30. ročník matematické olympiády

Korespondenční seminář ÚV MO

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); František Zítek (editor): 30. ročník matematické olympiády. Školní rok 1980-1981. 22. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983. pp. 141–148.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404746

Korespondenční seminář ÚV MO

Cílem korespondenčního semináře je dále zvyšovat úroveň špičkových řešitelů, kteří nejsou z Prahy ani z Bratislavy a nemají tak možnost pracovat v tamních seminářích pro přípravu na mezinárodní MO. K účasti pozvalo předsednictvo ÚV MO na základě výsledků v MO, návrhů KV MO a individuálního zájmu asi 50 žáků, z nichž se přihlásilo a zúčastnilo přes 30. Pravidelně jim byly rozesílány série poměrně náročných úloh, které měli během 4—5 týdnů vyřešit. Došlá řešení byla pak opravena, ohodnocena a spolu s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům. Uvádíme znění všech úloh zadaných v korespondenčním semináři:

1. Teorie čísel

1.1 Posloupnost $\{a_n\}$ je definována předpisem

$$a_n = 3(n^2 + n) + 7.$$

Dokažte, že má následující vlastnosti:

(1) Mezi každými pěti po sobě následujícími členy je právě jeden dělitelný pěti.

(2) Žádný člen není třetí mocninou celého čísla.

1.2 Dokažte: Pro každé přirozené číslo n je číslo $(n^3 - 1)\, n^3(n^3 + 1)$ dělitelné číslem 504.

1.3 Najděte všechna prvočísla p taková, že $4p^2 + 1$, $6p^2 + 1$ jsou také prvočísla.

1.4 Platí-li pro celá čísla a, b

$$2a^2 + a = 3b^2 + b,$$

jsou čísla $a - b$, $2a + 2b + 1$ druhé mocniny celých čísel. Dokažte.

1.5 Dokažte: Jsou-li x_1, x_2 kořeny rovnice

$$x^2 + px - 1 = 0,$$

kde p je liché číslo, pak čísla $x_1^{17} + x_2^{17}$, $x_1^{18} + x_2^{18}$ jsou celá a nesoudělná.

1.6 Najděte všechna celá čísla x, y z, pro která platí

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

1.7 Najděte všechna celá čísla x, y, z, t, pro která platí

$$x + y + z + t = xyzt.$$

2. Geometrické nerovnosti

2.1 Na kruhovém stole s poloměrem 25 leží 143 mincí s poloměrem 1. Dokažte, že se na stůl vejde ještě jedna mince tak, aby se s žádnou mincí nepřekrývala.

2.2 Ve čtvercovém poli o straně 12 je studna a od ní vede síť zavlažovacích kanálů. Kanály jsou složeny z úseček a každý bod pole je od některého vzdálen nanejvýš 1. Dokažte, že celková délka kanálů je větší než 70.

2.3 Střed kruhového lesa o poloměru 50 je v počátku a stromy rostou v bodech s celočíselnými souřadnicemi (kromě počátku). Budou-li poloměry stromů menší než $\frac{1}{\sqrt{2501}}$, bude ze středu vidět z lesa ven, budou-li poloměry stromů $\frac{1}{50}$, vidět nebude. Dokažte.

2.4 Ve středu čtvercového pole je vlk a ve vrcholech čtyři psi. Vlk může běhat po celém poli, psi jen po obvodu. Vlk přemůže jednoho psa, dva psi přemohou vlka. Psi umějí běhat víc než 1,5krát rychleji než vlk. Dokažte, že psi mohou udržet vlka v poli.

2.5 Křižník pluje rovnoměrně přímočaře rychlostí v. V okamžiku, kdy ho zpozoruje ponorka, je spojnice obou lodí kolmá na dráhu křižníku a lodi mají vzdálenost d. Na jakou nejmenší vzdálenost se může ponorka přiblížit ke křižníku, má-li maximální rychlost u?

2.6 Světlomet majáku ozařuje úsečku dlouhou 1 km a otáčí se jednou za minutu. Jakou rychlostí musí plout loď, aby se dostala k majáku a nebyla osvětlena?

2.7 Na okraji kruhového bazénu stojí Petr a uprostřed plave Pavel. Petr neumí plavat, ale běhá k-krát rychleji než plave Pavel, ale pomaleji, než běhá Pavel. Uteče Pavel Petrovi?

3. Funkcionální rovnice

3.1 Je dáno reálné číslo a funkce f taková, že pro všechna reálná čísla x platí

$$f(x + a) = \tfrac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}.$$

Dokažte, že funkce f je periodická. Uveďte aspoň dva příklady funkce f, která splňuje podmínku.

3.2 Najděte všechny mnohočleny f takové, že pro každé reálné číslo x platí:

$$xf(x - 1) = (x - 26)f(x).$$

3.3 Najděte všechny spojité funkce g, k nimž existuje spojitá funkce f dvou proměnných tak, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$g(xy) = f(x, g(y)).$$

3.4 Najděte všechny funkce f takové, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$$

3.5 Najděte všechny funkce f takové, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

3.6 Najděte všechny funkce f takové, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x)f(y).$$

3.7 Najděte všechny rostoucí funkce f takové, že pro všechna kladná reálná čísla x, y platí

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

4. Kombinatorická geometrie

4.1 V mnohoúhelníku je sestrojena soustava úhlopříček, které se neprotínají. Dokažte, že aspoň ze dvou vrcholů nevychází žádná z těchto úhlopříček.

4.2 V rovině je dána konečná množina bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Body postupně spojujeme úsečkami tak, aby se úsečky neprotínaly; pokračujeme tak dlouho, dokud to jde. Dokažte, že počet úseček, které se podaří sestrojit, nezávisí na postupu. V jakých mezích se při daném počtu bodů pohybuje počet úseček v závislosti na rozložení bodů?

4.3 Konečná množina bodů v rovině má tu vlastnost, že osa souměrnosti libovolných jejích dvou bodů je osou souměrnosti celé množiny. Dokažte, že množina leží na kružnici. Platí to i pro nekonečné množiny?

4.4 Najděte všechny takové n-prvkové množiny bodů v rovině, že vzdálenosti bodů v množině nabývají jen dvou hodnot a, b. Pro jaká čísla n a jaký poměr $a : b$ taková množina existuje ?

4.5 Existuje sedmiprvková množina bodů v rovině tak, aby každé tři její body byly vrcholy rovnoramenného trojúhelníka ? Popište všechny šestibodové množiny s touto vlastností.

4.6 Uvažujme množinu bodů v rovině, z jejíchž libovolných pěti bodů lze vybrat čtyři tak, aby ležely na kružnici.

Dokažte: Má-li množina $n > 6$ bodů, leží aspoň $n - 1$ z nich na kružnici. Platí to také pro $n < 7$?

4.7 Konečná množina bodů v rovině má tu vlastnost, že na každé přímce procházející dvěma body množiny leží aspoň jeden další bod množiny. Dokažte, že množina leží v přímce. Platí to i pro nekonečnou množinu?

5. Stereometria

5.1 Sú dané priamky a, b, c, z ktorých každé dve sú navzájom mimobežné a každá z nich je rovnobežná s danou rovinou ϱ. Nech M je množina všetkých priečok priamok a, b, c (tj. množina všetkých takých priamok, z ktorých každá pretína každú z priamok a, b, c). Nech $m \in M$ je ľubovoľná priečka a nech $M_1 = m \cap a$, $M_2 = m \cap b$, $M_3 = m \cap c$.

a) Akú hodnotu má podielový pomer $u = (M_1M_2M_3) = \dfrac{|M_1M_3|}{|M_2M_3|}$ (v tejto úlohe $|M_iM_j|$ znamená dĺžku orientovanej úsečky M_iM_j, tj. kladné alebo záporné reálne číslo) pre ľubovoľnú priamku $m \in M$?

b) Majú všetky priamky $m \in M$ nejakú význačnú vlastnosť týkajúcu sa polohy?

5.2 Nech je daný trojhran $Sabc$ (S - vrchol trojhranu, polpriamky a, b, c - hrany trojhranu). Uhly dvojíc hrán trojhranu označme $\alpha = \sphericalangle(b, c)$, $\beta = \sphericalangle(c, a)$, $\gamma = \sphericalangle(a, b)$; uhol susedný s uhlom α, resp. β, resp. γ označme α', resp. β', resp. γ'.

1. Dokážte:

a) Tri osi uhlov α', β', γ' ležia v jednej rovine ϱ.

b) Tri osi uhlov α, β, γ' (resp. α, β', γ, resp. α', β, γ) ležia v jednej rovine ϱ'.

c) Rovina ϱ (resp. ϱ') zviera s hranami a, b, c zhodné uhly.

2. Dokážte: Tri roviny σ, τ, ξ, prechádzajúce postupne osami uhlov α, β, γ, pričom $\sigma \perp (b, c)$, $\tau \perp (c, a)$, $\xi \perp (a, b)$, sa pretínajú v jednej priamke p, ktorá je kolmá na rovinu ϱ z časti 1.

5.3 Nech z n bodov $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geqq 3$) priestoru žiadne štyri neležia v jednej rovine. Nech ϱ je rovina rôznobežná s každou z priamok A_iA_{i+1} ($i = 1, \ldots, n$; $A_{n+1} = A_1$). Označme $A_iA_{i+1} \cap \varrho = K_{i,i+1}$.

a) Dokážte: $\prod_{i=1}^{n} (A_iA_{i+1}K_{i,i+1}) = 1$.

b) Preverte platnosť obráteného výroku:

Ak $K_{i,i+1}$ ($i = 1, \ldots, n$) sú body priamok A_iA_{i+1} ($A_{n+1} = A_1$), pre ktoré platí

$$\prod_{i=1}^{n} (A_iA_{i+1}K_{i,i+1}) = 1,$$

ležia všetky body $K_{i,i+1}$ v jednej rovine.

Sformulujte prípadnú závislosť platnosti tohto výroku od čísla n.

5.4 V rovine alebo priestore treba nájsť n bodov $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \in N$) tak, aby ani jeden z uhlov $\sphericalangle A_iA_jA_k$ ($i, j, k = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j \neq k \neq i$) nebol tupý.

Zistite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je úloha riešiteľná.

a) v rovine;

b) v priestore.

(Tvrdenie odôvodnite).

5.5 Nech sú dané úsečky AB, CD. Nech M je množina všetkých priamok m, obsahujúcich spoločnú hranu EF každých dvoch štvorstenov $ABEF$, $CDEF$, pre ktoré sa pomer ich objemov rovná danému (kladnému) reálnemu číslu k. Nájdite množinu M' všetkých takých priamok $m \in M$, ktoré prechádzajú daným bodom S.

5.6 a) Ako treba umiestniť na guľovej ploche n bodov $A_1, \ldots, A_n$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$), ak najmenšia zo vzdialeností $|A_iA_j|$ ($i, j = 1, \ldots, n$; $i \neq j$) má mať maximálnu možnú hodnotu?

b) Ako treba umiestniť na guľovej ploche s jednotkovým polomerom najvyšší možný počet bodov A_i($i =$ $= 1, 2, \ldots$), ak pre každú vzdialenosť $d_{ij} = |A_iA_j|$ ($i \neq j$) platí:

1. $d_{ij} \geqq \sqrt{2}$,
2. $d_{ij} > \sqrt{2}$.

5.7 V priestore je dané otáčanie ϱ s osou otáčania r.

1. Vyjadrite otáčanie ϱ ako kompozíciu dvoch otáčaní σ, σ' s osami s, s' za predpokladov, že
   a) uhly (orientované) otáčaní σ, σ' sú navzájom zhodné, a
   b) osou otáčania σ je daná priamka, ktorá je rôznobežná s priamkou r.
2. Nájdite množinu všetkých osí s' otáčania σ' za podmienky, že os s otáčania σ prebieha pevnou rovinou ξ.