31. ročník matematické olympiády

Kategorie B

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor): 31. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1981-1982. 23. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. pp. 79–100.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404757

Kategorie B

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

B - I - 1

Na přímce leží čtyři různé body A_1, A_2, A_3, A_4 a na přímce s ní rovnoběžné pět různých bodů B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Každou úsečku A_iB_k obarvěte jednou z barev červená, modrá tak, aby nevznikl žádný jednobarevný čtyřúhelník (tj. uzavřená lomená čára složená ze čtyř úseček stejné barvy).

Řešení. Každému obarvení úseček A_iB_k můžeme přiřadit tabulku:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	C	C	.	.	.
A_2	M	C	.	.	.
A_3	.	.	.	.	.
A_4	.	.	.	.	.

V tabulce uvedeme písmeno C nebo M podle toho, je-li obarvení odpovídající úsečky červené nebo modré. Podmínka o čtyřúhelníku znamená, že v tabulce se nesmějí vyskytovat stejná písmena v rohových polích obdélníku.

Řešení lze najít zkoušením. To si však usnadníme ověřením tvrzení: V žádném sloupci tabulky řešení nesmějí být tři stejná písmena:

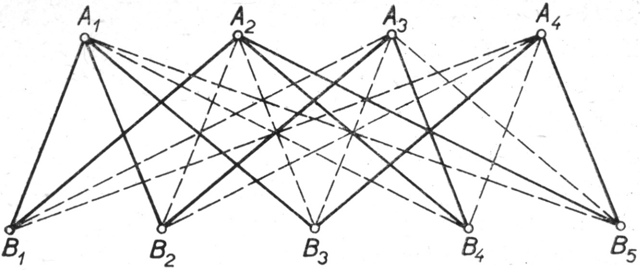
	C		C	M	
např.	C	lze doplňovat v řádcích buď na	C	M	a dále
	C		C	M	

	C	C	M	M	
nelze, nebo	C	M	C	M	a dále nelze.
	C	M	M	C	

V každém sloupci tabulky řešení jsou tedy dvě písmena C a dvě písmena M, a to pokaždé jinak. Takových různých sloupců je šest:

C	C	C	M	M	M
C	M	M	C	C	M
M	C	M	C	M	C
M	M	C	M	C	C

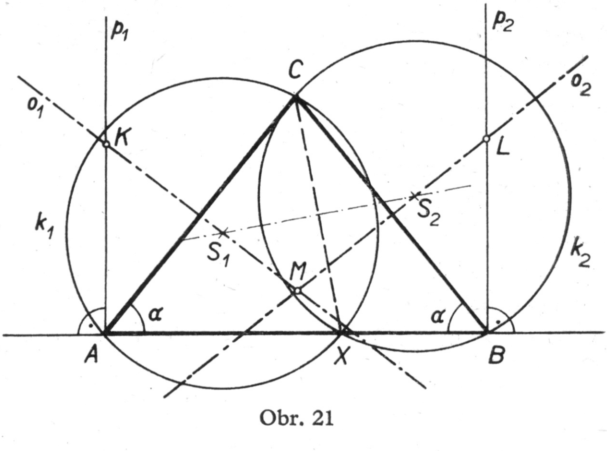
a (každé!) řešení dostaneme výběrem pěti z nich v některém pořadí. Např. prvním pěti sloupcům odpovídá obr. 20 (plná čára značí modrou, čárkovaná červenou barvu).



Obr. 20

B - I - 2

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Zvolíme libovolný bod X přímky AB různý od bodů A, B. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AXC a BXC mají stejně velké poloměry, a zjistěte, co je množinou středů všech těchto kružnic, probíhá-li bod X přímku AB.



Obr. 21

Řešení (obr. 21). Nechť $k_1(S_1, r_1)$ je kružnice opsaná trojúhelníku AXC, $k_2(S_2, r_2)$ kružnice opsaná trojúhelníku BXC. Obě kružnice mají společnou tětivu CX. Rozlišme tyto případy:

a) X leží uvnitř úsečky AB. Pak obvodový úhel CAX kružnice k_1 nad tětivou CX je shodný s obvodovým úhlem CBX kružnice k_2, takže obě kružnice mají nad společnou tětivou CX shodné oblouky, a jsou tedy shodné.

b) X neleží uvnitř úsečky AB; nechť např. leží uvnitř polopřímky opačné k polopřímce BA (druhý případ je obdobný). Pak obvodové úhly nad menším z oblouků CX kružnice k_1 mají velikost $\alpha = |\sphericalangle XAC|$, obvodové úhly nad menším z oblouků CX kružnice k_2 velikost $\pi - |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$. Kružnice k_1 a k_2 jsou proto opět shodné.

Tím jsme dokázali rovnost poloměrů, $r_1 = r_2$, obou kružnic. Abychom našli množinu $\mathbf{U}$ všech středů těchto kružnic, označme (obr. 21) o_1 osu úsečky AC, o_2 osu úsečky BC, p_1, p_2 kolmice v bodech A, B na přímku AB. Dále nechť $o_1 \cap p_1 = \{K\}$, $o_2 \cap p_2 = \{L\}$, $o_1 \cap o_2 = \{M\}$.

Dokážeme, že množina $\mathbf{U}$ je rovna množině $\mathbf{V} = (o_1 \cup o_2) - \{K, L, M\}$.

Každý z bodů S_1 je průsečíkem přímky o_1 s osou úsečky AX; ta nemůže procházet bodem A, a tedy ani bodem K, neboť $X \neq A$, a rovněž nemůže procházet středem M kružnice opsané $\triangle ABC$, neboť $X \neq B$. Platí tedy $S_1 \in o_1 - \{K, M\}$. Obdobně $S_2 \in o_2 - \{L, M\}$, takže $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$.

Je-li obráceně S libovolný bod množiny $\mathbf{V}$, pak nastane právě jedna z možností:

(I) $$S \in o_1 - \{K, M\},$$

(II) $$S \in o_2 - \{L, M\}.$$

V případě (I) kružnice $k(S, r)$ pro $r = |SA| = |SC|$ protne přímku AB v bodě $X \neq A$, neboť $S \neq K$. Podmínka $S \neq M$ zaručuje, že $X \neq B$, takže S je střed kružnice opsané některému z trojúhelníků AXC. Obdobně v případě (II) zjistíme, že S je středem kružnice opsané některému z trojúhelníků BXC. Proto $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

B - I - 3

Nechť α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, d velikost jeho nejdelší strany a P jeho obsah. Pak platí

$$d^2 < 2P\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right);$$

dokažte.

Řešení. Nechť a, b, c jsou velikosti stran proti úhlům α, β, γ. Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že $a \leqq b \leqq c$, takže $d = c$.

Podle známého vzorce je

$$P = \tfrac{1}{2}\, bc \sin\alpha,$$

tj.

$$\frac{2P}{\sin\alpha} = bc;$$

obdobně

$$\frac{2P}{\sin\beta} = ac.$$

Proto

$$2P\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right) > 2P\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right) =$$

$$= c(b+a) > c^2 = d^2.$$

Poznámka. Dokázali jsme při tom silnější tvrzení: Je-li c nejdelší strana $\triangle ABC$ a P jeho obsah, pak

$$c^2 < 2P\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right).$$

B - I - 4

Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc

$$(1)\quad x^2+y^2+z^2+2xy+6xz+6yz+6x+6y+14z+$$
$$+5=0,$$

$$(2)\quad z^2+4xy-2xz-2yz+x+7y-4z+1=0,$$

$$(3)\quad 2x^2+2y^2+z^2+2xz+2yz+8x+2y+5z+6=0.$$

Řešení. (I) Sečteme (1), (2) a (3) a dělíme třemi; dostaneme

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+5x+5y+5z+4=0$$

neboli

$$(x + y + z)^2 + 5(x + y + z) + 4 = 0,$$

tj.

$$(x + y + z + 1)(x + y + z + 4) = 0.$$

Jsou tedy dvě možnosti:

a) $x + y + z = -1,$
b) $x + y + z = -4.$

(II) Odečteme (2) a (3) od dvojnásobku (1). Dostaneme

$$12xz + 12yz + 3x + 3y + 27z + 3 = 0,$$

tj.

$$4z(x + y) + x + y + 9z + 1 = 0.$$

V případě a) je $x + y = -(z + 1)$, takže máme

$$-4z(z + 1) - (z + 1) + 9z + 1 = 0$$

neboli $$-4z^2 + 4z = 0,$$

tedy $$z(z - 1) = 0.$$

Proto

α) $z = 0, \qquad x + y = -1,$

β) $z = 1, \qquad x + y = -2.$

V případě b) je $x + y = -(z + 4)$, tj.

$$-4z(z + 4) - (z + 4) + 9z + 1 = 0,$$

po úpravě

$$4z^2 + 8z + 3 = 0$$

neboli

$$(2z + 3)(2z + 1) = 0.$$

Proto

$$\gamma)\quad z = -\frac{3}{2}, \quad x + y = -\frac{5}{2},$$

$$\delta)\quad z = -\frac{1}{2}, \quad x + y = -\frac{7}{2}.$$

(III) Dosazením za z a x z α), β), γ), δ) do rovnice (2) dostaneme:

α) $$-4(1 + y)y - (1 + y) + 7y + 1 = 0,$$

odkud

$$-4y^2 + 2y = 0,$$

tj.

$y = 0$, a pak $x = -1$, $z = 0$ ... $(-1, 0, 0)$, anebo

$$y = \frac{1}{2}, \text{ a pak } x = -\frac{3}{2}, z = 0 \ldots \qquad \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right);$$

β) $$1 + 4(-y - 2)y - 2(-y - 2) - 2y - y - z +$$

$$+ 7y - 4 + 1 = 0,$$

odkud

$$-4y^2 - 2y = 0,$$

tj.

$$y = 0, \text{ a pak } x = -2, z = 1 \ \ldots \qquad (-2, 0, 1),$$

anebo

$$y = -\frac{1}{2}, \text{ a pak } x = -\frac{3}{2}, z = 1 \ldots \quad \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

γ) $$\frac{9}{4} + 4\left(-\frac{5}{2} - y\right)y + 3\left(-\frac{5}{2} - y\right) + 3y - \frac{5}{2} - y +$$

$$+ 7y + 6 + 1 = 0,$$

odkud

$$4y^2 + 4y + \frac{3}{4} = 0,$$

tj.

$$y = -\frac{1}{4}, \text{ a pak } x = -\frac{9}{4}, z = -\frac{3}{2} \ldots$$

$$\left(-\frac{9}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\right),$$

anebo

$$y = -\frac{3}{4}, \text{ a pak } x = -\frac{7}{4}, z = -\frac{3}{2} \ldots$$

$$\left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right).$$

δ) $$\frac{1}{4} + 4\left(-\frac{7}{2} - y\right) y - \frac{7}{2} - y + y - \frac{7}{2} - y + 7y +$$

$$+ 2 + 1 = 0,$$

odkud

$$4y^2 + 8y + \frac{15}{4} = 0,$$

tj.

$$y = -\frac{3}{4}, \text{ a pak } x = -\frac{11}{4}, z = -\frac{1}{2} \ldots$$

$$\left(-\frac{11}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right),$$

anebo

$$y = -\frac{5}{4}, \text{ a pak } x = -\frac{9}{4}, z = -\frac{1}{2} \dots$$

$$\left(-\frac{9}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$

Zkouškou se přesvědčíme, že všech osm trojic skutečně vyhovuje soustavě.

B - I - 5

Označme $M(n)$ počet všech uspořádaných n-tic nul a jedniček, v kterých se nevyskytují tři nuly vedle sebe. a) Určete $M(13)$. b) Rozhodněte, zda je $M(1000)$ sudé číslo.

Řešení. a) Výpisem všech možností zjistíme

(1) $\quad M(1) = 2, \quad M(2) = 4, \quad M(3) = 7, \quad M(4) = 13.$

Je-li $n \geqq 5$, pak všechny n-tice můžeme získat z $(n-1)$-tic, připisujeme-li za jejich poslední prvek nulu nebo jedničku. Jedničku lze připsat ke každé z $(n-1)$-tic, kdežto v případě nuly musíme vyloučit situace, kdy je $(n-1)$-tice zakončena trojčíslím 1, 0, 0. Těch je $M(n-4)$, takže celkem platí

(2) $$M(n) = 2 . M(n-1) - M(n-4).$$

Postupným dosazováním do tohoto rekurentního vzorce dostaneme

$$M(13) = 3\,136.$$

b) Z rekurentního vztahu (2) je zřejmé, že $M(n)$ je pro $n > 4$ liché, právě když $M(n-4)$ je liché. Vzhledem k (1) je tedy $M(n)$ liché, právě když $n = 3 + 4r$ nebo $n = 4(r+1)$, kde r je celé nezáporné číslo. $M(1000)$ proto nemůže být sudé číslo, neboť $1000 = 4 \,.\, 250$.

Jiný způsob řešení:

a) Jak již bylo uvedeno, platí $M(1) = 2$, $M(2) = 4$, $M(3) = 7$, $M(4) = 13$. Nechť $n \geqq 4$. Množinu $\mathbf{A}_n$ všech uspořádaných n-tic splňujících danou podmínku rozdělíme na tři podmnožiny

$$\mathbf{A}_{n1} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}_n; x_1 = 1\},$$

$$\mathbf{A}_{n2} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}_n; x_1 = 0 \wedge x_2 = 1\},$$

$$\mathbf{A}_{n3} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}_n; x_1 = x_2 = 0 \wedge x_3 = 1\}.$$

Tyto množiny jsou zřejmě disjunktní a jejich sjednocení je $\mathbf{A}_n$.

Přitom $\mathbf{A}_{n1}$ má $M(n-1)$ prvků, $\mathbf{A}_{n2}$ má $M(n-2)$ prvků a $\mathbf{A}_{n3}$ má $M(n-3)$ prvků. Je tedy pro každé $n \geqq 4$

$$M(n) = M(n-1) + M(n-2) + M(n-3).$$

Odtud již výpočtem určíme $M(13) = 3136$.

b) Matematickou indukcí dokážeme tvrzení:

$M(4k+1)$, $M(4k+2)$ jsou sudá čísla, $M(4k+3)$, $M(4k+4)$ jsou lichá, přičemž $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Pro $n = 1, 2, 3, 4$ tvrzení platí podle (1). Předpokládejme, že tvrzení platí i pro každé $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Pak

$$M(n) = M(n-1) + M(n-2) + M(n-3) =$$
$$= 2M(n-2) + 2M(n-3) + M(n-4),$$

a tedy $M(n)$ má při dělení dvěma stejný zbytek jako $M(n-4)$. Pro $n - 4$ tvrzení platí, platí tedy i pro n. Číslo $M(1000)$ je proto liché.

B - I - 6

Pro reálná čísla x, y platí $x \geqq y > 0$. Dokažte, že pak platí

$$\frac{(x-y)^2}{8x} \leqq \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leqq \frac{(x-y)^2}{8y}.$$

Řešení. Nejprve upravíme prostřední člen nerovností tak, aby měl v čitateli výraz $(x-y)^2$:

$$(1) \qquad \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} = \frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}.$$

Protože $x \geqq y > 0$, je též $\sqrt{x} \geqq \sqrt{y} > 0$. Nahradíme-li ve jmenovateli zlomku (1) $\sqrt{x}$ číslem $\sqrt{y}$, zlomek (1) se zvětší nebo nanejvýš zůstane stejný. Proto

$$\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} \leqq \frac{(x-y)^2}{2(2\sqrt{y})^2} = \frac{(x-y)^2}{8y}.$$

Nahradíme-li ve jmenovateli zlomku (1) $\sqrt{y}$ číslem $\sqrt{x}$, zlomek (1) se zmenší nebo nanejvýš zůstane stejný a platí

$$\frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{2} \geqq \frac{(x - y)^2}{2(2\sqrt{x})^2} = \frac{(x - y)^2}{8x}.$$

ÚLOHY KLAUZURNÍ ČÁSTI I. KOLA

B - S - 1

Zjistěte, pro jaké trojúhelníky leží střed kružnice trojúhelníku opsané

a) uvnitř trojúhelníku,
b) na obvodě trojúhelníku,
c) mimo trojúhelník.

Řešení. Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že o velikostech α, β, γ úhlů trojúhelníku ABC platí $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$. Označme S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Leží-li S uvnitř $\triangle ABC$, je velikost středového úhlu BSC menší než 180°, takže $\alpha < 90°$ a $\triangle ABC$ je ostroúhlý. Je-li obráceně $\triangle ABC$ ostroúhlý, je $\gamma \leqq \beta \leqq \alpha < 90°$ a každý z bodů A, B, C leží v téže polorovině určené přímkami BC, AC, AB jako bod S (odpovídající středový úhel je totiž menší než 180°).

Bod S dále zřejmě je na obvodě $\triangle ABC$, právě když trojúhelník je pravoúhlý. Z předchozích dvou případů už plyne, že bod S leží mimo trojúhelník, právě když trojúhelník je tupoúhlý.

B - S - 2

Dokažte, že pro reálná čísla a, b, c platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 .$$

Kdy platí znaménko rovnosti?

Řešení. Pro libovolná reálná a, b, c platí

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geqq 0, \text{ tedy}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + c^2 - 2bc \geqq 0,$$

neboli

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geqq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Proto

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$$

a rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

B - S - 3a

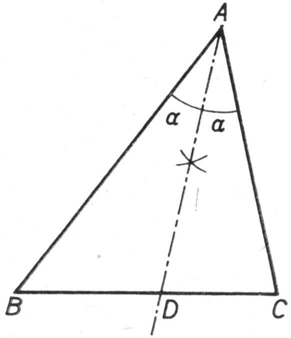
V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu BAC protější stranu BC v bodě D. Dokažte, že

$$\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|} = \frac{2}{|AD|} \cos \alpha, \text{ kde } 2\alpha = |\sphericalangle BAC|.$$

Řešení. Pro obsahy P, P_1, P_2 trojúhelníků ABC, ABD, ADC z obr. 22 platí $P = P_1 + P_2$, tedy

$$\tfrac{1}{2}\,|AB|\,.\,|AC| \sin 2\alpha =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,|AB|\,.\,|AD| \sin \alpha + \tfrac{1}{2}\,|AD|\,.\,|AC| \sin \alpha.$$



Obr. 22

Vynásobíme-li tuto rovnost číslem $\dfrac{2}{|AB|\,.\,|AC|\,.\,|AD| \sin \alpha}$, dostaneme dokazovaný vztah.

B - S - 3b

Koľko je prirodzených čísiel n s týmito dvomi vlastnosťami:

a) $10^3 \leqq n < 10^4$, tj. n je štvorciferné,

b) v desiatkovom zápise čísla n nie sú vedľa sebe dve párne číslice.

Řešení. Pro $k \geqq 1$ označme $M(k)$ počet k-ciferných čísel, která splňují i podmínku b). Každé $(k+1)$-ciferné číslo splňující b) dostaneme právě jedním z těchto způsobů:

1. připojením liché cifry k některému k-cifernému číslu splňujícímu vlastnost b);
2. připojením dvojčíslí, jehož první cifra je lichá a druhá sudá, k některému $(k-1)$-cifernému číslu splňujícímu vlastnost b).

Proto je

$$M(k+1) = 5M(k) + 25M(k-1).$$

Protože $M(1) = 9$, $M(2) = 5M(1) + 25 = 70$, $M(3) = 5M(2) + 25M(1) = 5.70 + 25.9 = 575$, je $M(4) = 5M(3) + 25M(2) = 5.575 + 25.70 = 4\,625$.

Jiné řešení. Vyznačme si schematicky, jak mohou vypadat čtyřciferná čísla splňující podmínku b). L bude značit lichou cifru, S sudou cifru. U každého tvaru hned pišme počet čísel toho tvaru; vždy lze užít pět lichých a pět sudých cifer, s výjimkou sudé cifry na prvním místě, kdy lze užít jen čtyři cifry (nikoli nulu).

Tvar čísla	počet čísel
S L S L	4.5^3
S L L S	4.5^3
S L L L	4.5^3
L S L S	5^4
L L L L	5^4
L L S L	5^4
L L L S	5^4
L L L L	5^4

Čtyřciferných čísel vyhovujících podmínce b) je tedy $3.4.5^3 + 5.5^4 = 125.37 = 4\,625$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

Dané sú kladné čísla a, b, c také, že $a^3 + b^3 = c^3$. Dokážte, že $a^2 + b^2 > c^2$.

Řešení. Dokazovaná nerovnost zřejmě platí, právě když platí nerovnost $(a^2 + b^2)^3 > c^6$ neboli když platí

$$(a^2 + b^2)^3 > (a^3 + b^3)^2.$$

S touto nerovností je však ekvivalentní nerovnost

$$a^2b^2\,(3a^2 + 3b^2 - 2ab) > 0.$$

Ta je však skutečně splněna, protože $a^2b^2 > 0$ a

$$3a^2 + 3b^2 - 2ab = (a - b)^2 + 2a^2 + 2b^2 > 0.$$

Jiné řešení. Podle předpokladu je $\left(\frac{a}{c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 = 1$.

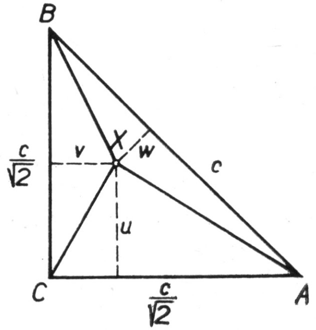
Proto jsou obě čísla $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ kladná a menší než jedna. To však znamená, že $\left(\frac{a}{c}\right)^2 > \left(\frac{a}{c}\right)^3$, $\left(\frac{b}{c}\right)^2 > \left(\frac{b}{c}\right)^3$, a tedy

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 > \left(\frac{a}{c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 = 1,$$

odkud $a^2 + b^2 > c^2$.

B - II - 2

Určete množinu všech bodů uvnitř nebo na hranici pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC o velikosti přepony c, jejichž součet vzdáleností od jednotlivých stran trojúhelníku je roven danému kladnému číslu p. Proveďte diskusi vzhledem k parametru p.



Obr. 23

Řešení (obr. 23). Označme u, v, w vzdálenosti bodu X trojúhelníku ABC od jeho stran AC, BC, AB. Protože se obsah trojúhelníku ABC rovná součtu obsahů trojúhelníků ACX, BCX a ABX (a není-li X vnitřní bod trojúhelníku, je situace obdobná), platí

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}}(u + v) + \frac{1}{2} cw = \frac{c^2}{4},$$

tj.

$$u + v + w\sqrt{2} = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Platí tedy $u + v + w = p$, právě když

$$w(\sqrt{2} - 1) = \frac{c}{\sqrt{2}} - p.$$

Protože pro body trojúhelníku je $0 \leqq w \leqq \frac{c}{2}$, má úloha neprázdné řešení pro ta p, pro která

$$0 \leqq \frac{\frac{c}{\sqrt{2}} - p}{\sqrt{2} - 1} \leqq \frac{c}{2},$$

tj.

$$\frac{c}{2} \leqq p \leqq \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Řešením je průnik trojúhelníku s přímkou rovnoběžnou s přeponou, jejíž vzdálenost od přepony se rovná $\frac{c - p\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$.

B - II - 3a

Je dán pravidelný $2n$-boký jehlan s hlavním vrcholem V. Nechť nějaká rovina protíná boční hrany jehlanu v bodech $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ a výšku jehlanu v bodě B. Vyjádřete součet

$$\frac{1}{|VA_1|} + \frac{1}{|VA_2|} + \ldots + \frac{1}{|VA_{2n}|}$$

pomocí $|VB|$ a úhlu φ, který svírá výška jehlanu s každou boční hranou.

Řešení. Pro $i = 1, \ldots, n$ je VB osa úhlu v trojúhelníku $A_i V A_{i+n}$ a přitom $|\sphericalangle BVA_i| = |\sphericalangle BVA_{i+n}| = \varphi$. Podle výsledku úlohy B-S-3a je

$$\frac{1}{|VA_i|} + \frac{1}{|VA_{i+n}|} = \frac{2}{|VB|} \cos \varphi .$$

Proto je hledaný součet roven $\dfrac{2n \cos \varphi}{|VB|}$.

B - II - 3b

Fibonacciove čísla F_n (n prirodzené číslo) sú definované takto:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 1, 2, \ldots$$

Ukážte, že práve jedno z čísel $F_{1981}, F_{1982}, \ldots, F_{1992}$ je deliteľné číslom 6.

Řešení. V posloupnosti Fibonacciových čísel se střídají vždy dvě lichá čísla a jedno sudé, je tedy právě každé třetí číslo sudé. Vyšetřujeme-li obdobně zbytky při dělení čísel F_n třemi, dostaneme tyto zbytky: 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0 atd. Proto je právě každé čtvrté Fibonacciovo číslo dělitelné třemi, a tedy právě každé dvanácté šesti. Z dvanácti daných za sebou jdoucích čísel je proto právě jedno dělitelné šesti.