31. ročník matematické olympiády

Kategorie Z

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor): 31. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1981-1982. 23. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. pp. 42–58.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404755

Kategorie Z

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

Z - I - 1

Tomáš se Sašou hrají matematickou hru: Tomáš začíná - zvolí si jedno z čísel 1, 2, ..., 10 a napíše je na papír. Pak si libovolné z těchto čísel zvolí Saša a připíše je pod Tomášovo. Na řadě je pak opět Tomáš, a tak střídavě připisují čísla, až je jich na papíru šest. Je-li jejich součet druhou mocninou přirozeného čísla, vyhrává Saša, není-li, vyhrává Tomáš. (Čísla se mohou opakovat.)

a) Poraďte Tomášovi, jak má hrát.

b) Tomáš začal číslem 1. Jak má Saša odpovědět?

Řešení. Předpokládejme, že hra již proběhla. Označme S_6 součet všech šesti zapsaných čísel. Pak je S_6 alespoň 6 (kdyby oba hráči volili stále 1, je $S_6 = 6$, jinak je S_6 větší než 6). Zároveň je $S_6 \leqq 60$, protože každý hráč může zvolit nejvýše číslo 10 a třikrát volí Tomáš, třikrát volí Saša. Saša vyhrává v těch případech, kdy se S_6 rovná některému z čísel 9, 16, 25, 36, 49, zbývající možné součty jsou vítězné pro Tomáše.

a) Je-li součet S_5 prvních pěti zapsaných čísel menší než

25, může ho Saša doplnit posledním číslem na druhou mocninu a vyhrát. Tomáš musí proto hrát tak, aby bylo $S_5 \geqq 25$ a přitom takové, aby je Saša nemohla doplnit na číslo 36 nebo 49. Tomáš se tedy bude snažit, aby se S_5 rovnalo některému z čísel 25, 36, 37, 38, 49, 50. Sám však může připsat nejvýše $3 \times 10 = 30$, a proto nemůže zajistit, aby bylo $S_5 \geqq 36$. Musí proto hrát tak, aby bylo $S_5 = 25$. Toho může dosáhnout jen tehdy, je-li $15 \leqq S_4 \leqq 24$. Bude proto usilovat, aby $S_3 = 14$. K tomu potřebuje, aby $4 \leqq S_2 \leqq 13$. Na začátku tedy zvolí $S_1 = 3$. Pak je $4 \leqq S_2 \leqq 13$ a Tomáš zvolí další číslo tak, aby $S_3 = 14$. Součet S_4 se pak rovná některému z čísel 15, 16, ..., 24, podle toho, zda Saša volila číslo 1, 2, ... nebo 10. Tomáš pak zvolí číslo 10, 9, ... nebo 1, aby nezávisle na tom, jak volila Saša, byl součet prvních pěti čísel roven 25. Pak je $26 \leqq S_6 \leqq 35$, a tedy při žádné Sašině volbě posledního čísla není součet S_6 druhou mocninou přirozeného čísla. Vítězem je Tomáš.

b) Začne-li Tomáš číslem 1, připíše Saša číslo 2, aby byl součet prvních dvou čísel 3, a dál hraje Saša tak, jak hrál Tomáš v předcházejícím případě: po Tomášově volbě je součet prvních tří čísel alespoň 4 a nejvýše 13. Saša volí čtvrté číslo tak, aby se součet prvních čtyř čísel rovnal 14. Tomáš může volit 1, 2, ... nebo 10 a zvýšit celkový součet napsaných čísel na 15, 16, ... nebo 24. Saša volí šesté číslo tak, aby výsledný součet byl 25.

Oba postupy jsou znázorněny v této tabulce:

	Tomáš	Saša	Tomáš
a	$S_1 = 3$	$4 \leqq S_2 \leqq 13$	$S_3 = 14$
b	$S_1 = 1$	$S_2 = 3$	$4 \leqq S_3 \leqq 13$

	Saša	Tomáš	Saša
a	$15 \leqq S_4 \leqq 24$	$S_5 = 25$	$26 \leqq S_6 \leqq 35$
b	$S_4 = 14$	$15 \leqq S_5 \leqq 24$	$S_6 = 25$

Z - I - 2

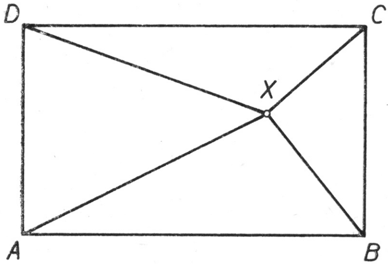
Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí: Součin $(n + 1)(n + 3)(n + 5)$ není dělitelný žádným prvočíslem větším než 3.

Řešení. Vyhovuje-li číslo n podmínce úlohy, pak žádné z čísel $n + 1$, $n + 3$, $n + 5$ není dělitelné žádným prvočíslem větším než 3. Z prvočísel dělí tudíž číslo $n + 1$ nejvýše čísla 2 a 3, totéž platí pro čísla $n + 3$, $n + 5$. Z čísel $n + 1$, $n + 3$, $n + 5$ je však třemi dělitelné právě jedno, zbývající dvě pak musí být mocninou čísla 2. Přitom se tato dvě čísla liší buď o 2, nebo o 4. Mocniny čísla 2 jsou 2, 4, 8, 16, 32, ..., z nich se o 2 liší pouze čísla 2, 4, o 4 se liší pouze čísla 4, 8. V prvním případě se trojice $n + 1$, $n + 3$, $n + 5$ rovná trojici 2, 4, 6, v druhém případě se jedná o trojici 4, 6, 8. Je proto v prvním případě $n = 1$, v druhém $n = 3$, což jsou všechna řešení úlohy.

Z - I - 3

Je dán obdélník $ABCD$ a uvnitř něho bod X. Úsečky, které spojují bod X s vrcholy A, B, C, D, rozdělují obdélník na čtyři trojúhelníky. Obsahy tří z nich jsou 31, 54 a 90. Určete obsah obdélníku $ABCD$.

Řešení. Součet obsahů trojúhelníků ABX a CDX (obr. 1) se rovná polovině obsahu obdélníku $ABCD$, protože oba trojúhelníky mají stejně velké základny AB, CD a součet jejich výšek k těmto základnám se rovná velikosti druhé strany AD obdélníku $ABCD$. Stejně tak se rovná polovině obsahu obdélníku $ABCD$ také součet obsahů trojúhelníků ADX a BCX. Označme P obsah čtvrtého z trojúhelníků, na které



Obr. 1

je obdélník rozdělen, a Q obsah obdélníku $ABCD$. Víme, že platí

$$Q = 2\,(31 + 54) = 2\,(90 + P) \text{ nebo } Q = 2\,(31 + 90) =$$

$$= 2\,(54 + P) \text{ nebo } Q = 2\,(54 + 90) = 2\,(31 + P).$$

V prvním případě by bylo $Q = 170$, ale $P = -5$. Tento případ nemůže nastat, protože obsahem trojúhelníku nemůže být číslo záporné. Obsah obdélníku $ABCD$ se proto rovná buď číslu $2\,(31 + 90) = 242$ a $P = 67$, nebo je $Q = 2(54 + 90) = 288$, $P = 113$. Oba tyto případy mohou nastat, úloha má tedy dvě řešení: 242 a 288.

Z - I - 4

Rozhodněte, zda přirozené číslo

1101001000100001000000....,

které má tisíc číslic, je dělitelné číslem 72.

Řešení. Dané přirozené číslo označme A. Číslo A je dělitelné číslem 72 právě tehdy, jestliže je dělitelné číslem 8 a zároveň číslem 9. Víme, že libovolné přirozené číslo je dělitelné číslem 9 právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný devíti. Číslo je dělitelné osmi, jestliže je dělitelné osmi jeho poslední trojčíslí.

Všimněme si nyní podrobněji, jak dostaneme zápis čísla A v desítkové soustavě: Nejdříve napíšeme číslici 1, napravo od ní dvojčíslí 10, připíšeme zprava trojčíslí 100, čtyřčíslí

1 000 atd. Pokračujeme tak dlouho, až dostaneme číslo, které má aspoň 1 000 číslic. Řekněme, že jsme naposled připsali jedničku a n nul. Dostali jsme číslo

$$1\,|\,1\;0\,|\,1\;0\;0\,|\,1\;0\;0\;0\,|\,1\;.\;.\;.\,|\,1\;\underbrace{0\;0\ldots\;0}_{n}\,|,$$

které má $1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1)$ číslic a končí n nulami. Vzpomeneme si, jak prý slavný německý matematik K. F. Gauss sečetl rychle již jako žák základní školy všechna přirozená čísla od 1 do 100. Sečetl nejprve první číslo s posledním $(1 + 100)$, pak druhé s předposledním $(2 + 99)$, atd. Celkem dostal 50 součtů, každý z nich byl 101, celkem tedy $50 . 101 = 5\,050$. Tento princip použijeme i my a dostaneme

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

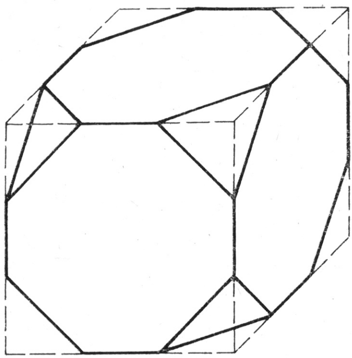
Hledáme nyní nejmenší přirozené číslo n, pro které je předcházející výraz aspoň 1000. Zkusmo zjistíme, že $n = 44$. Obdržené číslo má $\dfrac{45 . 46}{2} = 1\,035$ míst, končí 44 nulami a obsahuje 45 jedniček. Z něho dostaneme číslo A škrtnutím 35 nul na konci. Číslo A tedy končí devíti nulami a v jeho zápisu v desítkové soustavě je kromě nul 45 jedniček a žádné další cifry. Číslo A je proto dělitelné tisícem, a tedy též osmi, a protože jeho ciferný součet je 45, je dělitelné i devíti. Proto je číslo A dělitelné číslem 72.

Číslo $n = 44$ jsme mohli najít i bez užití výše uvedeného vzorce. Je totiž $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$, a proto $11 + 12 + \ldots + 20 = 155$, $21 + 22 + \ldots + 30 = 255$ a $31 + 32 + \ldots + 40 = 355$, tedy $1 + 2 + \ldots + 40 = 820$. K číslu 820 přičítáme postupně čísla 41, 42, ..., až dostaneme číslo větší než 999. To nastane při čísle 45, tudíž $n + 1 = 45$, $n = 44$.

Z - I - 5

Každý vrchol krychle s hranou dlouhou 6 cm odřízneme rovinou, která protne hrany vycházející z tohoto vrcholu 2 cm od vrcholu. Určete počet vrcholů, hran, stěn, povrch a objem mnohostěnu, který tak vznikne.

Řešení. Krychle má 8 vrcholů, po odříznutí dostaneme místo každého vrcholu krychle tři vrcholy nového mnohostěnu (obr. 2), který má tudíž 24 vrcholů. Krychle má 12 hran,



Obr. 2

část každé hrany je i hranou nového mnohostěnu. Kromě nich má tento mnohostěn při každém odříznutém vrcholu krychle další tři hrany, celkem má vzniklý mnohostěn 36 hran. Krychle má 6 stěn, každá rovina řezu určuje jednu další stěnu mnohostěnu, který má celkem 14 stěn. Každá z nich je buď pravidelným osmiúhelníkem - takových stěn je 6 - nebo rovnostranným trojúhelníkem - takových stěn je 8. Osmiúhelník vznikne ze stěny krychle odříznutím čtyř rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků o odvěsnách délky 2 cm. Trojúhelníková stěna má podle Pythagorovy věty strany dlouhé $2\sqrt{2}$ cm. Obsah osmiúhelníku je $6^2 - 4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 28$ cm^2, obsah trojúhelníkové stěny je $\frac{(2\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm^2.

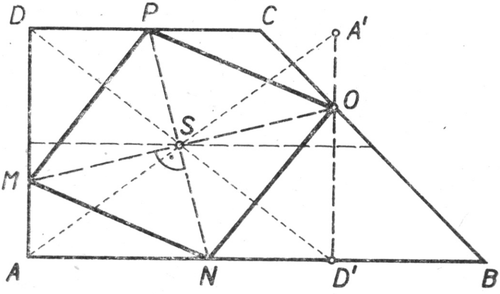
Povrch vzniklého mnohostěnu je $S = 6 \cdot 28 + 8 \cdot 2\sqrt{3} = 168 + 16\sqrt{3}$ cm^2. Objem tohoto mnohostěnu vypočteme, když od objemu krychle odečteme objem osmi odříznutých jehlanů. Podstavou každého takového jehlanu je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou 2 a výška jehlanu je rovněž 2 (vše v cm). Objem jehlanu je tedy $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$, objem mnohostěnu je $6^3 - 8 \cdot \frac{4}{3} = 205\frac{1}{3}$ cm^3.

Z - I - 6

Je dán lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholech A, D a se stranami $|AB| = 6$, $|AD| = |CD| = 3$. Na jeho střední příčce je dán bod S ve vzdálenosti 2 od strany AD.

Sestrojte kosočtverec, který má střed v bodě S a uvnitř každé strany lichoběžníku leží jeden jeho vrchol.

Řešení. Při konstrukci kosočtverce využijeme jeho vlastností, a sice to, že úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé a vzájemně se půlí. Dále využijeme souměrnost kosočtverce podle jeho středu. Označíme-li M vrchol kosočtverce na straně AD lichoběžníku (obr. 3), leží protější vrchol O nejen na straně BC lichoběžníku, nýbrž i na úsečce $A'D'$, kde A', D' jsou body souměrně sdružené k bodům A, D podle středu S. Sestrojíme tedy nejdříve průsečík O úseček BC, $A'D'$ a k němu vrchol M tak, aby byly body O, M souměrně sdružené podle středu S. Zbývající vrcholy N, P kosočtverce leží na úhlopříčce, která prochází bodem S a je kolmá na úhlopříčku MO. Najdeme je jako průsečíky této kolmice se stranami AB a CD lichoběžníku.

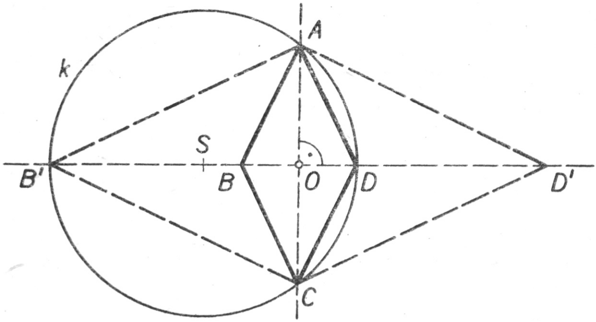


Obr. 3

Z - II - 1

Je dána kružnice k a v její vnitřní oblasti bod O různý od středu kružnice k. Sestrojte kosočtverec se středem v bodě O tak, aby tři jeho vrcholy ležely na kružnici k. Kolik má úloha řešení?

Řešení. Protože tři vrcholy hledaného kosočtverce mají ležet na kružnici k, musí být jedna jeho úhlopříčka tětivou kružnice k. Protože bod O je středem této tětivy, je tato tětiva kolmá na ten průměr kružnice k, který prochází bodem O. Bodem O vedeme tedy kolmici k spojnici bodu O se středem kružnice k; průsečíky této kolmice s kružnicí k jsou dva vrcholy hledaného kosočtverce, označme je A, C. Zbývající dva vrcholy kosočtverce leží na druhé úhlopříčce, tedy na spojnici bodu O se středem kružnice k (obr. 4). Jeden z nich leží kromě toho také na kružnici k. Úloha má dvě řešení, jsou to kosočtverce $ABCD$ a $AB'CD'$.



Obr. 4

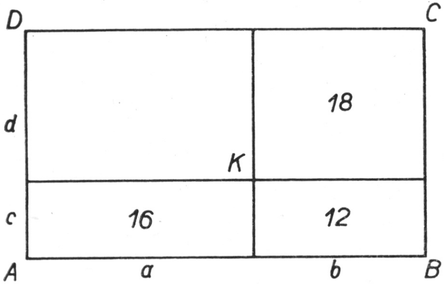
Z - II - 2

Součet podílu a součinu dvou přirozených čísel p, q je 30. Určete všechny dvojice čísel této vlastnosti.

Řešení. Podle znění úlohy má platit $\frac{p}{q} + pq = 30$. Proto je číslo p násobkem čísla q, a tudíž $p \geqq q$. Kdyby bylo $q \geqq 6$, bylo by i $p \geqq 6$, tedy $pq \geqq 36$, což nemůže platit, protože $pq = 30 - \frac{p}{q}$. Je tedy $q \leqq 5$. Zkusíme proto postupně $q = 1, 2, 3, 4, 5$ a z výše uvedené rovnice vypočteme p. V posledních dvou případech není číslo p přirozené, úloha má jen tři řešení: $q = 1$, $p = 15$, dále $q = 2$, $p = 12$ a třetí řešení je $q = 3$, $p = 9$.

Z - II - 3

Vnitřním bodem K obdélníku $ABCD$ vedeme přímky rovnoběžné s jeho stranami. Daný obdélník tím rozdělíme na čtyři obdélníky. Obsahy tří z nich jsou 16, 12 a 18 (obr. 5).



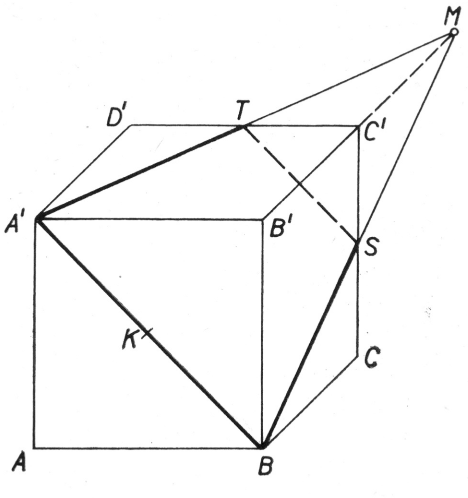
Obr. 5

Určete obsah čtvrtého obdélníku a obsah daného obdélníku *ABCD*.

Řešení. Délky stran obdélníků označíme podle obr. 5. Platí tedy $ac = 16$, $bc = 12$, $bd = 18$ a obsah čtvrtého obdélníku je ad. Protože je $ad : ac = bd : bc = 18 : 12 = 3 : 2$, je $ad = ac \cdot \frac{3}{2} = 24$. Obsah čtvrtého obdélníku je 24, obsah obdélníku *ABCD* je 70.

Z - II - 4

Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 10. Na přímce $B'C'$ zvolíme bod M tak, aby bod C' byl středem



Obr. 6

úsečky $B'M$. Řezem dané krychle rovinou $A'BM$ je rovnoramenný lichoběžník. Vypočítejte jeho obsah.

Řešení. Přímka BM protíná úsečku CC' v jejím středu S, přímka $A'M$ protíná úsečku $C'D'$ v jejím středu T (obr. 6). Máme vypočítat obsah lichoběžníku $A'BST$. Úsečka ST je střední příčka trojúhelníku $A'BM$, výška lichoběžníku se rovná jedné polovině výšky tohoto trojúhelníku. Je $|A'B| = 10\sqrt{2}$, $|ST| = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Dále je $|KM|^2 = |KB'|^2 + |B'M|^2 = (5\sqrt{2})^2 + 20^2 = 450$, $|KM| = 15\sqrt{2}$. Obsah lichoběžníku je $\frac{10\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2} = \frac{225}{2} = 112{,}5$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA V ČSR

(Úlohy připravil KV MO Severomoravského kraje.)

Z - III - 1

Najděte všechna přirozená čísla m, n, p, jejichž součet je 42, přičemž jedno z nich se rovná druhé mocnině součtu obou zbývajících.

Řešení. Úloha má tři řešení, jsou to trojice (1, 5, 36), (2, 4, 36) a (3, 3, 36).

Z - III - 2

Dokažte, že pro všechna reálná čísla x, y platí nerovnost

$$(x + y + 1)^2 + (x + y)^2 \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení. Nerovnost upravíme na ekvivalentní tvar $(2x + 2y + 1)^2 \geqq 0$. Rovnost platí právě tehdy, když je $x + y = -\frac{1}{2}$.

Z - III - 3

Je dán čtverec $ABCD$ a jeho vnitřní bod K, který není jeho středem. Sestrojte kosočtverec $XYUV$ tak, aby bod K byl jeho středem a aby alespoň tři vrcholy kosočtverce ležely na stranách čtverce $ABCD$. Kolik má úloha řešení?

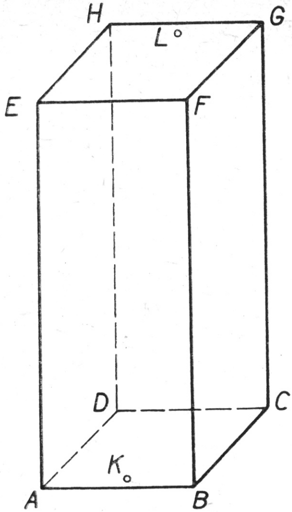
Řešení. Postup je obdobný jako u úlohy Z-II-1. Úloha má vždy aspoň dvě řešení, nekonečně mnoho řešení má tehdy, když bod K leží na střední příčce čtverce $ABCD$.

Z - III - 4

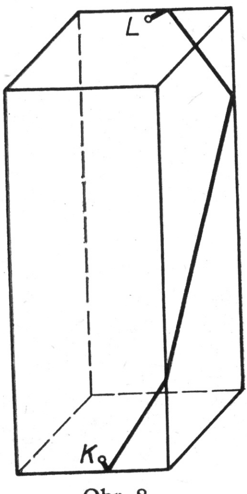
Je dán kvádr $ABCDEFGH$ se čtvercovou podstavou $ABCD$ o délce hrany $|AB| = 9$ cm a výšce $|AE| = 24$ cm.

a) Vypočtěte délku nejkratší spojnice bodů K, L jdoucí po stěnách kvádru. Body K, L jsou body podstav, bod K leží na ose hrany AB ve vzdálenosti 1 cm od hrany AB, bod L leží na ose hrany GH ve vzdálenosti 1 cm od hrany GH.

b) Na obraze kvádru (obr. 7) náčrtněte nejkratší spojnici bodů K, L.



Obr. 7



Obr. 8

Řešení. Úlohu řešíme nejlépe pomocí sítě kvádru, délka nejkratší spojnice bodů K, L je $\sqrt{1000} \doteq 31{,}62$. Nejkratší spojnice je načrtnuta na obr. 8, mohli jsme ovšem vzít i tu, která je s načrtnutou souměrně sdružená podle roviny souměrnosti úsečky AB.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA V SSR

(Úlohy připravil KV MO Západoslovenského kraje.)

Z - III - 1

Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré platí, že počet číslic potrebných na zápis všetkých prirodzených čísel 1 až n je väčší ako trojnásobok čísla n.

Výsledok je $n = 1108$.

Z - III - 2

Je daný rovnoramenný lichobežník so základňami AB, CD. Zostrojíme jeho uhlopriečky a ich priesečník označíme S. Vypočítajte obsah lichobežníka, ak viete, že obsah trojuholníka DSC je 3 a obsah trojuholníka ASD je 6.

Riešenie. Trojuholníky DSC a DAC majú rovnaké základne, teda ich výšky sú v pomere 1 : 3. Výška trojúholníka DAC je výškou lichobežníka. Obsah lichobežníka je 27.

Z - III - 3

Koľkými spôsobmi môžeme celé čísla od 0 až po 20 dosadiť namiesto premenných a, b v nerovnosti $a < b$ tak, aby bola splnená?

Riešenie. Ak $a = 0$, tak b môže nadobúdať hodnoty od 1 až po 20, ak $a = 1$, tak miesto b môžeme dosadiť celé čísla 2 až 20, atď. Spolu je to $20 + 19 + \ldots + 2 + 1 = 210$ prípadov.

Z - III - 4

Na kocke $ABCDA'B'C'D'$ s hranou dĺžky 10 sú umiestnené body M, N, P nasledovne: Bod M je stred úsečky AB, bod N je stred úsečky BC, bod P je stred úsečky CC'. Nájdite veľkosť obsahu rezu kocky rovinou určenou bodmi M, N, P.

Riešenie. Rovina určená bodmi M, N, P pretne kocku v pravidelnom šesťuholníku, dĺžku strany šesťuholníka určíme pomocou Pytagorovej vety, je $|MN| = 5\sqrt{2}$. Obsah šesťuholníka môžeme vypočítať ako šesťnásobok obsahu rovnostranného trojuholníka so stranou $5\sqrt{2}$. Výsledok: $75\sqrt{3}$.