22. MMO

Dvaadvacátá mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 8.—20. července 1981 v USA - poprvé mimo evropský kontinent. Jejím hlavním pořadatelem byla americká vědecká společnost The Mathematical Association of America, hlavním dějištěm pak Georgetown University ve Washingtonu.

Olympiády se zúčastnily delegace z 27 zemí všech pěti kontinentů - z Austrálie, Belgie, Brazílie, Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Izraele, Jugoslávie, Kanady, Kolumbie, Kuby, Lucemburska, Maďarska, Mexika, NSR, Polska, Rakouska, Rumunska, Řecka, SSSR, Švédska, Tunisu, USA, Velké Británie a Venezuely. Z obvyklých účastníků tedy chyběly tentokrát NDR a Vietnam, poprvé se zúčastnily Austrálie, Kanada, Kolumbie, Mexiko, Tunis a Venezuela.

Přes jednoroční přestávku - v roce 1980 se MMO nekonala - se podařilo navázat na dlouholetou tradici těchto mezinárodních soutěží mladých matematiků a opět MMO uspořádat v obvyklé podobě; nedošlo k žádným podstatným změnám ani v organizaci, ani v náplni soutěže. Počet soutěžících byl opět rekordní - 185 žáků středních škol tu změřilo své síly a schopnosti.

Jako obvykle byla MMO rozdělena na přípravnou fázi (9.—12. července), vlastní soutěž (13. a 14. července) a hodnocení výsledků a závěr (14.—19. července). Jednotlivé delegace přicestovaly do New Yorku většinou už ve středu 8. července. Vedoucí delegací, kteří tvoří mezinárodní porotu MMO, se spolu s předsedou poroty 22. MMO *prof. S. L. Greitzerem* z Rutgers University přesunuli 9. července do města Fredericksburg ve státě Virginia, aby tam - přísně izolováni od soutěžících žáků - vybrali a připravili soutěžní úlohy. Zástupci vedoucích a žáci byli mezitím ubytováni v areálu Rutgers University ve městě New Brunswick ve státě New Jersey, kde měli volno na odpočinek po cestě zpestřené výletem a prohlídkou New Yorku.

Mezinárodní porota ubytovaná v Mary Washington College ve Fredericksburgu zatím pilně pracovala. Z materiálu připraveného organizátory a obsahujícího 19 úloh navržených zúčastněnými zeměmi postupně vybrala tuto šestici soutěžních úloh:

1. Je-li P vnitřní bod daného trojúhelníku ABC, označme po řadě D, E, F paty kolmic spuštěných z P na přímky BC, CA, AB. Najděte všechny body P, pro které je součet

$$\frac{|BC|}{|PD|} + \frac{|CA|}{|PE|} + \frac{|AB|}{|PF|}$$

minimální.

2. Nechť n, r jsou celá čísla, $1 \leqq r \leqq n$. Utvořme všechny r-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$; z každé z nich vezmeme její nejmenší prvek a označíme $F(n, r)$ aritmetický průměr všech takto získaných čísel. Dokažte, že

$$F(n, r) = \frac{n + 1}{r + 1}.$$

3. Určete největší hodnotu výrazu $m^2 + n^2$, kde m a n jsou celá čísla, $1 \leqq m \leqq 1981$, $1 \leqq n \leqq 1981$, taková, že

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1.$$

4. a) Pro které hodnoty n, $n > 2$, existuje n po sobě jdoucích kladných celých čísel tak, že největší z nich je dělitelem nejmenšího společného násobku ostatních $n-1$ čísel?

b) Pro které n existuje právě jedna taková n-členná posloupnost?

5. Tři shodné kružnice mají společný bod O a leží uvnitř daného trojúhelníku ABC. Každá kružnice se dotýká dvou stran tohoto trojúhelníku. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a bod O leží na jedné přímce.

6. Funkce $f(x, y)$ splňuje

$$f(0, y) = y + 1 \tag{1}$$

$$f(x + 1, 0) = f(x, 1), \tag{2}$$

$$f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)) \tag{3}$$

pro všechna celá nezáporná x, y. Určete $f(4, 1981)$.

Vybrané úlohy pocházely z návrhů, které předložily Velká Británie, NSR, Holandsko, Belgie, SSSR a Finsko.

Výběr soutěžních úloh na MMO není lehkou záležitostí a může velmi podstatně ovlivnit další průběh soutěže. Porota je při výběru omezena na předložené návrhy a konečný výsledek bývá určen řadou kompromisů. Cílem je ovšem nalézt vyvážený soubor šesti úloh, který by přesvědčivě prověřil znalosti a schopnosti soutěžících, aniž by zároveň předem znevýhodňoval kteroukoliv skupinu účastníků.

O šestici soutěžních úloh vybraných pro 22. MMO lze říci, že každá z úloh sama o sobě je dobrá a pro MMO vhodná, avšak v celém souboru zjevně chybí alespoň jedna opravdu obtížná úloha, jejíž vyřešení vyžaduje podat skutečně špičkový výkon. Porota si byla této skutečnosti vědoma, což vyjádřila mj. i tím, že na rozdíl od dosavadní praxe ohodnotila všechny úlohy stejným počtem sedmi bodů; celkem tedy mohl každý soutěžící získat maximálně 42 body.

Jak ukázaly výsledky soutěže, byly úlohy pro 22. MMO skutečně příliš snadné. I když soutěžícím z některých zemí s menšími zkušenostmi z MMO dělaly i tyto snadné úlohy potíže, žáci ze zemí, kde matematické olympiády již mají tradici a kde se s mladými talenty soustavně a cílevědomě pracuje, dokázali většinou rozřešit v stanoveném čase ($4\frac{1}{2}$ hodiny na každou trojici úloh) všechno nebo takřka všechno.

Porota na MMO rozhoduje hlasováním, k přijetí návrhu stačí prostá většina. Na 22. MMO přijelo mnoho delegací vůbec poprvé a tito »nováčci« měli ovšem tendenci udržet obtížnost soutěže v »přijatelných« mezích. To spolu se skutečností, že porota měla k dispozici jen texty úloh bez jejich podrobného rozboru, snad může vysvětlit, proč byla soutěž tak snadná.

Výběr úloh byl skončen již 10. července, zbývající čas příprav zabraly detailní formulace, překlad textů do národních jazyků soutěžících žáků a rozmnožení potřebného počtu exemplářů. Všechny tyto přípravy byly ukončeny v neděli 12. července. Týž den se již také soutěžící a zástupci vedoucích přestěhovali z Rutgers University do areálu Georgetown University ve Washingtonu D. C. V úterý 14. července sem přesídlila i porota z Fredericksburgu.

Slavnostní zahájení 22. MMO proběhlo v pondělí 13. července dopoledne ve velké aule univerzity za účasti federálního ministra pro výchovu *T. H. Bella* a zástupců pořádajících institucí a georgetownské university. Hned poté následovala prvá část soutěže (řešení první trojice úloh); druhá část proběhla dopoledne 14. července.

Tím skončila pro soutěžící žáky pracovní část jejich pobytu - ve zbývajících dnech se mohli věnovat prohlídkám města Washingtonu a jeho pamětihodností i návštěvě kulturních podniků, které pro ně pořadatelé připravili. Dvou z nich - představení hry Camelot v divadle Harlequin a vystoupení holandské baletní skupiny v amfiteátru Wolf Trap - se mohli zúčastnit také členové poroty, kteří jinak měli v těchto dnech plné ruce práce s opravou žákovských řešení, s jejich hodnocením a s koordinací.

Koordinaci hodnocení úloh prováděla skupina dvaceti koordinátorů vybraných z řad amerických vysokoškolských odborníků. Byli vesměs na vysoké odborné úrovni a uplatňovali náročná hlediska nejen co do věcné správnosti řešení, ale také při posuzování formální stránky, tj. přesnosti a úplnosti formulací všech tvrzení a jejich důkazů. Tato zvýšená přísnost byla ovšem jen zákonitým důsledkem snadnosti úloh a zároveň i relativně účinným prostředkem, jak zabránit přílišné kumulaci úspěšných řešitelů na předních místech výsledného pořadí. I tak se celkem 26 žákům podařilo projít soutěží beze ztráty bodu.

V pátek 17. července byly práce s koordinací dokončeny a po vyřešení některých sporných otázek mohla porota schválit definitivní výsledky soutěže. Na sobotním zasedání pak jednala porota o cenách. Rozhodla, že na 22. MMO nebudou uděleny žádné zvláštní ceny za originální a elegantní řešení, ačkoli koordinátoři předložili řadu návrhů. Při dalším rozhodování -

o hranicích pro udělení prvních, druhých a třetích cen - sehrály určitou roli i otázky prestižní. Ačkoliv byly úlohy snadné, porota cenami nijak nešetřila. Hned v úvodu jednání rozhodla, že první cenu dostane nejen 26 žáků s plným počtem 42 bodů, ale také dalších 10 žáků s 41 body - celkem tedy 36 prvních cen. V porovnání s malým počtem prvních cen udělených na 20. a 21. MMO je to zjevný odklon od dosavadních zvyklostí. Také obvyklý poměr 1 : 2 : 3 počtu prvních, druhých a třetích cen nebyl tentokrát dodržen: druhých cen udělila porota 37 (za výkony ohodnocené 34—40 body), třetích cen pak 30 (za 26—33 bodů). Celkem 103 soutěžící (tj. 55,7 % z celkového počtu) získali na 22. MMO některou z cen.

Vzhledem k tomu, že mnoho zemí vyslalo na 22. MMO delegaci s méně než osmi žáky, nelze tentokrát dost dobře porovnávat družstva podle celkového počtu bodů. Výsledky i počty získaných cen jsou patrny z připojené tabulky.

Na svém posledním zasedání v neděli 19. července dopoledne jednala porota o budoucnosti MMO. Byla informována o návrhu ICMI na zřízení komise pro MMO. Většina členů komise navržených ICMI byla ostatně na 22. MMO osobně přítomna, komise se tedy ihned sešla - za účasti některých dalších členů poroty. Bylo dohodnuto, že komise má zatím fungovat jako informační centrum a poradní orgán a nemá samozřejmě pravomoc rozhodovat o organizaci MMO. Její vztah k ICMI nebyl zatím plně specifikován. Bude záležet na organizátorech příštích MMO, jak dalece budou přihlížet k doporučením komise. Zatím byla přednesena dvě podstatná doporučení: udržet tradici pořádat MMO každý rok a snížit počet žáků v družstvu z osmi na šest; toto snížení bylo motivováno stále rostoucím počtem delegací. Zda se tato doporučení

Výsledky 22. MMO

Země	Součet bodů žáka č. 1	2	3	4	5	6	7	8	Celkem	Počet cen I.	II.	III
Austrálie	22	13	12	10	17	12	8	28	122	0	0	1
Belgie	37	24	25	38	6	3	3	3	139	0	2	0
Brazílie	42	23	21	14	17	13	21	21	172	1	0	0
Bulharsko	32	42	40	34	28	37	33	41	287	2	3	3
Československo	38	38	40	42	32	—	—	—	190	1	3	1
Finsko	27	41	17	10	31	9	38	33	206	1	1	3
Francie	29	15	42	26	8	29	42	18	209	2	0	3
Holandsko	25	25	37	36	27	16	17	36	219	0	3	1
Izrael	42	32	25	31	16	29	—	—	175	1	0	3
Jugoslávie	26	31	42	32	23	37	35	20	246	1	2	3
Kanada	42	25	23	16	35	42	37	29	249	2	2	1
Kolumbie	14	13	13	11	1	13	14	14	93	0	0	0
Kuba	25	34	22	12	19	9	14	6	141	0	1	0
Lucembursko	42	—	—	—	—	—	—	—	42	1	0	0
Maďarsko	41	42	41	40	—	—	—	—	164	3	1	0
Mexiko	3	4	2	2	1	—	—	—	12	0	0	0
NSR	41	39	37	42	42	41	28	42	312	5	2	1
Polsko	35	18	41	36	24	28	35	42	259	2	3	1
Rakousko	42	41	41	36	37	42	21	30	290	4	2	1
Rumunsko	36	35	33	32	—	—	—	—	136	0	2	2
Řecko	24	11	13	13	15	2	12	14	104	0	0	0
SSSR	42	33	36	35	42	42	—	—	230	3	2	1
Švédsko	22	20	17	32	32	28	38	18	207	0	1	3
Tunis	14	18	—	—	—	—	—	—	32	0	0	0
USA	42	42	42	39	42	35	39	33	314	4	3	1
Velká Británie	42	38	41	36	27	37	38	42	301	3	4	1
Venezuela	6	3	9	4	14	4	23	1	64	0	0	0

uplatní v praxi, uvidíme na příští MMO, která se bude konat v Maďarsku.

Slavnostní zakončení 22. MMO a s ním spojené rozdílení cen se konalo v neděli 19. července odpoledne ve velkém sále budovy National Academy of Science ve Washingtonu. Žáci, kteří získali některou z cen, zde dostali diplomy a věcné dary (mj. kapesní kalkulačky firmy Hewlett-Packard, digitální hodinky). Program byl zpestřen kulturní vložkou (dvě klavírní sóla přednesená dvěma soutěžícími z USA) a občerstvením.

Následující společná večeře všech účastníků MMO byla již ve znamení loučení. Některé delegace odjížděly na newyorské letiště už během noci, ostatní opustily Washington v pondělí 20. července dopoledne.

Československá účast na 22. MMO byla zpočátku poznamenána nejistotou - dlouho se rozhodovalo o tom, zda a v jakém složení československá delegace na 22. MMO pojede, a konečné rozhodnutí padlo až relativně nedlouho před odjezdem. Proto také Československo tentokráte neposlalo návrhy úloh pro soutěž.

Delegace ve složení
vedoucí delegace:
dr. František Zítek, CSc., místopředseda ÚV MO,
členové delegace:
Jozef Bednárik, 4. r. GAM, Bratislava,
Petr Couf, 3. r. GWP, Praha 2,
Igor Kříž, 2. r. GWP, Praha 2,
Jan Nekovář, 4. r. GWP, Praha 2,
Jiří Sgall, 2. r. GWP, Praha 2,
odletěla z technicko-ekonomických důvodů až ve čtvrtek 9. července, tedy o den později, než předpokládal program 22. MMO.

Žáci si sice stačili po cestě trochu odpočinout, ale vedoucí dorazil do Fredericksburgu na zasedání poroty právě v okamžiku, kdy zde končilo jednání o výběru úloh, takže už nemohl výběr nijak ovlivnit.

V dalších dnech už byla účast čs. delegace plně ve shodě s plánovaným programem. Poněvadž tentokráte nebyl v delegaci žádný zástupce vedoucího, byli žáci po celou dobu izolace poroty, tj. až do 14. července, zcela odkázáni na péči přidělené průvodkyně, jíž byla slečna Mary T. Barrettová, studující mikrobiologie na Rutgers University. Ta se o ně starala velmi pečlivě po celou dobu jejich pobytu v USA a po této stránce nedošlo k žádným komplikacím.

Výsledky, jichž čs. žáci dosáhli v soutěži, jsou obsaženy v následující tabulce:

Jméno žáka	Body získané za úlohu č.						celkem	cena
	1	2	3	4	5	6		
J. Bednárik	7	7	7	7	3	7	38	II.
P. Couf	7	7	3	7	7	7	38	II.
J. Kříž	7	7	7	6	6	7	40	II.
J. Nekovář	7	7	7	7	7	7	42	I.
P. Sgall	0	7	7	7	5	6	32	III.

Zcela bezchybný byl - podobně jako už na 21. MMO v Londýně v r. 1979 - výkon *Jana Nekováře,* který získal první cenu za plný počet bodů. Další tři žáci získali druhé ceny, když rovněž vyřešili - jen s menšími závadami - všech šest úloh soutěže. Pátý žák, který ztratil body především proto, že nevyřešil první úlohu, získal alespoň třetí cenu. Nikdo z nich se tedy nevracel bez získané ceny, což lze nepochybně hodnotit jako úspěch. Je jen škoda, že se nemohlo 22. MMO zúčastnit osm žáků - výsledky třetího kola naší MO nasvědčovaly, že bylo z čeho vybírat.

Řešení úloh 22. MMO

1. Dokážeme, že jediným bodem minimalizujícím součet

$$S = \frac{|BC|}{|PD|} + \frac{|CA|}{|PE|} + \frac{|AB|}{|PF|}$$

je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. K tomu cíli vynásobíme S výrazem

$$|BC| \,.\, |PD| + |CA| \,.\, |PE| + |AB| \,.\, |PF| \,,$$

který je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníku ABC a nezávisí tedy na volbě bodu P. Dostaneme tak výraz

$$V = |BC|^2 + |CA|^2 + |AB|^2 + |BC|.|CA|\left(\frac{|PD|}{|PE|} + \frac{|PE|}{|PD|}\right) +$$

$$+ |CA|.|AB|\left(\frac{|PE|}{|PF|} + \frac{|PF|}{|PE|}\right) + |AB| \,.\, |BC|\left(\frac{|PD|}{|PF|} + \frac{|PF|}{|PD|}\right).$$

Pro každé kladné reálné číslo x platí

$$x + \frac{1}{x} \geqq 2,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, jestliže $x = 1$; toto tvrzení snadno vyplývá ze zřejmé nerovnosti $(x - 1)^2 \geqq 0$.

Odtud již vidíme, že výraz V - a tedy také součet S, který je jeho konstantním násobkem - je minimální právě tehdy, jestliže $|PD| = |PE| = |PF|$, tj. jestliže bod P je stejně vzdálen od všech tří stran trojúhelníku ABC, tj. je-li P středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

2. Počet všech r-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je ovšem $\binom{n}{r}$. Pro $k = 1, 2, \ldots, n - r + 1$ určíme počet těch r-prvkových podmnožin, jejichž minimální prvek je právě číslo k. Tento počet je roven počtu způsobů, jimiž lze k minimálnímu prvku k vybrat zbývajících $r - 1$ prvků z množiny $\{k + 1, k + 2, \ldots, n\}$, a je tedy dán číslem $\binom{n-k}{r-1}$. Pro $F(n, r)$ odtud dostáváme vyjádření

$$F(n, r) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1}.$$

Dále použijeme vytvořující funkce, resp. binomickou větu. Platí

$$x^{r-1}(1 - x)^{-r} = x^{r-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-1)^k x^k =$$

$$= x^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{r-1} x^k = \sum_{m=r-1}^{\infty} \binom{m}{r-1} x^m,$$

$$x(1-x)^{-2} = x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-1)^k x^k =$$

$$= x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{1} x^k = \sum_{m=1}^{\infty} m x^m ,$$

$$x^r (1-x)^{-r-2} = x^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r-2}{k} (-1)^k x^k =$$

$$= x^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k+1}{r+1} x^k = \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m+1}{r+1} x^m .$$

Poněvadž pak $x^{r-1}(1-x)^{-r}\, x\,(1-x)^{-2} = x^r\,(1-x)^{-r-2}$, dostáváme porovnáním koeficientů při stejných mocninách x^m podle vzorce pro násobení řad rovnost

$$\sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1} = \binom{n+1}{r+1},$$

a tedy

$$F(n,r) = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1},$$

což jsme měli dokázat.

3. Označme M množinu všech uspořádaných dvojic (n, m) přirozených čísel vyhovujících vztahu

$$(n^2 - nm - m^2)^2 = 1. \tag{1}$$

Nejprve si dokážeme čtyři pomocná tvrzení A - D:

A. Pro $(n, m) \in M$ platí $n \geqq m$.

Skutečně, kdyby bylo $n < m$, bylo by

$$n^2 - nm - m^2 < n^2 - m^2 < 0,$$
$$\text{tj. } n^2 - nm - m^2 \leqq -2,$$
$$\text{a tedy } (n^2 - nm - m^2)^2 \geqq 4$$

ve sporu s (1).

B. Pro $(m, m) \in M$ platí $m = 1$.

Z (1) totiž plyne

$$1 = (m^2 - m^2 - m^2)^2 = m^4\,,$$

ale m je přirozené číslo, a proto $m = 1$.

C. Jestliže $(n, m) \in M$, pak také $(n + m, n) \in M$.

Skutečně platí

$$[(n + m)^2 - n(n + m) - n^2]^2 = (n^2 + 2nm + m^2 - n^2 - nm - n^2)^2 = (-n^2 + nm + m^2)^2 = (n^2 - nm - m^2)^2 = 1.$$

D. Jestliže $(n, m) \in M$, $n > 1$, potom také $(m, n - m) \in M$. Skutečně, z nerovnosti $n > 1$ vyplývá podle B a A nerovnost $n > m$, takže $n - m$ je přirozené číslo. Avšak $[m^2 - m(n - m) - (n - m)^2]^2 = (m^2 - nm + m^2 - n^2 + 2nm - m^2)^2 = (-n^2 + nm + m^2)^2 = (n^2 - nm - m^2)^2 = 1$, a tedy $(m, n - m) \in M$.

Budiž nyní $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost tzv. Fibonacciových čísel, definovaná vztahy

$$F_1 = F_2 = 1, \tag{2}$$

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Dokážeme nyní toto tvrzení:

Jestliže $(n, m) \in M$, potom existuje přirozené k takové, že $m = F_k$ a $n = F_{k+1}$.

Důkaz provedeme indukcí. Tvrzení zřejmě platí pro $n = 1$. Podle A je totiž také $m = 1$, a tedy podle (2) $m = F_1$, $n = F_2$, tzn. $k = 1$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $n \leqq N$, kde N je přirozené číslo; dokážeme, že platí i pro všechna $n \leqq N + 1$. Stačí ovšem vyšetřit případ $n = N + 1 > 1$. Podle A a B je pak $n > m$, tj. $m \leqq N$; zároveň podle D je $(m, n - m) \in M$. Podle indukčního předpokladu existuje přirozené k takové, že $n - m = F_k$, $m = F_{k+1}$. Podle (3) však potom

$$n = m + n - m = F_k + F_{k+1} = F_{k+2}.$$

Abychom maximalizovali součet $m^2 + n^2$, musíme vzít maximální k takové, že platí $m = F_k \leqq 1981$, $n = F_{k+1} \leqq 1981$. Přímým výpočtem členů posloupnosti $\{F_k\}$ zjistíme, že $F_{16} = 987$, $F_{17} = 1597$, $F_{18} = 2584$, takže musíme zvolit $m = 987$, $n = 1597$ a hledané maximum bude $987^2 + 1597^2 = 3\,524\,578$.

4. Nechť posloupnost přirozených čísel

$$a - n + 1, a - n + 2, \ldots, a - 1, a \tag{1}$$

vyhovuje podmínkám úlohy, tj. číslo a je dělitelem největšího společného násobku čísel $a - n + 1$, $a - n + 2, \ldots, a - 1$. Vyjádříme-li číslo a ve tvaru

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

kde p_j $(j = 1, \ldots, r)$ jsou navzájem různá prvočísla $p_1 < < p_2 < \ldots < p_r$ a $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, znamená daná podmínka, že pro každé j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ musí existovat m $(m = 1, 2, \ldots, n - 1)$ takové, že $p_j^{\alpha_j}$ dělí číslo $a - m$. Poněvadž $p_j^{\alpha_j}$ dělí číslo a, znamená to, že je nutně $p_j^{\alpha_j} \leqq n - 1$ pro všechna j $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

Kdyby bylo $r = 1$, tj. $a = p_1^{\alpha_1}$, muselo by být $n \leqq a = = p_1^{\alpha_1} \leqq n - 1$, což je spor, je tedy $r \geqq 2$. Musí tedy existovat alespoň dvě různá prvočísla menší než n, tj. musí být $n \geqq 4$.

Nyní dokážeme, že pro každé $n \geqq 4$ existuje posloupnost (1) vyhovující podmínkám úlohy a že pro $n \geqq 5$ existují vždy alespoň dvě takové posloupnosti.

Je-li $n = 4$, musí být $p_1^{\alpha_1} \leqq 3$, $p_2^{\alpha_2} \leqq 3$, tedy nutně $r = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, takže jedinou posloupností daných vlastností je čtyřčlenná posloupnost

$$3, 4, 5, 6, \tag{2}$$

která skutečně všem podmínkám úlohy vyhovuje.

Existují dvě pětičlenné posloupnosti

$$2, 3, 4, 5, 6 \tag{3}$$

a

$$8, 9, 10, 11, 12 \tag{4}$$

vyhovující podmínkám úlohy.

Je-li $n \geqq 6$, označme r, s, t přirozená čísla splňující nerovnosti

$$2^r \leqq n - 1 < 2^{r+1},$$

$$3^s \leqq n - 1 < 3^{s+1},$$

$$5^t \leqq n - 1 < 5^{t+1}.$$

V posloupnosti (1) lze pak volit buď $a = 2^r.3^s$, anebo $a = 2^r.5^t$. Skutečně je pak

$$n - 1 < 2^{r+1} < 2^r.3 \leqq 2^r.3^s = a,$$

resp.

$$n - 1 < 2^{r+1} < 2^r.5 \leqq 2^r.5^t = a,$$

takže n-členné posloupnosti (1) obsahují vesměs přirozená čísla a vyhovují podmínkám úlohy.

5. Každá z daných tří kružnic (navzájem různých) se dotýká jiné dvojice stran trojúhelníku ABC. Označme S_A, S_B, S_C středy těchto kružnic, a to tak, aby S_B ležel na ose úhlu ABC, S_C na ose úhlu BCA a S_A na ose úhlu BAC. Potom $S_BS_C \parallel BC$, $S_AS_C \parallel AC$, $S_AS_B \parallel AB$. Osy úhlů trojúhelníku ABC jsou zároveň osami úhlů trojúhelníku $S_AS_BS_C$ a oba trojúhelníky, ABC a $S_AS_BS_C$, mají týž střed kružnice vepsané, označme ho S. Trojúhelník ABC je obrazem trojúhelníku $S_AS_BS_C$ při homotetii o středu S a koeficientu $\varkappa = \dfrac{|SA|}{|SS_A|} = \dfrac{|SB|}{|SS_B|} = \dfrac{|SC|}{|SS_C|}$.

Bod O je stejně vzdálen od všech tří bodů S_A, S_B, S_C, je to tedy střed kružnice opsané trojúhelníku $S_AS_BS_C$. Jeho obrazem při homotetii $(S, \varkappa)$ je ovšem střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a je jen přirozené, že střed homotetie S, bod O a jeho obraz leží na jedné přímce.

6. Pro $x = 0$ plyne z (3) a (1) rovnost

$$f(1, y + 1) = f(0, f(1, y)) = f(1, y) + 1 \tag{4}$$

pro každé $y \geqq 0$. Avšak podle (2) a (1) je

$$f(1, 0) = f(0, 1) = 2. \tag{5}$$

Z (5) a (4) pak plyne

$$f(1, y) = y + 2 \tag{6}$$

pro všechna $y \geqq 0$.

Pro $x = 1$ plyne z (3) a (6) rovnost

$$f(2, y + 1) = f(1, f(2, y)) = f(2, y) + 2. \tag{7}$$

Podle (2) a (6) je pak

$$f(2, 0) = f(1, 1) = 3. \tag{8}$$

Ze (7) a (8) dostáváme tak

$$f(2, y) = 2y + 3 \tag{9}$$

pro všechna $y \geqq 0$.

Pro $x = 2$ plyne z (3) a (9) rovnost

$$f(3, y + 1) = f(2, f(3, y)) = 2f(3, y) + 3, \tag{10}$$

kdežto (2) a (9) dává

$$f(3, 0) = f(2, 1) = 5 = 8 - 3. \tag{11}$$

Z (10) a (11) pak plyne

$$f(3, y) = 2^{y+3} - 3 \tag{12}$$

pro všechna $y \geqq 0$.

Položme nyní $g(y) = f(4, y) + 3$ pro $y = 0, 1, 2, \ldots$ Platí

$$g(0) = 3 + f(4, 0) = 3 + f(3, 1) = 16. \tag{13}$$

Pro $x = 3$ pak (3) a (12) dává

$$g(y + 1) = f(4, y + 1) + 3 = f(3, f(4, y)) + 3 =$$
$$= 2^{f(4,y)+3} - 3 + 3 = 2^{g(y)},$$

takže v důsledku (13) bude

$$g(y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \quad \text{(celkem } y + 3 \text{ dvojek)},$$

a tedy

$$f(4, 1981) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3 \text{ (1984 dvojek)}.$$