je částí úsečky MN a body C, F leží po řadě uvnitř úseček LM a KN. Vypočtěte poměr obsahů pravoúhelníku $KLMN$ a daného šestiúhelníku.

Řešení: Pravoúhelník $KLMN$ se sestrojí snadno, stačí vést body C, F kolmice ke straně AB. Tyto kolmice spolu s přímkami AB, ED určují obdélník $KLMN$ (obr. 1). Označme ještě O patu kolmice vedené bodem D na přímku FC. Šestiúhelník $ABCDEF$ se skládá z dvanácti nepřekrývajících se trojúhelníků shodných s trojúhelníkem DOC, obdélník $KLMN$ se skládá z 16 nepřekrývajících se trojúhelníků shodných s trojúhelníkem DOC. Hledaný poměr je proto $16 : 12 = 4 : 3$.



Obr. 1

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

Z - I - 1

Určete všechna trojciferná čísla, jejichž 576násobek končí trojčíslím 576.

Řešení: Dekadický zápis hledaného čísla označíme pqr (p je číslice na místě stovek, q na místě desítek a r počet jednotek). Má tedy platit

$$\begin{array}{r} pqr \\ \times\ 576 \\ \hline .xyz \\ .uv \\ .w \\ \hline .576 \end{array}$$

Musí proto být $z = 6$, a tudíž $r = 1$ nebo $r = 6$. Je-li $r = 1$, je $v = 7$, $y = 0$, a tudíž $q = 0$ nebo 5. Je-li $q = 0$, musí být $p = 5$. V případě $q = 5$ je $p = 2$ nebo 7. Podobně postupujeme pro $r = 6$. Zkouškou se přesvědčíme, že obdržená čísla 501, 251, 751, 126, 626, 376, 876 vyhovují podmínce úlohy.

Z - I - 2

Dokažte, že hrany pravidelného trojbokého jehlanu se nedají očíslovat čísly 1, 2, 3, 4, 5, a 6 tak, aby součet tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany jedné stěny, byl pro všechny čtyři stěny stejný (mezi stěny počítáme též podstavu).

Řešení: Předpokládejme, že by bylo možno hrany pravidelného trojbokého jehlanu očíslovat čísly 1, 2, ..., 6 tak, aby součet S tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany jedné stěny byl pro všechny čtyři stěny stejný. Protože každá hrana leží právě ve dvou stěnách a stěny jsou čtyři, platilo by $4S = 2(1 + 2 + \ldots + 6) = 42$. Protože číslo 42 není dělitelné čtyřmi, dospěli jsme ke sporu a náš předpoklad proto nebyl správný.

Z - I - 3

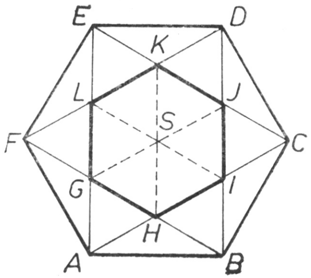
Mějme dvojciferné číslo X. Číslo Y vznikne z čísla X přehozením cifer. Najděte všechna čísla X, pro která je $X - Y$ druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení: Položme $X = 10a + b$, kde a je číslice na místě desítek, b číslice na místě jednotek dvojciferného čísla X. Pak je $Y = 10b + a$, $X - Y = 10(a - b) + b - a = 9(a - b)$. Toto číslo bude druhou mocninou přirozeného čísla právě tehdy, bude-li mít tuto vlastnost číslo $a - b$. Protože $1 \leq a \leq$ ≤ 9, může to nastat pouze v případě $a - b = 1$, $a - b = 4$ nebo $a - b = 9$. Jsou tedy jedinými řešeními čísla 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 40, 51, 62, 73, 84, 95, 90.

Z - I - 4

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Trojúhelníky ACE a BDF se protínají opět v pravidelném šestiúhelníku. Dokažte, že jeho obsah se rovná třetině obsahu šestiúhelníku $ABCDEF$.

Řešení: Průnikem trojúhelníků ACE, BDF je pravidelný šestiúhelník, jehož vrcholy označíme G, H, I, J, K, L (obr. 2).



Obr. 2

Společný střed obou šestiúhelníků označme S. Označme $|SA| = a$, $|SH| = b$. Z kosodélníku $SGAH$ vidíme, že a je dvojnásobek výšky v rovnostranném trojúhelníku SGH o straně b, tedy $a = b\sqrt{3}$, a proto je obsah šestiúhelníku $ABCDEF$ třikrát větší než obsah šestiúhelníku $GHIJKL$. Jiný důkaz spočívá v tom, že obsahy trojúhelníků EKD, KJD, JCD jsou stejné (mají stejně velké základny $|EK|$, $|KJ|$ a $|JC|$ a k nim společnou výšku). Šestiúhelník $ABCDEF$ se tak rozloží na 18 a šestiúhelník $GHIJKL$ na 6 nepřekrývajících se trojúhelníků, jejichž obsah je shodný s obsahem trojúhelníku KJD.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

Z - II - 1

Určete všechna trojciferná čísla, která po vynásobení číslem 36 končí trojčíslím 324.

Řešení: Označme pqr dekadický zápis hledaného čísla, má tedy platit

$$\begin{array}{r} pqr \\ \times\ 36 \\ \hline \dots\dots \\ \dots\dots \\ \hline ..324 \end{array}$$

Vidíme, že nutně platí $r = 4$ nebo $r = 9$. Je-li $r = 4$, je $q = 3$ nebo $q = 8$. V žádném z těchto případů však nedostaneme vhodné číslo p. Pro $r = 9$ je $q = 0$ nebo $q = 5$. Je-li $r = 9$, $q = 0$, dostaneme $p = 5$, v případě $r = 9$, $q = 5$ dostaneme dvě řešení: $p = 2$, $p = 7$. Zkouškou se přesvědčíme, že čísla 259, 509, 759 jsou řešením.

Z - II - 2

Rozhodněte, zda lze stěny krychle očíslovat čísly 1, 2, ..., 6 tak, aby součet tří čísel, kterými jsou očíslovány stěny se společným vrcholem, byl pro všechny vrcholy stejný. Odůvodněte svou odpověď.

Řešení: Předpokládejme, že jsme krychli požadovaným způsobem očíslovali. Součet tří čísel, kterými jsou očíslovány stěny se společným vrcholem, označíme S (je pro všechny vrcholy týž). Každá stěna obsahuje 4 vrcholy, proto $8S = 4(1 + 2 + \ldots + 6) = 84$. Protože však číslo 84 není dělitelné osmi, dospěli jsme ke sporu.

Z - II - 3

X je dvojciferné číslo a číslo Y z něho vznikne změnou pořadí číslic. Najděte všechna X, pro která je $X + Y$ druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení: Podobně jako v úloze Z-I-3 položme $X = 10a + b$, $Y = 10b + a$, $X + Y = 11(a + b)$. Aby bylo toto číslo druhou mocninou přirozeného čísla, musí být nutně $a + b$ násobkem čísla 11. Protože je $a + b \leqq 18$, může to nastat pouze v případě $a + b = 11$, kdy je $X + Y = 11^2$. Řešením úlohy jsou tudíž čísla 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Z - II - 4

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Na jeho straně AB leží bod A_1, na straně BC bod B_1, ..., na straně FA bod

F_1 tak, že $|AA_1| = |BB_1| = \ldots = |FF_1| = \frac{1}{3}|AB|$. Vypočtěte poměr obsahů šestiúhelníků $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, $ABCDEF$.

Řešení: Je-li S společný střed obou šestiúhelníků a P střed strany AB, je $|AS| = |AB|$, $|A_1S| = |A_1B_1| =$

$$= \sqrt{|A_1P|^2 + |PS|^2} = \sqrt{\frac{|AB|^2}{36} + |AB|^2 - \frac{|AB|^2}{4}} =$$

$$= |AB|\sqrt{\frac{7}{9}}.$$ Hledaný poměr je tudíž 7 : 9.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA - ČSR (ÚLOHY PŘIPRAVIL KV MO KRAJE ZÁPADOČESKÉHO)

Z - III - 1

Kterým přirozeným číslem m ($m \geqq 1$) musíme násobit číslo 16 200, abychom dostali nejmenší číslo n, které je zároveň druhou a třetí mocninou přirozeného čísla? Určete číslo n a proveďte zkoušku.

Řešení: Protože $16\,200 = 2^3 . 3^4 . 5^2$, je $m = 2^3 . 3^2 . 5^4 = 45\,000$, $n = 2^6 . 3^6 . 5^6 = 729\,000\,000$.

Z - III - 2

Označme X čtyřciferné číslo a Y čtyřciferné číslo, které vznikne z čísla X obrácením pořadí číslic. (Je-li například $X = 4265$, je $Y = 5624$). Najděte všechna taková přirozená čísla X, pro která jsou součin $X \cdot Y$ a součet $X + Y$ dělitelné číslem 5 a rozdíl $X - Y$ je přirozené číslo dělitelné číslem 360.

Výsledek: 5405, 5515, 5625, 5735, 5845, 5955, 5805, 5915.

Z - III - 3

Pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ má stranu dané velikosti a. Průsečík přímek AB, CD je bod K. Vypočtěte délku úsečky EK.

Výsledek: $|EK| = a\sqrt{7}$.

Z - III - 4

Určete velikosti vnitřních úhlů rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB, který je rozdělen přímkou procházející bodem A na dva trojúhelníky, z nichž každý je rovnoramenný.

Výsledek: Úloha má dvě řešení: $\alpha = \beta = 72°$, $\gamma = 36°$ a $\alpha = \beta \doteq 77°8'$, $\gamma \doteq 25°43'$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA - SSR (ÚLOHY PŘIPRAVIL KV MO KRAJE STŘEDOSLOVENSKÉHO)

Z - III - 1

Od trojciferného čísla odčítame číslo, ktoré dostaneme zámenou poradia cifier pôvodného čísla na opačné.

a) Nájdite všetky trojciferné čísla, ktoré vyhovujú podmienke: získaný rozdiel sa rovná jednej šestine pôvodného čísla.

b) Ukážte, že neexistuje trojciferné číslo, pre ktoré sa tento rozdiel rovná polovici pôvodného čísla.

Výsledek: 594.

Z - III - 2

Zistite, či existuje prirodzené číslo a z intervalu $\langle 1, 6 \rangle$ tak, že hrany pravidelného štvorstena sa dajú označiť číslami a, 2, 3, 4, 5, 6, pričom súčet označení hrán, ktoré ležia na tej istej stene, je pre všetky steny rovnaký.

Výsledok: Neexistuje.

Z - III - 3

Zistite, či existuje štvorciferné číslo, ktoré je druhou mocninou prirodzeného čísla a pritom číslo zapísané jeho prvými dvomi ciframi v danom poradí je polovicou čísla zapísaného jeho poslednými dvomi ciframi v danom poradí.

Výsledok: Neexistuje.

Z - III - 4

Je daný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$. Na strane AB leží bod A_1, na strane BC bod $B_1, \ldots$, na strane FA leží bod F_1 tak, že $|AA_1| = |BB_1| = \ldots = |FF_1| = \frac{1}{3}|AB|$. Uhlopriečky AD, BE, CF pretínajú strany šesťuholníka $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ v bodoch A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, ktoré sú vrcholmi pravidelného šesťuholníka. Označme P plošný obsah šesťuholníka $ABCDEF$, P_1 plošný obsah šesťuholníka $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ a P_2 plošný obsah šesťuholníka $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$. Ukážte, že $P_1^2 = P . P_2$.