30. ročník matematické olympiády

Kategória B

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); František Zítek (editor): 30. ročník matematické olympiády. Školní rok 1980-1981. 22. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983. pp. 78–102.

Kategória B

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

B - P - 1

Určte počet všetkých rôznych usporiadaných trojíc prirodzených čísel x, y, z, ktoré vyhovujú rovnici

$$x^1 . y^{97} . z^9 = 19^{791} . 97^9 \tag{1}$$

Riešenie: Nech prirodzené čísla x, y, z vyhovujú rovnici (1). Pretože čísla 19 a 97 sú prvočísla, ako sa ľahko presvedčíme, musia byť čísla x, y, z súčinmi mocnín čísel 19 a 97 s nezápornými celočíselnými exponentami. Číslo y však nemôže obsahovať ako súčiniteľ kladnú mocninu čísla 97, lebo na pravej strane rovnice (1) je mocnina 97^9. Musia preto existovať nezáporné celé čísla a, b, k, r, s také, že platí

$$x = 19^a . 97^b, \qquad y = 19^k, \qquad z = 19^r . 97^s.$$

Po dosadení do (1) dostaneme

$$19^a . 97^b . 19^{97k} . 19^{9r} . 97^{9s} = 19^{791} . 97^9 .$$

K tomu, aby platila táto rovnosť, musia byť súčasne splnené tieto dve rovnice:

$$a + 97k + 9r = 791, \tag{2a}$$

$$b + 9s = 9. \tag{2b}$$

Je zrejmé, že každému nezápornému celočíselnému riešeniu sústavy rovníc (2a) a (2b) odpovedá jedno riešenie rovnice (1). Stačí nám teda zistiť počet nezáporných celočíselných riešení sústavy rovníc (2a), (2b).

Ľahko sa vidí, že rovnica (2b) má dve rôzne riešenia v obore celých nezáporných čísel: $b = 0$, $s = 1$ a $b = 9$, $s = 0$.

Pretože $8.97 = 776 < 791 < 9.97 = 873$, môže číslo k nadobúdať len hodnoty 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Postupne tieto hodnoty dosadíme do rovnice (2a). Dostaneme:

a) Ak $k = 0$, potom $a + 9r = 791$ čiže $a = 9(87 - r) + 8$. Číslo r môže teda nadobúdať hodnoty $0, 1, \ldots, 87$. Pre každú z týchto hodnôt existuje práve jedno celé nezáporné číslo a vyhovujúce rovnici (2a). Dostávame tak 88 riešení tejto rovnice.

b) Ak $k = 1$, potom $a + 9r = 694$, z čoho $a = 9(77 - r) + 1$. Analogickou úvahou ako v predchádzajúcom prípade dostávame 78 riešení.

c) Pre $k = 2$ bude $a + 9r = 597$, z čoho $a = 9(66 - r) + 3$. Rovnica (2a) má v tomto prípade 67 nezáporných celočíselných riešení.

d) Pre $k = 3$ je $a + 9r = 500$, z čoho $a = 9(55 - r) + 5$. Máme 56 riešení.

e) Ak $k = 4$, je $a + 9r = 403$, z čoho $a = 9(44 - r) + 7$ a dostávame 45 riešení.

f) Pre $k = 5$ je $a + 9r = 306$, z čoho $a = 9(34 - r)$. Máme 35 riešení.

g) Ak $k = 6$, je $a + 9r = 209$, z čoho $a = 9(23 - r) + 2$. Dostávame teda 24 riešení.

h) Pre $k = 7$ je $a + 9r = 112$, z čoho je $a = 9(12 - r) + 4$. To znamená ďalších 13 celočíselných nezáporných riešení rovnice (2a).

i) Konečne v prípade $k = 8$ dostaneme $a + 9r = 15$ čiže $a = 9(1 - r) + 6$. Dostávame teda dve rôzne riešenia.

Celkový počet nezáporných celočíselných riešení sústavy (2a), (2b), a teda počet prirodzených riešení rovnice (1) je $2.(88 + 78 + 67 + 56 + 45 + 35 + 24 + 13 + 2) = 816$.

B - P - 2

Pre každé prirodzené číslo n existujú navzájom rôzne prirodzené čísla r, s tak, že číslo

$$3^r - 3^s$$

je deliteľné číslom n. Dokážte.

Riešenie: Pri riešení úlohy využijeme známy Dirichletov priehradkový princíp. Uvažujme o týchto prirodzených číslach

$$3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n, 3^{n+1},$$

ktorých je práve $n + 1$. Pri delení číslom n musia mať aspoň dve z nich rovnaký zvyšok, pretože možných zvyškov je práve n: $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Nech sú to čísla 3^r, 3^s. Platí teda $3^r = k.n + z$, $3^s = m.n + z$, kde k, m sú celé nezáporné čísla, z je niektorý z možných zvyškov. Potom $3^r - 3^s = (k - m)\,n$ je číslo deliteľné číslom n. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

B - P - 3

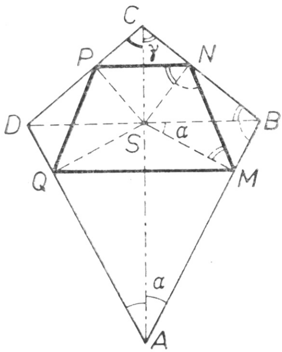
Nech $ABCD$ je deltoid (vypuklý štvoruholník súmerný práve podľa jednej zo svojich uhlopriečok) s osou súmernosti AC. Nech S je priesečník priamok AC, BD a M, N, P, Q v uvedenom poradí sú jeho kolmé priemety na priamky AB, BC, CD, DA.

a) V štvoruholníku $MNPQ$ platí $MQ \| NP$. Dokážte.

b) Nech $\sphericalangle BAD = 2\alpha$, $\sphericalangle BCD = 2\gamma$. Vyjadrite veľkosti uhlov štvoruholníka $MNPQ$ pomocou uhlov α, γ.

c) Rozhodnite, kedy je štvoruholník $MNPQ$ lichobežníkom a kedy rovnobežníkom.

Riešenie: a) Deltoid $ABCD$ je osove súmerný podľa osi AC. V tejto symetrii odpovedá bodu B bod D, úsečke AB úsečka



Obr. 11

AD, úsečke SM kolmej k AB úsečka SQ kolmá k AD (pozri obr. 11). Bodu M odpovedá teda bod Q, z čoho vyplýva, že $MQ \| BD$. Analogickou úvahou sa dokáže, že $NP \| BD$. Z tranzitívnosti relácie rovnobežnosti preto priamo vyplýva, že $MQ \| NP$, ako sme mali dokázať.

b) Trojuholníky SMB a SNB sú pravouhlé so spoločnou preponou SB. Štvoruholníku $SMBN$ môžeme preto opísať thaletovskú kružnicu s priemerom SB. Uhly $\sphericalangle SBM = 90° - \alpha$ a $\sphericalangle SNM$ sú obvodovými uhlami tejto kružnice prislúchajúcimi tomu istému oblúku SM. Preto tiež $\sphericalangle SNM = 90° - \alpha$. Z analogického dôvodu platí tiež $\sphericalangle NBS = 90° - \gamma = \sphericalangle NMS$. Preto platí

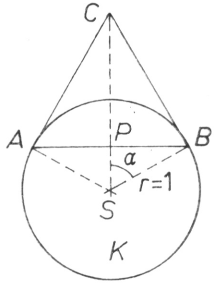
$$\sphericalangle MNP = \sphericalangle NPQ = \sphericalangle MNS + \sphericalangle SNP = 90° - \alpha + \gamma,$$
$$\sphericalangle PQM = \sphericalangle QMN = \sphericalangle SMN + \sphericalangle QMS = 90° - \gamma + \alpha.$$

c) Štvoruholník $MNPQ$ je súmerný podľa osi AC. Rovnobežníkom môže byť preto len vtedy, keď platí $MN \| AC \| PQ$. V takom prípade však bude priamka MN kolmá ku priamke MQ, čiže $\sphericalangle QMN = 90°$. Z časti b) však vieme, že $\sphericalangle QMN = 90° + \alpha - \gamma$. Štvoruholník $MNPQ$ bude rovnobežníkom teda práve vtedy, keď platí $\alpha = \gamma$, čiže vtedy, keď daný deltoid $ABCD$ bude kosoštvorec. Vo všetkých ostatných prípadoch bude štvoruholník $MNPQ$ lichobežníkom.

B - P - 4

Nech K je daný kruh s polomerom 1. Určte množinu vrcholov C všetkých rovnostranných trojuholníkov ABC, ktorých vrcholy A, B ležia vo vnútri alebo na hranici kruhu K.

Riešenie (obr. 12): Označme S stred daného kruhu K. Nech M je hľadaná množina vrcholov C všetkých rovnostranných trojuholníkov daných vlastností. Vzhľadom na symetriu kruhu a rovnostranného trojuholníka možno očakávať, že body množiny M vyplnia kruh G so stredom S a polomerom $r > 1$.



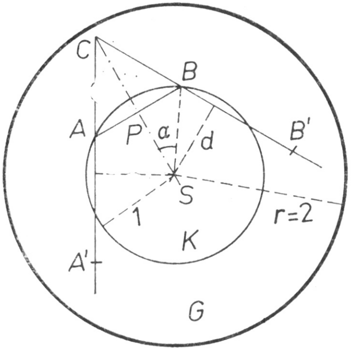
Obr. 12

Polomer r kruhu G sústredného s daným kruhom K určíme tak, keď budeme uvažovať o takej polohe rovnostranného trojuholníka ABC pri pevne zvolenej dĺžke AB, kedy má vrchol C najväčšiu vzdialenosť od bodu S (pozri obr. 12). V takom prípade platí:

$$|SC| = |SP| + |CP| = |SP| + \sqrt{3}\,|BP| =$$
$$= \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) =$$
$$= 2(\sin 30^\circ \cos\alpha + \cos 30^\circ \sin\alpha).$$

Je teda $|SC| = 2\sin(30^\circ + \alpha) \leqq 2$, pričom rovnosť nastane pre $\alpha = 60^\circ$. Je teda $r = 2$ čiže množina M je časťou kruhu $G(S;2)$.

Nech je obrátene C ľubovoľný bod kruhu G rôzny od jeho stredu S. Potom možno zostrojiť uhol $A'CB'$ veľkosti 60° tak, aby obsahoval bod S a aby priamka CS bola jeho osou. Nech A, resp. B je v uvedenom poradí priesečník polpriamky CA', resp. CB' s hranicou kruhu K. Pri vhodnom označení bodov A', B' na ramenách zostrojeného uhla tvoria potom body A, B, C vrcholy rovnostranného trojuholníka s vrcholom C z množiny M (obr. 13). Ak $C = S$, potom možno uvažovať o ľu-



Obr. 13

bovoľnom uhle veľkosti 60° s vrcholom v bode C a priesečníky jeho ramien s hranicou kruhu K pri vhodnom označení tvoria vrcholy A, B rovnostranného trojuholníka požadovaných vlastností. Tým sme dokázali, že kruh $G(S;2)$ je časťou množiny M, pretože existenciu bodov A, B v oboch uvažovaných prípadoch zaručuje skutočnosť, že vzdialenosť d bodu S od polpriamok CA', CB' je

$$d = |CS| \sin 30° \leqq 2 \sin 30° = 1.$$

Z oboch vyššie dokázaných inklúzií: $M \subset G$ a $G \subset M$ dostávame $M = G$, čo znamená, že množinou bodov daných vlastností je kruh so stredom S a polomerom $r = 2$.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY I. KOLA

B - I - 1

Pre každé prirodzené číslo $n \leqq 150$ existujú dva rôzne delitele d_1, d_2 čísla 9 000 000 také, že n delí rozdiel $d_1 - d_2$. Dokážte.

Riešenie: Pretože prvočíselný rozklad čísla 9 000 000 je

$$9\,000\,000 = 9 . 10^6 = 3^2 . 2^6 . 5^6,$$

bude počet všetkých jeho deliteľov v určený vzťahom:

$$v = (2 + 1)(6 + 1)(6 + 1) = 49 . 3 = 147.$$

a) V prípade, keď $n < 147$, môžeme použiť opäť Dirichletov priehradkový princíp ako pri riešení úlohy B-P-2. Pri delení číslom n majú totiž aspoň dva z deliteľov čísla 9 000 000 rovnaký zvyšok. Potom však ich rozdiel bude zrejme číslo deliteľné číslom n.

b) Zostáva ešte dokázať tvrdenie úlohy v prípadoch, keď $n = 147, 148, 149, 150$. V týchto prípadoch však nebude ťažké deliteľov čísla 9 000 000 požadovaných vlastností skutočne nájsť:
Pre $n = 147$ možno vziať $d_1 = 150 = 3 . 2 . 5^2$, $d_2 = 3$, pretože

$d_1 - d_2 = 147$. Pre $n = 148$ stačí vziať opäť $d_1 = 150$, $d_2 = 2$, lebo $d_1 - d_2 = 148$. Pri $n = 149$ je opäť $d_1 = 150$, $d_2 = 1$ a $d_1 - d_2 = 149$. Pri $n = 150$ vezmime $d_1 = 300 = 3 . 2^2 . 5^2$ a $d_2 = 150$. Potom $d_1 - d_2 = 150$.

B - I - 2

Nech a je prirodzené číslo tvaru $2p + 1$, kde p je prvočíslo. Nájdite množinu všetkých prirodzených čísel x, pre ktoré platí, že ak z nich vynecháme prvú číslicu, dostaneme $\frac{x}{a}$.

Riešenie: Z textu úlohy je zrejmé, že číslo x musí byť aspoň dvojciferné. Predpokladajme, že má m cifier, kde $m > 1$. Potom ho možno zapísať v tvare

$$x = y . 10^{m-1} + z,$$

kde y je niektoré z jednociferných prirodzených čísel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a z je nejaké $(m - 1)$ -ciferné číslo. Po vynechaní prvej číslice y z dekadického zápisu čísla x dostaneme zápis čísla z. Podľa textu úlohy však má platiť $z = \frac{x}{a}$. Z toho vyplýva, že platí $x = a . z$, čiže $y . 10^{m-1} + z = (2p + 1) z$, odkiaľ dostaneme

$$y . 10^{m-1} = 2p . z$$

a po delení číslom 2 bude

$$5y . 10^{m-2} = p . z. \tag{1}$$

Rovnica (1) nemôže byť splnená pre $p > 10$ pri žiadnom z, pretože prvočíslo $p > 10$ nedelí $5y.10^{m-2}$. Stačí teda nájsť riešenie rovnice (1) pre jednotlivé prvočísla $p < 10$.

a) Nech $p = 2$. Potom $a = 5$ a preskúmame postupne riešenia rovnice (1) pri jednotlivých možných hodnotách čísla y: Pre $y = 1$ dostaneme z (1) $5.10^{m-2} = 2z$, z čoho pre $m \geqq 3$ vyplýva $z = 25.10^{m-3}$, čiže $x = 1.10^{m-1} + 25.10^{m-3} = 125 \cdot 10^{m-3}$.

Pre $y = 2$ máme z (1) $5.10^{m-2} = z$, z čoho $x = 25.10^{m-2}$. Pre $y = 3$ bude z (1) $5.3.10^{m-2} = 2z$, odkiaľ $z = 5.15.10^{m-3}$, ak $m \geqq 3$, tj. $x = 3.10^{m-1} + 75.10^{m-3} = 375.10^{m-3}$.

Ak bude $y \geqq 4$, potom z (1) máme $2z = 5y.10^{m-2}$, z čoho $z = 25.y.10^{m-3} \geqq 100.10^{m-3} = 10^{m-1}$. To však nemôže nastať, pretože číslo z je podľa predpokladu len $(m - 1)$-ciferné.

V tomto prípade do hľadanej množiny patria čísla:

$\{25, 250, 2500, \ldots\} \cup \{125, 1250, 12\,500, \ldots\} \cup \{375, 3750, 37\,500, \ldots\}$.

b) Nech $p = 3$. Potom $a = 7$ a z rovnosti prirodzených čísel $5y.10^{m-2} = 3z$ vyplýva, že číslo y musí byť násobkom čísla 3. Preto nám treba postupne preskúmať prípady $y = 3, 6, 9$.

Ak $y = 3$, potom z (1) máme $5.3.10^{m-2} = 3z$, z čoho $z = 5.10^{m-2}$, čiže $x = 3.10^{m-1} + 5.10^{m-2} = 35.10^{m-2}$.

Pre $y \geqq 6$ dostaneme $3z = 5y.10^{m-2} \geqq 30.10^{m-2} = 3 \cdot 10^{m-1}$, z čoho v spore s predpokladom vyplýva $z \geqq 10^{m-1}$.

V tomto prípade do hľadanej množiny patria čísla $\{35, 350, 3500, \ldots\}$.

c) Ak $p = 5$, potom $a = 11$ a z (1) dostaneme $5y.10^{m-2} = 5z$, z čoho $z = y.10^{m-2}$, čiže $x = y.10^{m-1} + y.10^{m-2} = 11y.10^{m-2}$. Z toho vyplýva, že pre každú možnú hodnotu y dostaneme nekonečnú množinu riešení, takže hľadanú množinu čísel tvorí zjednotenie množín:

$\{11, 110, 1100, \ldots\} \cup \{22, 220, 2200, \ldots\} \cup \ldots \cup \{99, 990, 9900, \ldots\}$.

d) Ak $p = 7$, bude $a = 15$ a po dosadení do (1) dostaneme $5y.10^{m-2} = 7z$, z čoho vyplýva, že rovnici (1) môže vyhovovať len $y = 7$. Pri tejto hodnote však platí $z = 5.10^{m-2}$ čiže $x = 7.10^{m-1} + 5.10^{m-2} = 75.10^{m-2}$.

V tomto prípade úlohe vyhovujú čísla $\{75, 750, 7500, \ldots\}$.

Zistili sme teda, že úloha má riešenie len pre $a = 5, 7, 11, 15$ a v každom z týchto prípadov sme našli nekonečnú množinu prirodzených čísel, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, ako sa o tom ľahko možno presvedčiť.

B - I - 3

Určte všetky hodnoty reálneho parametra m, pre ktoré má sústava rovníc

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{1}$$

$$(x + m)^2 + (y - m)^2 = 1 \tag{2}$$

s neznámymi x, y práve jedno riešenie.

Riešenie: Ak od rovnice (2) odčítame rovnicu (1), dostaneme

$$2m(x - y) = -2m^2 - 3. \tag{3}$$

Z (3) vyplýva, že pre $m = 0$ nemá daná sústava žiadne riešenie. Ak $m \neq 0$, potom z (3) dostaneme

$$x = y - \frac{2m^2 + 3}{2m}. \tag{4}$$

Ak za x zo (4) dosadíme do (1), dostaneme postupne

$$y^2 + \left(y - m - \frac{3}{2m}\right)^2 = 4,$$

$$2y^2 - \left(2m + \frac{3}{m}\right)y + m^2 + \frac{9}{4m^2} - 1 = 0. \tag{5}$$

Pre diskriminant D kvadratickej rovnice (5) platí

$$D = \left(2m + \frac{3}{m}\right)^2 - 8\left(m^2 + \frac{9}{4m^2} - 1\right) = -4m^2 - \frac{9}{m^2} + 20.$$

Rovnica (5) má mať práve jedno riešenie. Preto jej diskriminant musí byť rovný nule, čiže

$$4m^4 - 20m^2 + 9 = 0. \tag{6}$$

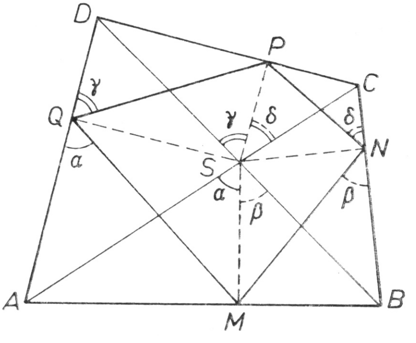
Ak v rovnici (6) použijeme substitúciu $z = m^2$, dostaneme kvadratickú rovnicu $4z^2 - 20z + 9 = 0$ s koreňmi $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{9}{2}$. Pre každý z týchto koreňov dostaneme dve hodnoty parametra m, pre ktoré má sústava (1), (2) práve jedno riešenie. Danej úlohe teda vyhovujú práve štyri hodnoty parametra m: $m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $m_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $m_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $m_4 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B - I - 4

Nech $ABCD$ je vypuklý štvoruholník taký, že kolmé priemety priesečníka jeho uhlopriečok na jednotlivé strany ležia vo vnútri týchto strán.

Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby tieto priemety ležali na kružnici je, aby uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$ boli na seba kolmé. Dokážte.

Riešenie: Označme S priesečník uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$ a M, N, P, Q v uvedenom poradí jeho kolmé priemety na strany AB, BC, CD, DA (pozri obr. 14). Štvoruholníkom



Obr. 14

$AMSQ$, $BNSM$, $CPSN$, $DQSP$ možno opísať kružnicu (thaletovskú) s priemermi v uvedenom poradí AS, BS, CS, DS. Sú to teda tzv. tetivové štvoruholníky. Podľa vety o rovnosti obvodových uhlov prislúchajúcich tomu istému oblúku kružnice preto platí: $\sphericalangle ASM = \sphericalangle AQM = \alpha$, $\sphericalangle MSB = \sphericalangle MNB = \beta$, $\sphericalangle PSD = \sphericalangle PQD = \gamma$, $\sphericalangle PSC = \sphericalangle PNC = \delta$. Ďalej zrejme platí: $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ a taktiež $\sphericalangle PQM = 180° - (\alpha + \gamma)$, $\sphericalangle PNM = 180° - (\beta + \delta)$. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby štvoruholník bol tetivový, tj. aby jeho vrcholy ležali na kružnici je, aby súčet jeho vnútorných protiľahlých uhlov bol 180°. To znamená, že body P, Q, M, N budú ležať na kružnici vtedy a len vtedy, keď $\sphericalangle PQM + \sphericalangle PNM = 180°$. Pretože $\sphericalangle PQM + \sphericalangle PNM = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180°$ vtedy a len vtedy, keď platí $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, ležia body M, N, P, Q na kružnici vtedy a len vtedy, keď $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 90°$, čiže vtedy, keď uhol ASB uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$ je pravý. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

B - I - 5

Pravouholník P nazveme opísaným pravidelnému šesťuholníku, ak každá z jeho strán obsahuje aspoň jeden vrchol šesťuholníka a žiaden bod šesťuholníka neleží mimo pravouholníka.

Je daný pravidelný šesťuholník so stranou dĺžky 1. Zostrojte aspoň jeden jemu opísaný pravouholník, ktorý:

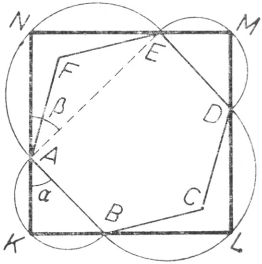
a) má čo najväčší obsah;

b) má čo najmenší obsah.

V oboch prípadoch určte podiel obsahov šesťuholníka a pravouholníka.

Riešenie: Z definície opísaného pravouholníka je zrejmé, že aspoň dva susedné vrcholy šesťuholníka ležia na susedných stranách pravouholníka. Označme ich A, B a ostatné vrcholy šesťuholníka označme podľa obr. 15. Označme ďalej K, L, M, N vrcholy opísaného pravouholníka. Tieto vrcholy v uvedenom poradí ležia na oblúkoch thaletovských kružníc s priemermi

AB, BD, DE, EA, pretože uhly $\sphericalangle AKB$, $\sphericalangle BLD$, $\sphericalangle DME$, $\sphericalangle ENA$ sú pravé. Ak označíme $\sphericalangle KAB = \alpha$, $\sphericalangle NAE = \beta$, potom zrejme platí $\beta = 90° - \alpha$. Z toho, že vnútorný



Obr. 15

uhol pravidelného šesťuholníka má veľkosť 120° vyplýva, že $\alpha \in \langle 30°, 60° \rangle$.

Obsah O pravouholníka $KLMN$ dostaneme ako súčet konštantného obsahu obdĺžnika $ABDE$ a obsahov trojuholníkov AKB, BLD, DME, ENA. Veľkosť obsahov týchto trojuholníkov je priamo úmerná vzdialenosti vrcholov K, L, M, N v uvedenom poradí od strán AB, BD, DE, EA obdĺžnika $ABDE$.

a) Z vyššie uvedenej úvahy vyplýva, že obsah O opísaného pravouholníka bude maximálny, keď trojuholníky AKB, BLD, DME, ENA budú rovnoramenné, čiže ak $\alpha = \beta = 45°$. V takom prípade však budú uhlopriečky KM, LN opísaného pravouholníka na seba kolmé, čo znamená, že $KLMN$ bude štvorec.

Z pravouhlého trojuholníka ADE s preponou $|AD| = 2$ sa ľahko vypočíta, že $|AE| = \sqrt{3}$. Vzdialenosť bodu K od úsečky

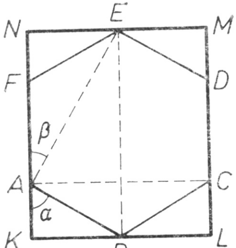
AB, resp. bodu M od úsečky DE je v uvažovanom prípade zrejme $\frac{1}{2}$ a tak pre uhlopriečku KM štvorca $KLMN$ zrejme platí $|KM| = 1 + \sqrt{3}$. Preto

$$O_{\max} = \frac{1}{2} |KM|^2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Pretože pre obsah S pravidelného šesťuholníka so stranou 1 platí $S = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, dostaneme $S : O_{\max} = \frac{3}{2}\sqrt{3} : (2 + \sqrt{3}) =$

$$= \frac{3}{2}(2\sqrt{3} - 3).$$

b) Obsah O opísaného pravouholníka $KLMN$ bude zrejme minimálny vtedy, keď budú minimálne vzdialenosti bodov K, L, M, N v uvedenom poradí od úsečiek AB, BD, DE, EA. Tento prípad nastane vtedy, keď buď $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ alebo $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ (pozri obr. 16). V takom prípade však



Obr. 16

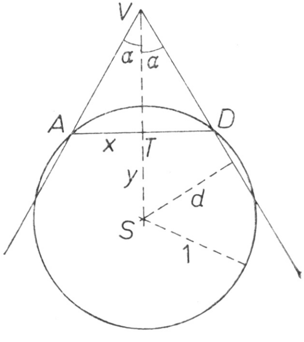
$O_{\min} = |KL| \,.\, |LM| = |BE| \,.\, |AC| = 2\sqrt{3}$. Preto $S : O_{\min} =$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3} : 2\sqrt{3} = \frac{3}{4}.$$

B - I - 6

Je daná guľa G s polomerom 1. Určte množinu vrcholov V všetkých pravidelných štvorstenov $ABCV$, ktorých vrcholy A, B, C ležia vo vnútri alebo na hranici gule G.

Riešenie: Ide zrejme o stereometrickú analógiu úlohy B-P-4. Označme M hľadanú množinu vrcholov V pravidelných štvorstenov požadovaných vlastností. Nech $ABCV$ je niektorý z týchto štvorstenov. Ak ho budeme otáčať okolo stredu S gule G, zostane celý trojuholník ABC, ktorý je podstavou tohto štvorstena v guli G. Z toho vyplýva, že množina M musí byť podmnožinou gule K so stredom S a polomerom $r > 1$. Jej polomer určíme tak, keď zistíme maximálnu možnú vzdialenosť $|SV|$ pre vrchol pravidelného štvorstena požadovaných vlast-



Obr. 17

ností. Nech V je vrchol, pre ktorý je $|SV|$ maximálna. Potom zrejme vrcholy A, B, C podstavy štvorstena ležia na hranici gule G. Nech T je ťažisko podstavy. Ak bude štvorsten $ABCV$ rotovať okolo osi TV, potom vrcholy A, B, C opíšu na hranici gule G kružnicu so stredom T a polomerom $|AT|$. Označme a hranu štvorstena. Potom zrejme platí $|AT| = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ak vyjdeme zo situácie v rovine ASV (pozri obr. 17) a označíme $|AT| = x$, $|ST| = y$, potom vzhľadom na vyššie uvedené platí $a = x\sqrt{3}$. Z Pythagorovej vety vyplýva $x^2 + y^2 = 1$, $|TV| = x\sqrt{2}$. Preto

$$|SV| = |ST| + |TV| = y + x\sqrt{2},$$

z čoho priamo vyplýva

$$|SV|^2 = y^2 + 2\sqrt{2}xy + 2x^2 = 1 - x^2 + 2\sqrt{2}xy +$$

$$+ 2(1 - y^2) = 3 - (x - \sqrt{2}y)^2,$$

čiže

$$|SV| = \sqrt{3 - (x - \sqrt{2}\,y)^2},$$

čo znamená, že $|SV|_{\max} = \sqrt{3}$, pričom táto situácia nastane pre $x = \sqrt{2}y$ a vzhľadom na podmienku $x^2 + y^2 = 1$ pre $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = \sqrt{3}$. Z uskutočnenej úvahy vyplýva teda, že M je časťou gule K so stredom S a polomerom $r = \sqrt{3}$. Pripomeňme si ešte, že pri uvažovanej rotácii okolo osi VT vytvorí štvorsten $ABCV$

kužeľovú plochu, ktorej podstavou je kružnica so stredom v bode T a polomerom $a\frac{\sqrt{3}}{3}$ a jej vrchol V je totožný s vrcholom V uvažovaného štvorstena. Pre vrcholový uhol SVD veľkosti 2α zrejme platí: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Nech teraz obrátene bod V je ľubovoľný z bodov gule $K(S;\sqrt{3})$. Zostrojme rotačnú kužeľovú plochu s vrcholom V a vrcholovým uhlom 2α, pričom $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a s osou SV, ak $V \neq S$ (v prípade $V = S$ volíme za os kužeľovej plochy ľubovoľnú priamku prechádzajúcu bodom V). Pretože pre vzdialenosť d stredu S od kužeľovej plochy (obr. 17) platí

$$d = |SV| \sin\alpha \leq \sqrt{3} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,$$

pretína táto kužeľová plocha hranicu gule G aspoň v jednej kružnici k. Ak do kružnice k vpíšeme rovnostranný trojuholník ABC, potom jeho vrcholy spolu s bodom V určujú pravidelný štvorsten požadovaných vlastností. Tým sme dokázali, že $K \subset M$.

Z platnosti oboch dokázaných inklúzií vyplýva preto, že hľadanou množinou M je guľa $K(S;\sqrt{3})$.

B - II - 1

Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 5$, pre ktoré je číslo

$$1.2.3. \ldots .(n-4)$$

deliteľné číslom n.

Riešenie: Predovšetkým je zrejmé, že tvrdenie úlohy neplatí pre žiadne prvočíslo. Predpokladajme preto, že n je číslo zložené, tj. že platí $n = a.b$, kde $a \geqq 2$, $b \geqq 2$ sú prirodzené čísla.

a) Nech $a \neq b$. Zrejme platí $a \leqq \frac{n}{2}$, $b \leqq \frac{n}{2}$. Z toho však vyplýva, že v tomto prípade vyhovuje úlohe každé zložené číslo, pre ktoré platí $\frac{n}{2} \leqq n - 4$ čiže $n \geqq 8$. Zostáva preskúmať číslo $n = 6 = 2.3$, ktoré však úlohe nevyhovuje.

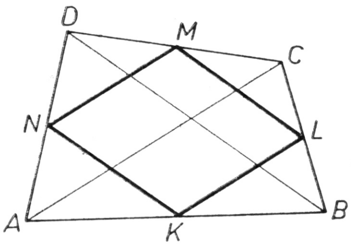
b) Ďalej je zrejmé, že zloženými číslami, pre ktoré nie je splnená vyššie uvedená podmienka, sú len čísla tvaru $n = p^2$, kde p je prvočíslo. V takom prípade však budú úlohe vyhovovať všetky také čísla, pre ktoré sú v súčine $1.2.3. \ldots .(p^2 - 4)$ aspoň dva faktory deliteľné číslom p. Túto vlastnosť splňujú všetky také prvočísla p, pre ktoré platí $2p \leqq p^2 - 4$ čiže $p \geqq 4$. Zostáva ešte preskúmať číslo $n = 3^2 = 9$, ktoré je tohto tvaru, ale ľahko sa vidí, že úlohe nevyhovuje.

Záver: Danej úlohe vyhovujú všetky zložené prirodzené čísla $n \geqq 10$ a číslo 8.

B - II - 2

Nech kolmé priemety priesečníka uhlopriečok konvexného štvoruholníka na jednotlivé strany ležia vo vnútri týchto strán. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby týmito štyrmi priemetmi bolo možné preložiť kružnicu je, aby bolo možné preložiť kružnicu stredmi jeho strán.
Dokážte.

Riešenie: Označme A, B, C, D vrcholy uvažovaného konvexného štvoruholníka a K, L, M, N stredy jeho strán (pozri obr. 18). Z vlastností strednej priečky trojuholníka vy-



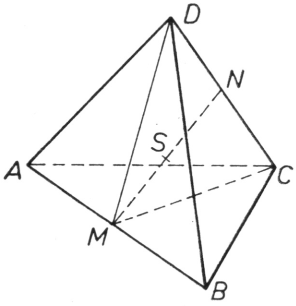
Obr. 18

plýva, že platí: $KL \parallel AC \parallel MN$ a tiež $KN \parallel BD \parallel LM$. Štvoruholník $KLMN$ je teda rovnobežníkom. Rovnobežníku však možno opísať kružnicu vtedy a len vtedy, keď je pravouholníkom. Štvoruholník $KLMN$ je však pravouholníkom vtedy a len vtedy, keď sú uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$ na seba kolmé. Podľa tvrdenia, ktoré sme dokázali v úlohe B-I-4, je kolmosť uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$ nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby kolmé priemety priesečníka uhlopriečok štvoruholníka na jeho jednotlivé strany ležali na kružnici. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

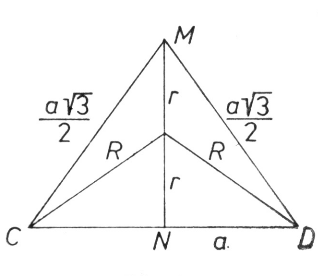
B - II - 3a

V priestore je daná guľová plocha so stredom S a polomerom r a vo vzdialenosti d od bodu S priamka p. Určte na priamke p vrchol pravidelného štvorstena, ktorého všetky hrany sa dotýkajú danej guľovej plochy.

Urobte diskusiu riešiteľnosti.



Obr. 19



Obr. 20

Riešenie: Označme G danú guľovú plochu. Je zrejmé, že množinou vrcholov všetkých pravidelných štvorstenov, ktorých všetky hrany sa dotýkajú guľovej plochy $G(S;r)$ bude opäť guľová plocha so stredom S. Označme jej polomer R a vypočítajme jeho hodnotu. Nech $ABCD$ je pravidelný štvorsten, ktorého všetky hrany sa dotýkajú danej guľovej plochy a nech a je veľkosť jeho hrany. Nech M, N sú v uvedenom poradí stredy hrán AB, CD (pozri obr. 19). V rovnoramennom trojuholníku CMD (obr. 20) zrejme platí: $|CM| = |DM| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bod S leží vo vnútri trojuholníka CMD, pričom platí: $|SM| = |SN| = r$, $|SC| = |SD| = R$. Podľa Pythagorovej vety z pravouhlých trojuholníkov CNS a CNM vyplýva

$$R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}, \qquad \frac{3}{4}a^2 = 4r^2 + \frac{a^2}{4},$$

z čoho dostaneme $a^2 = 8r^2$, $R^2 = 3r^2$. Teda $R = r\sqrt{3}$.

Hľadaný vrchol pravidelného štvorstena dostaneme zrejme ako spoločný bod priamky p a guľovej plochy $K(S;r\sqrt{3})$. Vzhľadom na to, že priamka môže mať s guľovou plochou najviac dva spoločné body, dostaneme v prípade $d < r\sqrt{3}$ dve riešenia úlohy, v prípade $d = r\sqrt{3}$ má úloha práve jedno riešenie a v prípade $d > r\sqrt{3}$ riešenie nejestvuje.

B - II - 3b

Nájdite všetky hodnoty reálneho parametra p, pre ktoré sústave rovníc

$$x^2 + 8y^2 + 2x = 7p^2, \tag{1}$$

$$(x + 1)^2 + (2y + p)^2 = 1 \tag{2}$$

vyhovujú práve dve usporiadané dvojice x, y reálnych čísel.

Riešenie: Rovnicu (1) môžeme prepísať do tvaru

$$(x + 1)^2 + 8y^2 = 7p^2 + 1. \tag{1'}$$

Z (1'), (2) je zrejmé, že ak danej sústave vyhovuje usporiadaná dvojica x, y potom je riešením tiež dvojica $-x - 2, y$.

Ak od rovnice (2) odčítame rovnicu (1'), dostaneme

$$8y^2 - (2y + p)^2 = 7p^2,$$

z čoho po jednoduchej úprave vyplýva

$$y^2 - py - 2p^2 = 0. \tag{3}$$

Pre $p = 0$ má (3) zrejme jediné riešenie $y = 0$ a danej sústave vyhovujú práve dve dvojice: $x = 0, y = 0$ a $x = -2, y = 0$.

V prípade $p \neq 0$ má (3) dva rôzne reálne korene: $y_1 = -p$, $y_2 = 2p$.

V prípade $y = -p$ majú obe rovnice danej sústavy tvar

$$x^2 + 2x + p^2 = 0, \tag{4}$$

pre $y = 2p$ dostaneme z každej z rovníc (1), (2)

$$x^2 + 2x + 25p^2 = 0. \tag{5}$$

Z toho vyplýva, že sústava (1), (2) má práve dve riešenia vtedy a len vtedy, keď z rovníc (4), (5) jedna má dva reálne korene, druhá nemá reálne korene. To však nastane vtedy a len vtedy, keď platí

$$\frac{1}{25} < p^2 < 1.$$

Sústava (1), (2) má teda práve dve rôzne riešenia vtedy a len vtedy, keď nastane niektorý z týchto prípadov: $p \in \left(-1, -\frac{1}{5}\right)$, $p = 0$, $p \in \left(\frac{1}{5}, 1\right)$.