30. ročník matematické olympiády

Kategorie C

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); František Zítek (editor): 30. ročník matematické olympiády. Školní rok 1980-1981. 22. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983. pp. 61–77.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404743

Kategorie C

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

C - P - 1

Veslárovi trvá prejdenie istého úseku rieky na loďke proti prúdu s veslovaním a po prúde bez veslovania rovnaký čas. O koľkej sa musí otočiť, ak vyštartuje o 15. hodine, o 18. hodine má byť naspäť, a rozhodol sa veslovať aj na spiatočnej ceste? (Predpokladáme, že rýchlosť prúdu rieky aj vlastná rýchlosť veslára je konštantná.)

Řešení: Označme v rychlost loďky vzhledem k vodě při veslování a r rychlost tekoucí vody vzhledem ke břehům. Vůči břehům se loďka tedy pohybuje při veslování proti proudu rychlostí $v - r$, při veslování po proudu rychlostí $v + r$ a je-li unášena proudem bez veslování, rychlostí r. Trvá-li projetí určitého úseku proti proudu s veslováním stejnou dobu jako po proudu bez veslování, jsou i příslušné rychlosti stejné, tj.

$$v - r = r.$$

Odtud dostaneme

$$v + r = 3r = 3(v - r).$$

Rychlost (vůči břehům) při veslování po proudu je tedy trojnásobná ve srovnání s rychlostí plavby proti proudu. Vesluje-li veslař proti proudu po dobu t, návrat s veslováním mu trvá $\frac{t}{3}$. V našem případě

$$t + \frac{t}{3} = 3,$$

takže

$$t = 2\frac{1}{4}.$$

Veslař se musí obrátit nejpozději v 17.15 hod.

C - P - 2

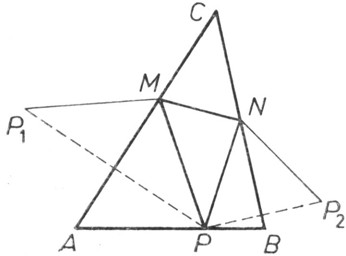
Každá strana a každá úhlopříčka konvexního pětiúhelníku je obarvena jednou ze dvou barev tak, že žádný trojúhelník (tvořený stranami nebo celými úhlopříčkami pětiúhelníku) není jednobarevný. Dokažte, že z každého vrcholu pětiúhelníku vycházejí právě dvě úsečky každé barvy.

Řešení: Předpokládejme, že z některého vrcholu A vycházejí aspoň tři úsečky jedné barvy AB, AC, AD. Není-li žádný z trojúhelníků ABC, ABD, ACD jednobarevný, jsou úsečky BC, BD, CD obarveny druhou barvou, a tedy trojúhelník BCD je jednobarevný. Z žádného vrcholu tedy nevycházejí tři úsečky nebo více úseček jedné barvy. Vzhledem k tomu, že z každého vrcholu vycházejí právě čtyři úsečky, jsou dvě z nich jedné barvy a dvě druhé barvy.

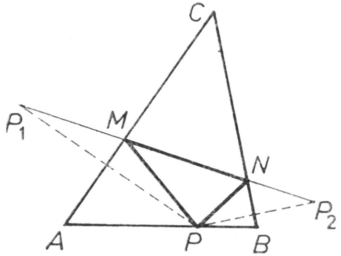
C - P - 3

V ostroúhlém trojúhelníku ABC je dán bod P uvnitř strany AB. Sestrojte bod M uvnitř strany AC a bod N uvnitř strany BC tak, aby obvod trojúhelníku PMN byl minimální.

Řešení: Uvažujme libovolný bod M uvnitř strany AC a libovolný bod N uvnitř strany BC. Je-li P_1 bod souměrně sdružený k bodu P podle přímky AC a P_2 bod souměrně



Obr. 3



Obr. 4

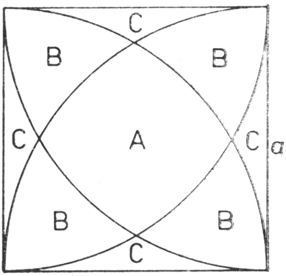
sdružený k bodu P podle přímky BC, je obvod trojúhelníku MNP roven délce lomené čáry P_1MNP_2 (obr. 3). Tato délka je nejmenší v případě, kdy body M, N jsou společné body úsečky P_1P_2 se stranami AC, BC (obr. 4) - pokud však tyto společné body existují a leží uvnitř stran. To je splněno, protože

$$\sphericalangle P_1CP_2 = \sphericalangle P_1CP + \sphericalangle PCP_2 = 2\sphericalangle ACP + 2\sphericalangle PCB =$$
$$= 2\sphericalangle ACB < 180^\circ$$

(trojúhelník ABC je ostroúhlý).

C - P - 4

Je dán čtverec, jehož strana má velikost a. Z každého vrcholu jsou dovnitř čtverce opsány čtvrtkružnice s poloměrem a. Tak se čtverec rozdělí na devět částí. Vypočtěte obsahy těchto částí.



Obr. 5

Řešení: Částí, na něž se čtverec rozpadne, budou tři druhy; jejich obsahy označíme A, B, C (obr. 5). Bude platit

$$A + 4B + 4C = a^2 \qquad \text{(čtverec)}$$

$$A + 3B + 2C = \frac{\pi}{4} a^2 \qquad \text{(čtvrtina kruhu)}$$

$$A + 2B + C = \frac{\pi}{3} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$ (sjednocení dvou kruhových výsečí se středovým úhlem 60°, jejichž průnikem je rovnostranný trojúhelník).

Odtud plyne

$$B + 2C = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B + C = a^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

a tedy

$$C = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$B = a^2 \left(-1 + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A = a^2 \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right).$$

Jiné řešení je v ročence XIX. ročník MO, str. 118.

C - I - 1

Kocka o hrane dĺžky 5 je zložená zo 125 jednotkových kociek. Určte najmenší a najväčší možný povrch telesa, ktoré z nej dostaneme odstránením troch hranolov pozostávajúcich z piatich jednotkových kociek, keď žiadne dva z odstránených hranolov nemajú spoločný bod ani rovnaký smer.

Řešení: Pro odstranění jednoho hranolu $5 \times 1 \times 1$ z krychle $5 \times 5 \times 5$ máme tři možnosti:

(1) Odstraněním hranolu, který obsahuje hranu krychle, zmenšíme povrch o 2.

(2) Odstraněním hranolu, jehož delší stěna je obsažena ve stěně krychle a přitom neobsahuje hranu krychle, zvětšíme povrch o 8.

(3) Odstraněním hranolu, který má s povrchem krychle společné jen dvě protější čtvercové podstavy, zvětšíme povrch o 18.

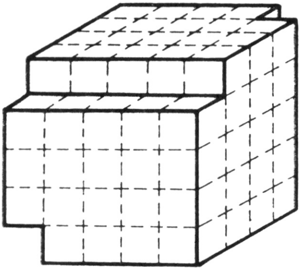
Těleso vzniklé z krychle $5 \times 5 \times 5$ odstraněním tří hranolů $5 \times 1 \times 1$, z nichž žádné dva nemají společný bod, bude mít minimální povrch v případě tří hranolů typu (1), viz obr. 6, povrch bude

$$6.5.5 - 3.2 = 144,$$

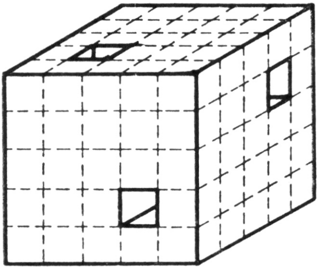
maximální v případě tří hranolů typu (3), a to

$$6.5.5 + 3.18 = 204.$$

Obr. 7 ukazuje, že hranoly lze volit tak, aby žádné dva neměly společný bod ani stejný směr.



Obr. 6



Obr.7

C - I - 2

Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré sa začínajú cifrou 7 a po jej odstránení sa zmenšia 36 ráz.

Řešení: Hledané číslo můžeme rozepsat jako $7.10^n + p$ a podmínku vyjádřit rovnicí

$$7 . 10^n + p = 36\,p,$$

odkud dostaneme $p = 2 . 10^{n-1}$. Hledané číslo má tedy tvar

$$7 . 10^n + 2 . 10^{n-1}.$$

Snadno se přesvědčíme, že všechna čísla 72, 720, 7200,... splňují podmínku úlohy.

C - I - 3

Dvaja veslári na dvoch člnkoch vyštartovali o 14.55 z prístavišťa a veslovali proti prúdu rieky. K lesu došli spolu, pak jeden vesloval späť a vrátil sa o 17.55, druhý sa nechal doviezť späť prúdom a vrátil sa o 19.07. Koľko im trvala plavba z prístavišťa k lesu? (Predpokladáme, že po celý čas rýchlosť toku rieky aj vlastná rýchlosť veslovania boli konštantné.)

Řešení: Označme v rychlost loďky vzhledem k vodě při veslování a r rychlost tekoucí vody vzhledem k břehům. Proti proudu jeli tedy oba veslaři rychlostí $v - r$, po proudu první rychlostí $v + r$, druhý rychlostí r (vzhledem ke břehům). Označme t dobu společné plavby od přístaviště k lesu a s vzdálenost lesa od přístaviště. Pak platí, měříme-li čas v minutách

$s = (v - r)\,t$ (společná cesta tam)

$s = (v + r)(180 - t)$ (zpáteční cesta 1. veslaře)

$s = r\,(252 - t)$ (zpáteční cesta 2. veslaře).

Z těchto vztahů určíme t. Dosadíme-li s z první rovnice do druhé a třetí rovnice, dostaneme

$$2vt = 180\,(v + r)$$

$$vt = 252\,r.$$

Vyloučíme z těchto rovnic r a máme

$$2vt = 180\,v + \frac{180}{252}\,vt,$$

neboli, protože $v \neq 0$,

$$2t = 180 - \frac{180}{252}\,t$$

a odtud

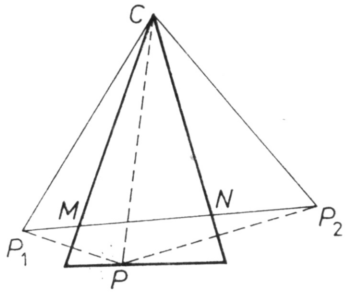
$$t = 140.$$

Cesta od přístaviště k lesu tedy trvala 140 min.

C - I - 4

Do ostroúhlého trojúhelníku ABC je vepsán trojúhelník MNP tak, že $M \in AC$, $N \in BC$, $P \in AB$. Určete polohu bodů M, N, P tak, aby obvod trojúhelníku MNP byl minimální.

Řešení: Zvolme libovolný bod P uvnitř strany AB a označme P_1, P_2 body souměrně sdružené k bodu P podle přímek AC, BC. Uvědomme si (obr. 8), že



Obr. 8

a
$$|CP_1| = |CP_2| = |CP|$$

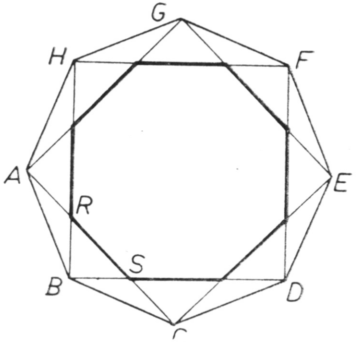
$$\sphericalangle P_1CP_2 = \sphericalangle P_1CP + \sphericalangle PCP_2 = 2\sphericalangle ACP + 2\sphericalangle BCP = \\ = 2\sphericalangle ABC.$$

Při řešení úlohy C-P-3 jsme zjistili, že ze všech trojúhelníků MNP, kde $M \in AC$, $N \in BC$, má minimální obvod trojúhelník, jehož vrcholy M, N leží na úsečce P_1P_2, a minimální obvod je roven $|P_1P_2|$. Zbývá tedy najít polohu bodu $P \in AB$ tak, aby rovnoramenný trojúhelník P_1CP_2 měl minimální základnu. Vzhledem k tomu, že úhel při jeho hlavním vrcholu C má velikost $2\sphericalangle ACB$ a nezávisí tedy na poloze bodu P, bude základna minimální, právě když bude minimální rameno. Rameno má velikost $|CP|$ a bude minimální, právě když úsečka PC bude výškou trojúhelníku ABC.

C - I - 5

Je dán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Čtverce $ACEG$ a $BDFH$ se protínají také v pravidelném osmiúhelníku. Vypočtěte poměr obsahů obou osmiúhelníků.

Řešení: (obr. 9). Využijeme podobnosti rovnoramenných trojúhelníků ABC, ARB (mají společný úhel BAR), odkud plyne, že



Obr. 9

$$|AB| : |AC| = |AR| : |AB|,$$

tj.

$$|AB|^2 = |AC| . |AR|.$$

Z pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku RBS máme

$$|RS| = |AR| \sqrt{2},$$

a tedy

$$|AB|^2 = (\sqrt{2} + 2)\,|AR|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)|RS|^2.$$

Odtud vidíme, že poměr obsahů pravidelných osmiúhelníků o stranách AB, RS je $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$.

C - I - 6

V rovnostranném trojúhelníku ABC o straně délky 1 se na straně AC pohybuje bod X a na straně BC bod Y tak, že obsah trojúhelníku XYC se stále rovná polovině obsahu trojúhelníku ABC. Najděte, jakou funkcí vzdálenosti $x = |CX|$ je vzdálenost $y = |CY|$, a určete definiční obor a obor hodnot této funkce.

Řešení: Ze vzorce pro obsah trojúhelníku daného dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným je hned vidět, že obsahy trojúhelníků XYC, ABC jsou v poměru

$$P_{XYC} : P_{ABC} = xy : 1.$$

(Jiným způsobem to můžeme odvodit také takto: Trojúhelníky XYC, XBC mají tutéž výšku na stranu YC, resp. BC, takže

$$P_{XYC} : P_{XBC} = y : 1$$

a analogicky

$$P_{XBC} : P_{ABC} = x : 1,$$

odkud dostaneme

$$P_{XYC} : P_{ABC} = xy : 1.)$$

Podle zadání je tento poměr $1 : 2$, takže pro každou dvojici x, y platí $xy = \frac{1}{2}$.

Pro každé x tedy platí

$$y = \frac{1}{2x}.$$

Definiční obor i obor hodnot této funkce je zřejmě obsažen v intervalu $(0, 1\rangle$. Aby bylo $y \leqq 1$, musí být $x \geqq \frac{1}{2}$. Pro každé $x \in \langle\frac{1}{2}, 1\rangle$ je $y \in \langle\frac{1}{2}, 1\rangle$. Ke každému $y \in \langle\frac{1}{2}, 1\rangle$ je příslušné $x = \frac{1}{2y} \in \langle\frac{1}{2}, 1\rangle$. Definiční obor i obor hodnot je tedy interval $\langle\frac{1}{2}, 1\rangle$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Voda v řece teče rychlostí 2 m/s. Cesta od přístavu k mostu a zpět trvá malému člunu 33 min a velkému člunu, který má (ve stojaté vodě) dvojnásobnou rychlost, 16 min. Jak daleko je od přístavu k mostu?

Řešení: Rychlost malého člunu označme c (m/s) a hledanou vzdálenost d(m).

Malému člunu cesta trvá

$$\frac{d}{c+2} + \frac{d}{c-2} = 33.60 \qquad (1)$$

a velkému člunu

$$\frac{d}{2c+2} + \frac{d}{2c-2} = 16.60.$$

Je tedy

$$\frac{\dfrac{2cd}{c^2-4}}{\dfrac{4cd}{4c^2-4}} = \frac{33}{16},$$

neboli

$$\frac{4c^2-4}{2(c^2-4)} = \frac{33}{16}.$$

Odtud $c = 10$ m/s a z (1) dostaneme

$$d = \frac{33.60\,(c^2-4)}{2c} = 9904\ (\mathrm{m}).$$

C - II - 2

Na kružnici je dáno 6 bodů a každé dva jsou spojeny úsečkou - buď modrou, nebo červenou. Tyto úsečky přitom tvoří právě jeden červený a právě jeden modrý trojúhelník. Dokažte, že červených úseček je buď 7, nebo 8.

Řešení: Vrcholy červeného trojúhelníku označme 1, 2, 3. Trojúhelník s vrcholy ve zbývajících bodech 4, 5, 6 není červený a má tedy alespoň jednu modrou stranu. Z každého bodu 4, 5, 6 vedou alespoň dvě modré úsečky do bodů 1, 2, 3 - jinak by vznikl další červený trojúhelník. Celkem je tedy alespoň 7 modrých úseček. Analogicky zjistíme, že je aspoň 7 červených úseček. Tím jsme hotovi, protože úseček je celkem 15.

C - II - 3a

Nájdite všetky prirodzené čísla, tretia mocnina ktorých sa končí na 1981.

Řešení: Hledané číslo můžeme rozepsat

$$x = 10a + b,$$

potom

$$x^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3.$$

Má-li být poslední číslice 1, musí být $b = 1$. Je tedy

$$x^3 = 1000a^3 + 300a^2 + 30a + 1.$$

Na předposlední číslici čísla x^3 má vliv jen předposlední sčítanec. Aby se tato číslice rovnala 8, musí poslední číslice čísla a být 6. Hledané číslo rozepíšeme

$$x = 100c + 61,$$

takže

$$x^3 = \ldots + 3.61^2.100c + 61^3.$$

Číslici na místě stovek ovlivňují jen poslední dva členy a aby se rovnala 9, musí poslední číslice čísla c být 0. Můžeme tedy psát

$$x = 1000d + 61,$$

takže

$$x^3 = \ldots + 3.61^2.1000d + 61^3.$$

Aby číslice na místě tisíců byla 1, musí poslední číslice čísla d být 5.

Splňuje-li nějaké číslo požadovanou podmínku, musí končit na 5061. Všechna přirozená čísla končící tímto čtyřčíslím vyhovují.

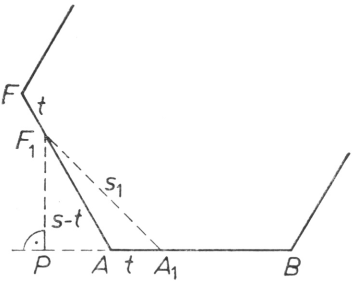
C - II - 3b

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně s. Na jeho stranách AB, BC, ..., FA leží po řadě body A_1, B_1, ..., F_1 tak, že je $AA_1 = BB_1 = \ldots = FF_1 = t$. Jsou to vrcholy pravidelného šestiúhelníku $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ o straně s_1.

a) Dokažte, že $s_1^2 = s^2 - st + t^2$.

b) Zjistěte, pro které t je s_1 nejmenší.

Řešení: (obr. 10) a) Označme P patu kolmice z bodu F_1 na přímku AB.



Obr. 10

Protože $\sphericalangle F_1AP = 60°$, je $|AP| = \dfrac{s-t}{2}$. Z pravoúhlého trojúhelníku APF_1 dostáváme

$$s_1^2 = |A_1P|^2 + |F_1P|^2 = |A_1P|^2 + |AF_1|^2 - |AP|^2 =$$
$$= \left(t + \frac{s-t}{2}\right)^2 + (s-t)^2 - \left(\frac{s-t}{2}\right)^2 = t^2 + s^2 - st.$$

b) Upravíme-li

$$s_1^2 = t^2 + s^2 - st = \left(t - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}s^2,$$

vidíme, že s_1^2 a tedy i s_1 je minimální pro $t = \dfrac{s}{2}$.