31. ročník matematické olympiády

Kategorie A

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor): 31. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1981-1982. 23. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. pp. 101–147.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404758

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

A - I - 1

Najděte všechny uspořádané dvojice x, y kladných reálných čísel, pro které platí

$$\frac{\sqrt{x^n y^n} - 1}{\sqrt{xy} - 1} = \sqrt{\frac{x^n - 1}{x - 1} \cdot \frac{y^n - 1}{y - 1}}, \tag{1}$$

kde n je přirozené číslo.

Riešenie. Zo zadania úlohy vyplýva, že $x \neq 1$, $y \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $xy \neq 1$.

Prípad $n = 1$ je jednoduchý. Vtedy každá dvojica kladných reálnych čísel x, y, pre ktorú je $x \neq 1$, $y \neq 1$, $xy \neq 1$, je riešením rovnice (1).

Pre $n > 1$ rovnicu upravíme. V rovnici vystupujú súčty geometrických radov:

$$\frac{\sqrt{x^n y^n} - 1}{\sqrt{xy} - 1} = 1 + \sqrt{xy} + (\sqrt{xy})^2 + \ldots + (\sqrt{xy})^{n-1},$$

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + \ldots + x^{n-1},$$

$$\frac{y^n - 1}{y - 1} = 1 + y + \ldots + y^{n-1}.$$

Teda rovnicu (1) môžeme ekvivalentne upraviť takto:

$$1 + \sqrt{xy} + \ldots + (\sqrt{xy})^{n-1} =$$

$$= \sqrt{(1 + x + \ldots + x^{n-1}) \, . \, (1 + y + \ldots + y^{n-1})}.$$

Rovnicu môžeme umocniť na druhú a zapísať pomocou sumačných znamienok:

$$(2) \qquad (\sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt{xy})^i)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \, . \sum_{i=0}^{n-1} y^i.$$

Známa Cauchyho nerovnosť (pozri napr. 39. zväzok ŠMM, A. Kufner: *Nerovnosti a odhady*)

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{m} a_i^2 \, . \sum_{i=0}^{m} b_i^2 \geqq (\sum_{i=0}^{m} a_i b_i)^2$$

platí pre ľubovoľné reálne čísla $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m$. Naviac, rovnosť platí vtedy a len vtedy, ak existuje reálne číslo t také, že $a_0 = tb_0$, $a_1 = tb_1, \ldots, a_m = tb_m$, alebo ak $b_0 = \ldots = b_m = 0$.

Rovnosť (2) je rovnosť v Cauchyho nerovnosti (3) s $m = n - 1$, $a_i = (\sqrt{x})^i$, $b_i = (\sqrt{y})^i$, $i = 0, \ldots, n - 1$. Teda (2) platí vtedy a len vtedy, ak existuje také reálne číslo t, že $(\sqrt{x})^i = t\,(\sqrt{y})^i$, $i = 0, \ldots, n - 1$. Pre $i = 0$ z tejto podmienky vyplýva $t = 1$. Teda, ak x, y sú riešením rovnice (1), tak $x = y$.

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že každá dvojica x, y kladných reálnych čísel, pre ktorú je $x = y$, $x \neq 1$, je riešením rovnice (1).

A - I - 2

Pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo m takové, že na kružnici se středem [0, 0] a poloměrem m leží alespoň n mřížových bodů. Dokažte. (Mřížový bod je bod s oběma souřadnicemi celočíselnými.)

Riešenie. Ak mrežový bod $[k, l]$ leží na kružnici so stredom [0, 0] a polomerom m, tak trojica celých čísel k, l, m je riešením rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Naopak ak trojica celých čísel k, l, m je riešením rovnice (1), tak mrežový bod $[k, l]$ leží na uvažovanej kružnici.

Teda pôvodná úloha je ekvivalentá takejto úlohe: Máme nájsť prirodzené číslo m také, že rovnica (1) má aspoň n rôznych riešení tvaru

$$k_1, l_1, m; \quad k_2, l_2, m; \ldots; k_n, l_n, m. \tag{2}$$

Zdá sa, že je ľahšie nájsť n rôznych nenulových celočíselných riešení

$$p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2; \ldots; p_n, q_n, r_n$$

rovnice (1) (bez podmienky $r_1 = r_2 = \ldots = r_n$), ako hľadať riešenia tvaru (2). Všimnime si však toto:

Ak p_1, q_1, r_1 a p_2, q_2, r_2 sú nenulové celočíselné riešenia rovnice (1), potom trojice p_1r_2, q_1r_2, r_1r_2 a p_2r_1, q_2r_1, r_1r_2 sú riešenia rovnice (1) tvaru (2) s $m = r_1r_2$. Tieto trojice však nemusia byť rôzne. V tejto súvislosti zavedieme nový pojem. Dve nenulové celočíselné riešenia p_1, q_1, r_1 a p_2, q_2, r_2 rovnice (1) nazveme súdeliteľné, ak existuje také reálne číslo t, že platí $p_1 = tp_2, q_1 = tq_2, r_1 = tr_2$.

Ak p_1, q_1, r_1 a p_2, q_2, r_2 sú nenulové nesúdeliteľné celočíselné riešenia rovnice (1), potom trojice p_1r_2, q_1r_2, r_1r_2 a p_2r_1, q_2r_1, r_1r_2 sú dve rôzne riešenia rovnice (1).

Vo všeobecnosti, ak máme n po dvojiciach nesúdeliteľných nenulových celočíselných riešení $p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2; \ldots; p_n, q_n, r_n$ rovnice (1), tak stačí označiť

$$m = r_1 \,.\, \ldots \,.\, r_n,$$

$$k_i = \frac{p_i \,.\, m}{r_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$l_i = \frac{q_i \,.\, m}{r_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

a dostaneme n rôznych riešení rovnice (1) tvaru (2).

Teda zostáva nájsť n navzájom nesúdeliteľných nenulových celočíselných riešení rovnice (1).

Z jednoduchej identity

$$(u^2 + v^2)^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2$$

vyplýva, že pre ľubovoľné celé čísla u, v trojica $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$ je celočíselné riešenie rovnice (1). Ak zvolíme postupne $u = 2 + 1, 2 + 2, \ldots, 2 + n$, $v = 1$, tak trojice $p_i = (i + 2)^2 - 1$, $q_i = 2(i + 2)$, $r_i = (i + 2)^2 + 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú nenulové celočíselné riešenia rovnice (1).

Ukážeme, že uvedené riešenia sú navzájom nesúdeliteľné. Ukážeme to sporom. Predpokladajme, že existujú také $i < j \leqq n$ a reálne číslo t, že platí

$$p_i = tp_j,\ q_i = tq_j,\ r_i = tr_j. \tag{3}$$

Z druhej rovnosti (3) vyplýva $t = \dfrac{i + 2}{j + 2}$. Dosadením do prvej rovnosti v (3) dostávame

$$((i + 2)^2 - 1)(j + 2) = (i + 2)((j + 2)^2 - 1).$$

Po jednoduchej úprave máme

$$(j + 2)((i + 2)^2 - 1 - (i + 2)(j + 2)) = -(i + 2).$$

Teda číslo $i + 2$ je deliteľné číslom $j + 2$. To však nie je možné, lebo $i + 2 < j + 2$.

Výsledok môžeme zhrnúť takto: Na kružnici so stredom $[0, 0]$ a polomerom m, kde

$$m = ((1 + 2)^2 + 1) \,.\, ((2 + 2)^2 + 1) \,.\, \ldots \,.\, ((n + 2)^2 + 1)$$

leží aspoň n mrežových bodov o súradniciach

$$\frac{((i+2)^2-1)\,.\,m}{(i+2)^2+1}, \quad \frac{2(i+2)\,.\,m}{(i+2)^2+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Poznámky. 1. Všetky uvedené body ležia v prvom kvadrante. Aj body otočené o 90°, 180° a 270° sú mrežové body ležiace na uvažovanej kružnici. Podobne body $[0, m]$, $[m, 0]$, $[0, -m]$, $[-m, 0]$ ležia na uvažovanej kružnici. Teda je tam aspoň $4n + 4$ mrežových bodov.

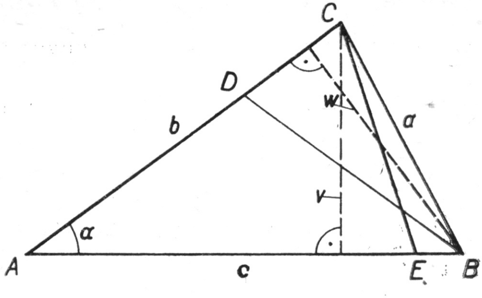
2. Dá sa ukázať, že trojice $u^2 - v^2$, $2uv$, $\pm (u^2 + v^2)$ a $2uv$, $u^2 - v^2$, $\pm (u^2 + v^2)$, kde u, v sú celé čísla, sú všetky celočíselné riešenia rovnice (1) - pozri napr. úlohu A-P-1 26. ročníka MO.

A - I - 3

Do každého trojúhelníku lze umístit rovnoramenný trojúhelník, jehož obsah je větší než $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -násobek obsahu původního trojúhelníku. Dokažte.

Riešenie. Uvažujme trojuholník ABC. Označíme písmenami a, b, c dĺžky strán oproti vrcholom A, B, C a α veľkosť uhla pri vrchole A. Nech P je obsah trojuholníka ABC. Máme nájsť rovnoramenný trojuholník s obsahom P' umiestnený v trojuholníku ABC a taký, že $\frac{P'}{P} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ak niektoré dve strany trojuholníka ABC sú rovnako veľké, tak ABC je hľadaný rovnoramenný trojuholník a $P' = P$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme teda predpokladať, že platí $a < b < c$.



Obr. 24

Nech D je bod na strane AC taký, že ABD je rovnoramenný. Nech E je bod na strane AB taký, že $AE = b$ (pozri obr. 24). Nech P_1, P_2 sú obsahy trojuholníkov ABD, AEC, v je výška trojuholníka ABC na stranu AB a w je výška trojuholníka ABC na stranu AC. Potom platí

$$P = \tfrac{1}{2}\, cv = \tfrac{1}{2}\, bw,$$

$$P_1 = \tfrac{1}{2}\, |AD|\, .\, w,$$

$$P_2 = \tfrac{1}{2}\, |AE|\, .\, v = \tfrac{1}{2}\, bv.$$

Ak $\dfrac{b}{c} > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, tak

$$\frac{P_2}{P} = \frac{b}{c} > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a teda AEC je hľadaný trojuholník.

Ukážeme, že v prípade $\frac{b}{c} \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ je hľadaným trojuholníkom trojuholník ABD. Z obrázku 24 vidieť, že platí

$$\cos \alpha = \frac{\frac{c}{2}}{|AD|},$$

a teda

$$P_1 = \frac{cw}{4 \cos \alpha}.$$

Predpokladajme, že BC je najkratšia strana, a teda α je najmenší uhol. Určite je $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, a teda $0 < \cos \alpha < 1$. Takže postupne dostaneme

$$\frac{P_1}{P} = \frac{cw}{4 \cos \alpha} \cdot \frac{2}{bw} = \frac{c}{2b \cos \alpha} > \frac{c}{2b} \geqq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A - I - 4

Sú dané reálne čísla a, b, r také, že $0 < a \leqq 2r$, $0 < b \leqq 2r$. Na kružnici k s polomerom r sú pevne zvolené body A, B tak, že $|AB| = a$. Určte množinu všetkých priesečníkov uhlopriečok konvexných štvoruholníkov $ABXY$ vpísaných do kružnice k, pre ktoré $|XY| = b$.

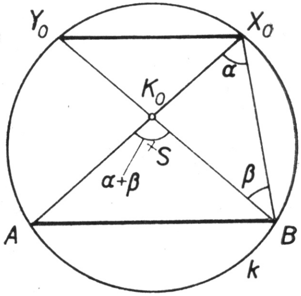
Riešenie. Označíme **M** hľadanú množinu všetkých priesečníkov K uhlopriečok konvexných štvoruholníkov $ABXY$ s vlastnosťou uvedenou v zadaní úlohy.

Ak $a = b = 2r$, tak bezprostredne vidieť, že **M** je prázdna množina. Ďalej budeme predpokladať, že $a \neq 2r$ alebo $b \neq 2r$.

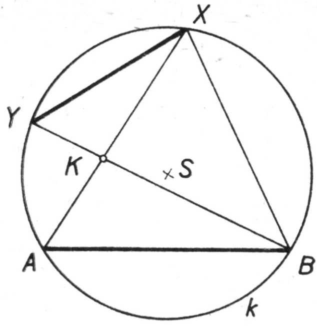
Budeme hovoriť, že úsečku UV vidieť z bodu W pod uhlom α, ak α je veľkosť uhla UWV. Vieme, že množina bodov, z ktorých vidieť úsečku UV pod uhlom α, je zjednotenie dvoch oblúkov kružnice.

Máme pevne zvolené body A, B na kružnici k so stredom S a polomerom r také, že $|AB| = a$. Nech X_0, Y_0 sú body na kružnici k (pozri obr. 25) také, že $|X_0Y_0| = b$, priamka X_0Y_0 je rovnobežná s priamkou AB a bod S leží v lichobežníku ABX_0Y_0. (Ak $a = r$, tak existujú dve dvojice takých bodov. V opačnom prípade sú body X_0, Y_0 určené jednoznačne.) Priamka AB určuje dve polroviny ϱ a σ. Nech ϱ je polrovina obsahujúca body X_0, Y_0. Označíme α, β veľkosti uhlov AX_0B, Y_0BX_0. Nech K_0 je priesečník uhlopriečok AX_0, BY_0. Úsečku AB z bodu K_0 vidieť pod uhlom $\alpha + \beta$.

Nech X, Y sú body na kružnici k také, že $|XY| = b$



Obr. 25



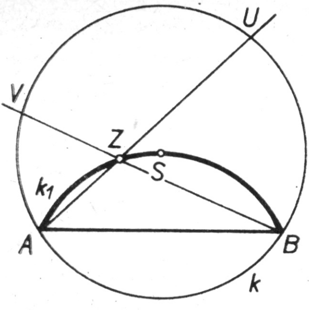
Obr. 26

(pozri obr. 26). Označíme K priesečník uhlopriečok konvexného štvoruholníka $ABXY$.

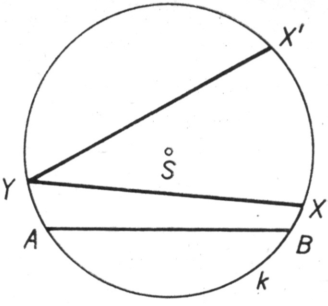
Ďalej budeme rozlišovať tri prípady.

1. $a = b$. Potom ABX_0Y_0 je obdĺžnik a $\alpha = \beta$. Bod X leží v polrovine ϱ. Uhol AXB je obvodový uhol nad tetivou AB, a teda jeho veľkosť je α. Podobne uhol XBY je obvodový uhol nad tetivou XY, $|XY| = b$, a teda jeho veľkosť je β. Takže úsečku AB vidieť z bodu K pod uhlom $\alpha + \beta$. Bod K leží na oblúku kružnice k_1 v polrovine ϱ, z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\alpha + \beta$. Tým sme ukázali, že $\mathbf{M} \subseteq k_1$. Ukážeme aj opačnú inklúziu.

Nech $Z \in k_1$. Označíme U, V priesečníky polpriamok AZ, BZ s kružnicou k (pozri obr. 27). Vieme, že uhol AZB je $\alpha + \beta$. Bod U leží v polrovine ϱ na kružnici k s tetivou AB, a teda uhol AUB je α. Potom uhol UBV je β a odtiaľ vyplýva, že $|VU| = b$. Štvoruholník $ABUV$ je konvexný, a teda $Z \in \mathbf{M}$.



Obr. 27



Obr. 28

Čiže v prípade $a = b$ množina **M** je oblúk kružnice v polrovine ϱ, z ktorého úsečku AB vidieť pod uhlom $\alpha + \beta$.

2. $a < b$. Body X, Y musia ležať v polrovine ϱ (lebo tetiva XY je dlhšia ako tetiva AB). Uhol AXB je α. Uhol YBX môže byť β alebo $\pi - \beta$ (obr. 28). Teda uhol AKB je $\alpha + \beta$ alebo $\pi + \alpha - \beta$. Z uvedeného vyplýva, že $\mathbf{M} \subseteq$ $\subseteq k_1 \cup k_2$, kde k_1, k_2 sú oblúky kružnice v polrovine ϱ, z ktorých vidieť úsečku AB pod uhlom $\alpha + \beta$, resp. $\pi +$ $+ \alpha - \beta$.

Rovnakými argumentami ako vyššie možno ukázať, že $\mathbf{M} = k_1 \cup k_2$.

3. $a > b$. Body X, Y môžu ležať buď obidva v polrovine ϱ, alebo obidva v polrovine σ. Uhol YBX je v obidvoch prípadoch β. Uhol AXB je v prvom prípade α a v druhom $\pi - \alpha$. Teda uhol AKB je $\alpha + \beta$ alebo $\pi + \beta - \alpha$. Z uvedeného vyplýva, že $\mathbf{M} \subseteq k_1 \cup k_3$, kde k_1 je oblúk kružnice v polrovine ϱ, z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\alpha + \beta$, a k_3 je oblúk kružnice v polrovine σ, z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\pi + \beta - \alpha$.

Ak $Z \in k_1 \cup k_3$, tak zostrojíme body X, Y ako priesečníky polpriamok AZ, BZ s kružnicou k. Jednoduchou úvahou (ako v prípade 1.) zistíme, že $|XY| = b$ a $ABXY$ je konvexný štvoruholník. Teda $\mathbf{M} = k_1 \cup k_3$.

A - I - 5

Sú dané dve nerastúce postupnosti reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a dve prosté zobrazenia P, R množiny všetkých prirodzených čísel na seba. Utvorme súčty $a_{P(1)} + b_{R(1)}$, $a_{P(2)} + b_{R(2)}, \ldots$ a usporiadajme ich podľa veľkosti do nerastúcej postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom pre každé dve prirodzené čísla m, n platí

$$c_{m+n-1} \leqq a_m + b_n.$$

Dokážte.

Riešenie. Z definície postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva, že existuje postupnosť $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ taká, že

$$c_1 = a_{P(k_1)} + b_{R(k_1)}, \ldots, c_n = a_{P(k_n)} + b_{R(k_n)}, \ldots .$$

Naviac, pre $i \neq j$ je $k_i \neq k_j$.

Z toho, že postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú nerastúce, vyplýva, že $a_j \leqq a_m$ pre $j \geqq m$ a $b_i \leqq b_n$ pre $i \geqq n$. To znamená, že nerovnosť $a_j + b_i > a_m + b_n$ môže platiť jedine pre $j < m$ alebo $i < n$.

Označíme $\mathbf{A} = \{l;\ P(k_l) < m\}$ a $\mathbf{B} = \{l;\ R(k_l) < n\}$. Ak $c_l > a_m + b_n$, tak podľa predchádzajúceho platí $l \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Kedže množina $\mathbf{A}$ má $m-1$ prvkov, množina $\mathbf{B}$ má $n-1$ prvkov, tak $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ má menej ako $n + m - 1$ prvkov. To znamená, že nerovnosť $c_l > a_m + b_n$ platí pre menej ako $n + m - 1$ hodnôt indexu l. Teda $(n + m - 1)$-tý člen nerastúcej postupnosti $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nie väčší ako $a_m + b_n$, tj.

$$c_{n+m-1} \leqq a_m + b_n.$$

A - I - 6

Je daný štvorsten $ABCD$ a ľubovoľný bod K v jeho vnútri. Nech G_1, G_2, G_3, G_4 sú ťažiská štvorstenov $KBCD$, $AKCD$, $ABKD$, $ABCK$. Dokážte, že objem štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ nezávisí od voľby bodu K.

Riešenie. Vieme, že ťažisko štvorstena delí ťažnicu v pomere 1 : 3. Ťažnica je spojnica vrcholu s ťažiskom steny štvorstena. Ďalej vieme, že štvorsten je až na posunutie, otočenie, prípadne zrkadlový obraz, jednoznačne určený dĺžkami svojich hrán. Špeciálne, objem štvorstena je určený dĺžkami jeho hrán.

Nech T_1, T_2, T_3, T_4 sú ťažiská stien BCD, ACD, ABD, ABC. Bod G_i, $i = 1, 2, 3, 4$, delí úsečku KT_i v pomere 1 : 3, lebo G_i je ťažisko príslušného štvorstena a KT_i je jeho ťažnica. Teda štvorsten $G_1G_2G_3G_4$ je rovnoľahlý so štvorstenom $T_1T_2T_3T_4$ s koeficientom rovnoľahlosti $\frac{3}{4}$ a stredom rovnoľahlosti K. Keďže koeficient rovnoľahlosti je nezávislý od voľby bodu K, tak dĺžky hrán štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ tiež nezávisia od voľby bodu K, a teda ani jeho objem.

Naviac ak si uvedomíme, že rovnoľahlosť s koeficientom k mení objem telies $|k|^3$-krát, tak ľahko určíme objem štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ pomocou objemu $ABCD$. Štvorsten $T_1T_2T_3T_4$

je rovnoľahlý so štvorstenom $ABCD$ s koeficientom rovnoľahlosti $-\frac{1}{3}$ a stredom v ťažisku štvorstena $ABCD$. Teda objem štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ je $\left|-\frac{1}{3}\right|^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ násobok objemu štvorstena $ABCD$.

Iné riešenie. Umiestnime štvorsten $ABCD$ do súradnicovej sústavy s počiatkom O. Označíme g_i vektor $G_i - O$. Podobne $a = A - O$, $b = B - O$, $c = C - O$, $d = D - O$, $k = K - O$. Keďže G_1 je ťažisko štvorstena $KBCD$, tak platí

$$g_1 = \frac{k + b + c + d}{4}.$$

Podobne platí

$$g_2 = \frac{a + k + c + d}{4},$$

$$g_3 = \frac{a + b + k + d}{4},$$

$$g_4 = \frac{a + b + c + k}{4}.$$

Dĺžka hrany G_1G_2 je rovná veľkosti vektora

$$G_2 - G_1 = g_2 - g_1 = \frac{a - b}{4}.$$

Podobne pre ostatné hrany. Z uvedeného vyjadrenia vyplýva, že dĺžka hrán štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ nezávisí od voľby bodu K, je rovná $\frac{1}{4}$ dĺžok odpovedajúcich hrán štvorstena $ABCD$. Teda objem štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ nezávisí od voľby bodu K a je $\frac{1}{4^3}$ násobok objemu štvorstena $ABCD$.

ÚLOHY KLAUZÚRNEJ ČASTI I. KOLA

A - S - 1

Určte všetky usporiadané n-tice čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pre ktoré má kvadratická rovnica

$$(1) \qquad x^2 \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i - x \sum_{i=1}^{n} \sin 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i = 0$$

aspoň jeden reálny koreň.

Riešenie. Kvadratická rovnica (1) má aspoň jeden reálny koreň práve vtedy, keď jej diskriminant

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} \sin 2\alpha_i\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i \,.\, \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i$$

je nezáporný.

Jednoduchou úpravou použitím vzorca pre sínus dvojnásobného uhla dostaneme

$$(2)\quad D = 4\,[(\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \cos\alpha_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i \,.\, \sum_{i=1}^{n} \sin^2\alpha_i] \geqq 0.$$

Podľa Cauchyho nerovnosti (pozri riešenie úlohy A-I-1) však platí

$$(3)\qquad (\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \ \cos\alpha_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i \,.\, \sum_{i=1}^{n} \sin^2\alpha_i.$$

Teda nerovnosť (2) platí vtedy a len vtedy, keď $D = 0$. To je ekvivalentné tomu, že platí rovnosť v nerovnosti (3). Zo zadania úlohy vyplýva, že $\cos\alpha_i \neq 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda rovnosť v (3) nastáva práve vtedy, keď existuje reálne číslo k také, že

$$\sin\alpha_i = k \,.\, \cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ekvivalentne

$$k = \mathrm{tg}\,\alpha_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_2 = \ldots = \mathrm{tg}\,\alpha_n.$$

Keďže čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sú z intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, tak posledná podmienka je ekvivalentná podmienke $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

Iné riešenie. Rovnicu (1) upravíme na tento tvar

$$\sum_{i=1}^{n} x^2 \cos^2\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} 2x\cos\alpha_i \sin\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \sin^2\alpha_i = 0,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n} (x \cos \alpha_i - \sin \alpha_i)^2 = 0.$$

Suma štvorcov reálnych čísel je rovná nule práve vtedy, keď každý sčítanec je nulový. Teda rovnica (1) je ekvivalentná sústave rovníc

$$
\begin{aligned}
x \cos \alpha_1 &= \sin \alpha_1, \\
x \cos \alpha_2 &= \sin \alpha_2, \\
&\ \vdots \\
x \cos \alpha_n &= \sin \alpha_n.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Zo zadania vyplýva, že $\cos \alpha_1 \neq 0, \cos \alpha_2 \neq 0, \ldots, \cos \alpha_n \neq 0$. Rovnica (1) má reálne riešenie práve vtedy, ak má reálne riešenie sústava rovníc (4). Táto má reálne riešenie práve vtedy, keď

$$\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \ldots = \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n},$$

tj. keď $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

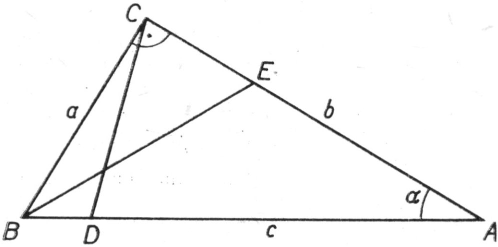
A - S - 2

Do každého pravoúhlého trojúhelníka lze umístit rovnoramenný trojúhelník, jehož obsah je větší nebo roven $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$-násobku obsahu původního pravoúhlého trojúhelníka. Dokažte.

Riešenie. Uvažujme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C a dĺžkou strán $a, b, c, a \leqq b \leqq c$. Nech α je veľkosť uhla BAC. Obsah P je potom

$$P = \tfrac{1}{2}\, bc \sin \alpha.$$

Nech D je bod na strane AB taký, že $|DA| = b$, a nech E je bod na strane AC taký, že $|BE| = |EA|$ (pozri obr. 29). Také body zrejme existujú.



Obr. 29

Obsah P_1 trojuholníka ADC je

(1) $$P_1 = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha = \frac{b}{c} P.$$

Podobne obsah P_2 trojuholníka ABE je

$$(2)\quad P_2 = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}c \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}c^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{4}\frac{c^3}{b} \cdot \sin\alpha.$$

Ak $\frac{b}{c} \geqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, tak podľa (1) trojuholník ADC vyhovuje podmienkam úlohy. Ak $\frac{b}{c} < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, tak podľa (2) platí

$$P_2 = \frac{1}{4}\frac{c^2}{b^2} bc \sin\alpha > \frac{1}{2}(\sqrt[3]{2})^2 \cdot P = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} P.$$

Teda v tomto prípade trojuholník ABE vyhovuje podmienkám úlohy.

A - S - 3a

V rovině je dána kružnice k s poloměrem r a na ní body A, B ve vzdálenosti d. Nechť číslo v splňuje nerovnosti $0 < d < v \leqq 2r$.

Najděte množinu všech bodů X z vnější oblasti kružnice k, pro něž druhé prusečníky $A' \neq A$, $B' \neq B$ přímek XA, XB s kružnicí k mají vlastnost, že $|A'B'| = v$.

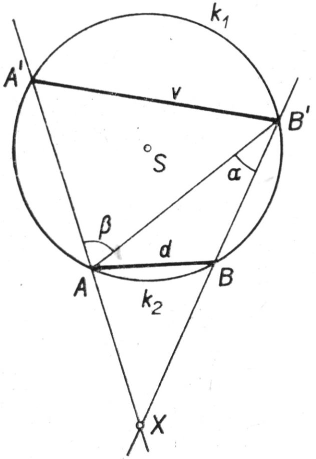
Riešenie. Body A, B rozdelia kružnicu na dva oblúky k_1, k_2. Nech k_1 je väčší z nich, tj. ten, ktorý leží v tej istej polrovine ako stred S kružnice k určenej priamkou AB. Nech X je bod z vonkajšej oblasti kružnice k, A', B' sú body na kružnici k rôzne od A, B, $|A'B'| = v$, a X leží na priamkach AA', BB'.

Nech 2α je veľkosť vypuklého uhla ASB a 2β je veľkosť vypuklého uhla $A'SB'$. Teda $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ a $\beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$. Naviac, číslo β nezávisí od polohy bodov A', B', je určené dĺžkou v.

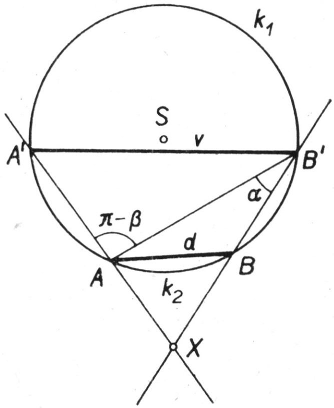
Môžu nastať tri prípady:

1. $A', B' \in k_1$;
2. $A' \in k_1$, $B' \in k_2$;
3. $A' \in k_2$, $B' \in k_1$.

V prípade 1 máme ďalšie dve možnosti:
a) stred S leží v štvoruholníku $ABB'A'$ (obr. 30);
b) stred S leží mimo štvoruholníka $ABB'A'$ (obr. 31).



Obr. 30



Obr. 31

V prípade 1a) sa ľahko vypočíta

$$\sphericalangle AXB = \pi - (\sphericalangle XA'B' + \sphericalangle XB'A') =$$

$$= \pi - (\sphericalangle XA'B' + \sphericalangle AB'A' + \alpha) =$$

$$= \pi - (\pi - \beta + \alpha) = \beta - \alpha.$$

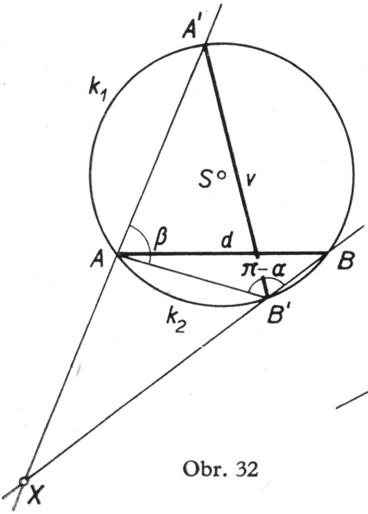
Podobne v prípade 1b) zistíme, že

$$\sphericalangle AXB = \pi - \alpha - \beta.$$

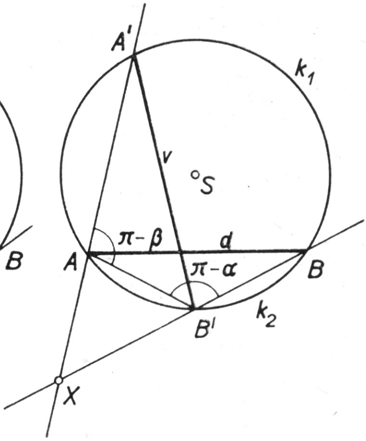
V prípade 2 máme tiež dve možnosti:

a) bod S leží v trojuholníku $AB'A'$ (obr. 32);

b) bod S leží mimo trojuholníka $AB'A'$ (obr. 33).



Obr. 32



Obr. 33

V prípade 2a) dostávame

$$\sphericalangle AXB = \pi - (\pi - \beta) - (\pi - (\pi - \alpha)) = \beta - \alpha,$$

a v prípade 2b) máme

$$\sphericalangle AXB = \pi - \alpha - \beta.$$

Rovnako v prípade 3 máme dve možnosti a uhol $\sphericalangle AXB$ je $\beta - \alpha$ alebo $\pi - \alpha - \beta$.

Nech l_1 je oblúk kružnice, z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\beta - \alpha$. Podobne nech l_2 je oblúk kružnice, z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\pi - \alpha - \beta$. Obidva oblúky ležia v opačnej polrovine určenej priamkou AB ako bod S.

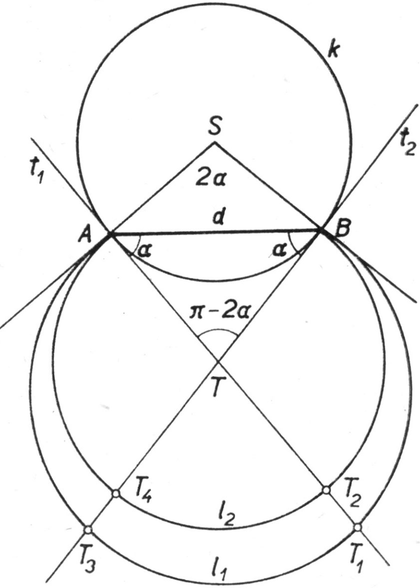
Z uvedeného rozboru vyplýva, že hľadaná množina M bodov X s vlastnosťou uvedenou v texte úlohy je podmnožina zjednotenia $l_1 \cup l_2$.

Nech T_1, T_2, T_3, T_4 sú priesečníky dotyčníc t_1, t_2 kružnice k v bodoch A, B s oblúkmi l_1, l_2. Ukážeme, že

$$\mathsf{M} = l_1 \cup l_2 - \{T_1, T_2, T_3, T_4\} \tag{1}$$

(pozri obr. 34).

Označíme T priesečník dotyčníc t_1 a t_2. Uhol ATB je $\pi - 2\alpha$. Keďže platí $0 < \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}$, tak $\pi - 2\alpha > \beta - \alpha$ a $\pi - 2\alpha > \pi - \alpha - \beta$. Teda bod T leží vnútri kružníc oblúkov l_1, l_2. Nech bod X leží na $l_1 \cup l_2$ a je rôzny od bodov T_1, T_2, T_3, T_4. Môže nastať zrejmých šesť prípadov (oblúky

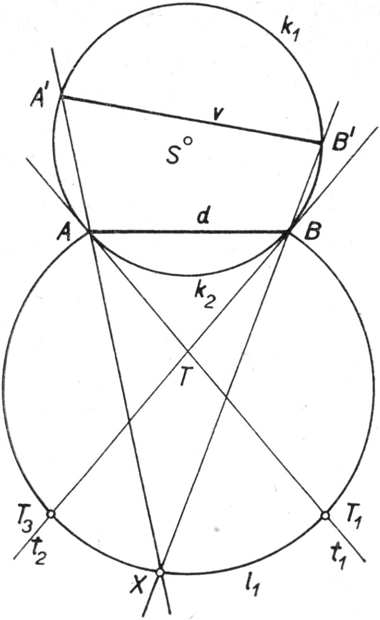


Obr. 34

l_1, l_2 sú bodmi T_1, T_2, T_3, T_4 rozdelené na šesť častí). Nech napríklad bod X leží na oblúku l_1 medzi bodmi T_1 a T_3 (pozri obr. 35). Potom druhý priesečník A' priamky AX s kružnicou k leží na oblúku k_1 (vzhľadom na polohu bodu X k dotyčnici t_1). Podobne bod B' leží na oblúku k_1. Keďže uhol AXB je $\beta - \alpha$, uhol $AB'B$ je α, tak ľahko sa vypočíta, že uhol $A'AB'$ je β. Odtiaľ už vyplýva, že $|A'B'| = v$. Teda $X \in \mathbf{M}$.

Podobne by sme postupovali v ostatných prípadoch.

Teda hľadaná množina je popísaná vzťahom (1).



Obr. 35

A - S - 3b

V rovině se souřadnicemi x, y je dána přímka p. Pak jsou právě tři možnosti:

a) p obsahuje nekonečně mnoho mřížových bodů roviny (tj. bodů s celočíselnými souřadnicemi);

b) p neobsahuje žádný mřížový bod;

c) p obsahuje přesně jeden mřížový bod.

Dokažte. Pro každou z možností a), b), c) udejte příklad přímky p.

Riešenie. Ukážeme, že nastane aspoň jedna z uvedených troch možností. Predpokladáme, že nenastane možnosť b) ani c). Ukážeme, že vtedy nastane možnosť a).

Ak nenastane možnosť b) ani c), tak existujú aspoň dva rôzne mrežové body A, B, ktoré ležia na priamke p. Nech A má súradnice $[x_0, y_0]$ a B má súradnice $[x_1, y_1]$. Ak rovnica priamky p je $y = kx + q$, tak musí platiť

$$y_0 = kx_0 + q,$$

$$y_1 = kx_1 + q,$$

teda

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

$$q = y_0 - x_0 \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Teda rovnica priamky p má tvar

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0. \tag{1}$$

Ak n je prirodzené číslo, tak čísla

$$x_n = x_0 + n(x_1 - x_0),$$

$$y_n = y_0 + n(y_1 - y_0)$$

sú celé. Naviac zrejme dvojica x_n, y_n vyhovuje rovnici (1). Teda na priamke p ležia všetky mrežové body so súradnicami $[x_n, y_n]$, tj. nastáva možnosť a). Ak priamka p nemá rovnicu uvedeného tvaru, tak je rovnobežná s osou y. Potom jej rovnica je $x = x_0$ a obsahuje všetky mrežové body so súradnicami $[x_0, y]$, kde y je celé číslo.

Príkladom priamky pre možnosť a) je ľubovoľná priamka s rovnicou $y = k$, k je celé číslo. Príkladom priamky pre prípad b) je priamka $y = \frac{1}{2}$, tá neobsahuje ani jeden mrežový bod. Na priamke s rovnicou $y = \sqrt{2}\, x$ leží mrežový bod so súradnicami $[0, 0]$. Ukážeme, že iný mrežový bod tam neleží. Keby totiž mrežový bod $[x_1, y_1]$, kde $y_1 \neq 0$ alebo $y_1 \neq 0$, ležal na priamke $y = \sqrt{2}\, x$, tak $y_1 = \sqrt{2}\, x_1$. Potom $x_1 \neq 0$ aj $y_1 \neq 0$, a tedy $\sqrt{2} = \dfrac{y_1}{x_1}$. To by znamenalo, že $\sqrt{2}$ je racionálne číslo, a to nie je.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

Nech A, B, C, D sú mrežové body také, že body C, D neležia na priamke AB. Nech v_1 je výška trojuholníka ABC na stranu AB a v_2 je výška trojuholníka ABD na stranu AB. Potom $v_1 : v_2$ je racionálne číslo. Dokážte.

Riešenie. Ak body A, B ležia na priamke rovnobežnej s osou y, tak $|AB|$ je prirodzené číslo a aj v_1, v_2 sú prirodzené čísla.

Ak body A, B neležia na priamke rovnobežnej s osou y, tak priamka AB má rovnicu $y = kx + q$, kde k, q sú racionálne čísla (pozri riešenie úlohy A-S-3b). Označme $[c_1, c_2]$ a $[d_1, d_2]$ súradnice bodov C, D. Podľa vzorca pre vzdialenosť bodu od priamky platí

$$v_1 = |kc_1 - c_2 + q| : \sqrt{1 + k^2},$$

$$v_2 = |kd_1 - d_2 + q| : \sqrt{1 + k^2}.$$

Potom

$$v_1 : v_2 = |kc_1 - c_2 + q| : |kd_1 - d_2 + q|$$

a to je racionálne číslo.

Iné riešenie. Ukážeme najprv pomocné tvrdenie: Ak mrežové body X_1, X_2, X_3 neležia na priamke, potom dvojnásobok obsahu trojuholníka $X_1X_2X_3$ je prirodzené číslo.

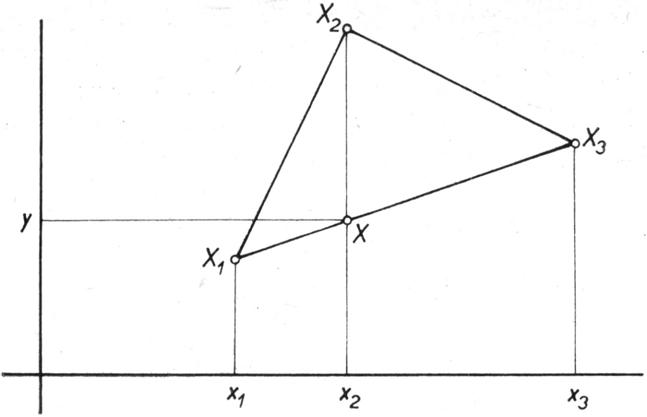
Nech $[x_i, y_i]$ sú súradnice bodu X_i, $i = 1, 2, 3$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x_1 \leqq x_2 < x_3$ (keby $x_1 = x_2 = x_3$, tak body X_1, X_2, X_3 ležia na priamke). Ak $x_1 = x_2$, tak $|X_1X_2| = |y_2 - y_1|$ a výška trojuholníka $X_1X_2X_3$ na stranu X_1X_2 je $x_3 - x_2$. Teda pre obsah P platí

$$P = \tfrac{1}{2} |y_2 - y_1| \,.\, (x_3 - x_2).$$

Odtiaľ už vyplýva tvrdenie.

Nech teraz $x_1 < x_2 < x_3$. Nech X je bod s x-ovou súradnicou x_2 na úsečke X_1X_3 (pozri obr. 36). Pre druhú súradnicu y bodu X platí

$$(y - y_1) : (y_3 - y_1) = (x_2 - x_1) : (x_3 - x_1)$$



Obr. 36

a teda

$$y = y_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot (y_3 - y_1).$$

Pre dĺžku úsečky X_2X platí

$$|X_2X| = y_2 - y = y_2 - y_1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}(y_3 - y_1).$$

Obsah P trojuholníka $X_1X_2X_3$ je súčet obsahov trojuholníkov X_1X_2X a XX_2X_3. Teda platí

$$P = \frac{1}{2}\,|X_2X| \,.\, (x_2 - x_1) + \frac{1}{2}\,|X_2X| \,.\, (x_3 - x_2).$$

Odtiaľ postupne dostaneme

$$P = \frac{1}{2}(|X_2X| \cdot (x_3 - x_1) = \frac{1}{2}((y_2 - y_1) \cdot (x_3 - x_1) -$$

$$- (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1)).$$

Z poslednej rovnosti vyplýva, že $2P$ je prirodzené číslo.

Teraz už ľahko dokážeme tvrdenie úlohy. Označíme P_1 a P_2 obsahy trojuholníkov ABC a ABD. Keďže $P_1 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot v_1$, $P_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot v_2$, tak $v_1 : v_2 = 2P_1 : 2P_2$. Ale čísla $2P_1$, $2P_2$ sú prirodzené, teda $v_1 : v_2$ je racionálne číslo.

A - II - 2

Určete všechny uspořádané n-tice ($n \geqq 1$) kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, které vyhovují soustavě rovnic

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{4},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \ldots + \frac{n^2}{x_n} = n^2(n+1)^2.$$

Riešenie. Predpokladajme, že n-tica kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovuje rovniciam (1) a (2). Označíme $a_i = \sqrt{x_i}$, $b_i = \frac{i}{\sqrt{x_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Podľa Cauchyho nerovnosti platí

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Z druhej strany podľa (1) a (2) platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{x_i} = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Teda v Cauchyho nerovnosti (3) platí rovnosť. Vieme, že pre kladné číslo platí v Cauchyho nerovnosti rovnosť práve vtedy, keď existuje kladné číslo t také, že $a_i = tb_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda $\sqrt{x_i} = t \cdot \frac{i}{\sqrt{x_i}}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda $x_i = t \cdot i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dosadením do rovnice (1) dostaneme

$$t = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Zistili sme, že ak n-tica kladných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovuje rovniciam (1) a (2), tak

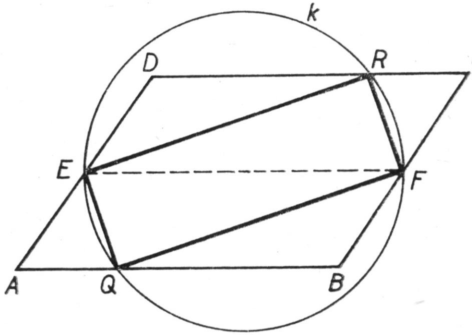
$$(4) \qquad x_i = \frac{i}{2n(n+1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že n-tica (4) je riešením rovníc (1) a (2).

Dokažte: Ke každému rovnoběžníku existuje pravoúhelník v něm obsažený, jehož obsah je větší nebo roven jedné polovině obsahu původního rovnoběžníku.

Riešenie. Nech *ABCD* je rovnobežník. Môžeme predpokladať $|AB| \geqq |BC|$. Nech *E*, *F* sú stredy strán *AD*, *BC* (pozri obr. 37). Nech *k* je kružnica nad priemerom *EF*. Polomer kružnice *k* je rovný $\frac{1}{2}\,|AB|$. Vzdialenosť priamok *AB*, *DC* od priemeru *EF* je nie väčšia ako $\frac{1}{2}\,|BC|$, teda nie väčšia ako polomer kružnice *k*. Kružnica *k* teda pretína priamky *AB*, *DC* aspoň v jednom bode. Naviac aspoň po jednom z týchto priesečníkov je na úsečkách *AB*, *DC*. Nech *Q* je priesečník kružnice *k* s úsečkou *AB* a *R* je priesečník kružnice *k* s úsečkou *DC*, a to taký, že *QR* je priemer kružnice *k*.

Štvoruholník *EQFR* je pravouholník (uhly *ERF*, *EQF* sú obvodové uhly nad priemerom *EF*) a jeho obsah je rovný polovici obsahu rovnobežníka *ABCD*.



Obr. 37

A - II - 3b

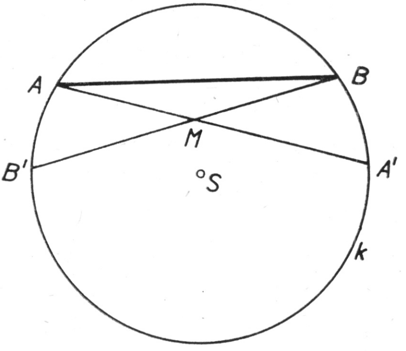
V rovine je daná kružnica k s polomerom 1, do ktorej je vpísaný pravidelný 1982-uholník. Nech M je pevný bod, ktorý leží v jeho vnútri. Potom existujú dva vrcholy A, B tohto 1982-uholníka také, že platí

$$\left(1 - \frac{2}{1982}\right)\pi \leqq \sphericalangle AMB < \pi.$$

Dokážte.

Riešenie. Ak A, B sú vrcholy mnohouholníka, ktoré nie sú susedné, tak úsečku AB nazveme uhlopriečkou. Uhlopriečok je konečný počet. Špeciálne teda, v našom 1 982-uholníku existuje uhlopriečka AB taká, že bod M na nej neleží, ale je k uhlopriečke AB najbližšie, tj. ak XY je iná uhlopriečka neobsahujúca bod M, tak vzdialenosť bodu M od XY nie je menšia ako vzdialenosť bodu M od AB.

Označíme A', B' druhé priesečníky priamok AM, BM



Obr. 38

s kružnicou k (pozri obr. 38). Vnútri (kratšieho) oblúku BA' neleží žiadny vrchol 1982-uholníka. Ak by tam ležal vrchol X, tak uhlopriečka AX by bola bližšie k bodu M ako uhlopriečka AB. Z rovnakých dôvodov neleží žiadny vrchol 1982-uholníka vnútri kratšieho oblúku AB'. Keďže pre dva susedné vrcholy X, Y nášho mnohouholníka platí $\sphericalangle XSY = \frac{2\pi}{1982}$ (S je stred kružnice k), tak nutne $\sphericalangle ASB' \leqq \frac{2\pi}{1982}$, $\sphericalangle BSA' \leqq \frac{2\pi}{1982}$. Bod M neleží na priamke AB, takže $\sphericalangle AMB < \pi$. Z druhej strany

$$\sphericalangle ABB' = \tfrac{1}{2} \sphericalangle ASB'$$

a

$$\sphericalangle A'AB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle BSA'.$$

Teda

$$\sphericalangle AMB = \pi - (\sphericalangle A'AB + \sphericalangle ABB') = \pi - \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot (\sphericalangle ASB' + \sphericalangle BSA') \geqq \pi - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{1982} = \pi \left(1 - \frac{2}{1982}\right).$$

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

Je dán čtyřstěn $ABCD$ a uvnitř čtyřstěnu body K, L, M, N, které neleží v rovině. Předpokládejme, že také těžiště P, Q,

R, S čtyřstěnů $KBCD$, $ALCD$, $ABMD$, $ABCN$ neleží v rovině, a označme T těžiště čtyřstěnu $ABCD$, T_0 těžiště čtyřstěnu $PQRS$ a T_1 těžiště čtyřstěnu $KLMN$.

a) Dokažte, že body T, T_0, T_1 leží v jedné přímce.

b) Určete poměr $|T_0T| : |T_0T_1|$.

Riešenie. Zvolíme si sústavu súradníc. Nech a, b, c, d sú x-ové súradnice bodov A, B, C, D, k, l, m, n, p, q, r, s, t, t_0, t_1 sú x-ové súradnice bodov K, L, M, N, P, Q, R, S, T, T_0, T_1. Súradnica ťažiska je aritmetický priemer súradníc vrcholov štvorstena, teda

$$t = \frac{a + b + c + d}{4},$$

$$p = \frac{k + b + c + d}{4},$$

$$q = \frac{a + l + c + d}{4},$$

$$r = \frac{a + b + m + d}{4},$$

$$s = \frac{a + b + c + n}{4},$$

$$t_0 = \frac{p + q + r + s}{4},$$

$$t_1 = \frac{k + l + m + n}{4}.$$

Z uvedených rovníc ľahko dostaneme

$$t_0 = \frac{t_1 + 3t}{4}.$$

Rovnaké vzťahy dostaneme aj pre y-ové a z-ové súradnice. Teda bod T_0 leží na úsečke T_1T a delí ju v pomere 1 : 3, T_0 je bližšie k bodu T. Ak T_1 splýva s bodom T, tak pomer $|T_0T| : |T_0T_1|$ nie je definovaný. Ak $T_1 \neq T$, tak z uvedeného vyplýva

$$|T_0T| : |T_0T_1| = 1 : 3.$$

A - III - 2

Dané sú reálne čísla $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Označíme M maximum ich absolútnych hodnôt. Dokážte, že platí

$$(1) \quad |x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 - x_3x_4| \leqq 4M^2.$$

Riešenie. Jednoduchými úpravami postupne dostaneme

$$|x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 - x_3x_4| =$$

$$= |x_1(x_4 - x_5) + x_2(x_5 - x_6) + x_3 \,.\, (x_6 - x_4)| \leqq$$

$$\leqq |x_1| \,.\, |x_4 - x_5| + |x_2| \,.\, |x_5 - x_6| + |x_3| \,.\, |x_6 - x_4| \leqq$$

$$\leqq M(|x_4 - x_5| + |x_5 - x_6| + |x_6 - x_4|).$$

Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že platí $x_4 \leqq x_5 \leqq x_6$. Potom

$$|x_4 - x_5| + |x_5 - x_6| + |x_6 - x_4| = x_5 - x_4 +$$

$$+ x_6 - x_5 + x_6 - x_4 = 2(x_6 - x_4) \leqq 4M.$$

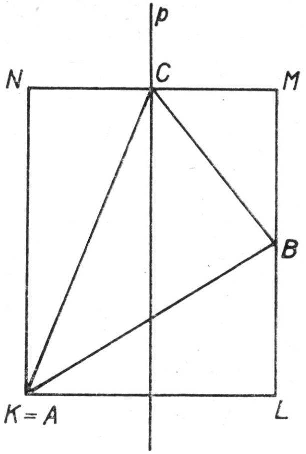
Z uvedených výpočtov už vyplýva nerovnosť (1).

Iné riešenie. Výraz na ľavej strane nerovnosti (1) je rovný dvojnásobku obsahu trojuholníka ABC, kde $A = [x_1, x_6]$, $B = [x_2, x_4]$, $C = [x_3, x_5]$. Zostrojíme pravouholník $KLMN$ taký, že jeho strany budú rovnobežné s osami súradnicovej sústavy a trojuholník ABC je vpísaný do pravouholníka $KLMN$, tj. body A, B, C ležia na stranách pravouholníka a $KLMN$ je najmenší možný. Dokážeme pomocné tvrdenie: Obsah P trojuholníka ABC je menší alebo rovný polovici obsahu Q pravouholníka $KLMN$.

Skutočne, ak dva z bodov A, B, C ležia na jednej strane pravouholníka $KLMN$, napr. body A, B na strane KL, tak $P = \frac{1}{2}\,|AB|\,.\,v$. Pritom výška v je menšia alebo rovná $|LM|$. Teda

$$P \leqq \tfrac{1}{2}\,|KL|\,.\,|LM| = \tfrac{1}{2}\,Q.$$

Ak na žiadnej strane neležia dva vrcholy trojuholníka ABC, tak až na označenie, musí byť napr. vrchol $A = K$, vrchol B leží na strane LM a vrchol C leží na strane MN. Vedieme priamku p rovnobežnú so stranou KN cez bod C (pozri obr. 39). Priamka p rozdelí trojuholník ABC na dva trojuholníky a pravouholník $KLMN$ na dva pravouholníky. Podľa predchádzajúceho novoutvorené trojuholníky majú obsah menší ako polovica obsahu odpovedajúcich pravouholníkov, a teda aj pre ich súčet platí $P \leqq \frac{1}{2}\,Q$.



Obr. 39

K dôkazu nerovnosti (1) si stačí uvedomiť, že dĺžka strán pravouholníka $KLMN$ nie je väčšia ako $2M$.

Podľa riešení *Petra Coufa,* žiaka IV. D triedy
Gymnázia W. Piecka v Prahe,
a *Vladana Pecha,* žiaka III. C triedy
Gymnázia M. Koperníka v Bílovci.

A - III - 3

V rovině se souřadnicemi x, y najděte příklad konvexní množiny **M**, která obsahuje nekonečně mnoho mřížových bodů (tj. bodů s celočíselnými souřadnicemi), ale přitom na každé přímce v té rovině leží jen konečně mnoho mřížových bodů z **M**.

Riešenie. Nech k je kladné iracionálne číslo, napr. $k = \sqrt{2}$. Ukážeme, že množina **M** všetkých bodov medzi priamkami $y = kx$ a $y = kx + 1$ má uvedenú vlastnosť.

Množina **M** je zrejme konvexná. Každá priamka, ktorej smernica nie je k, pretína množinu **M** v úsečke, a teda obsahuje len konečne mnoho mrežových bodov množiny **M**. Na priamke so smernicou k leží najviac jeden mrežový bod. Skutočne, keby na priamke $y = kx + q$ ležali dva rôzne mrežové body o súradniciach $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$, tak sa ľahko vypočíta, že

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

čo nie je možné, lebo k je iracionálne číslo.

Zostáva ukázať, že množina **M** obsahuje nekonečne mnoho mrežových bodov. Vieme, že existuje postupnosť racionálnych čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že k_n má desiatkový rozvoj ukončený na n-tom mieste a $0 \leqq k_n < k < k_n + 10^{-n}$. Potom platí

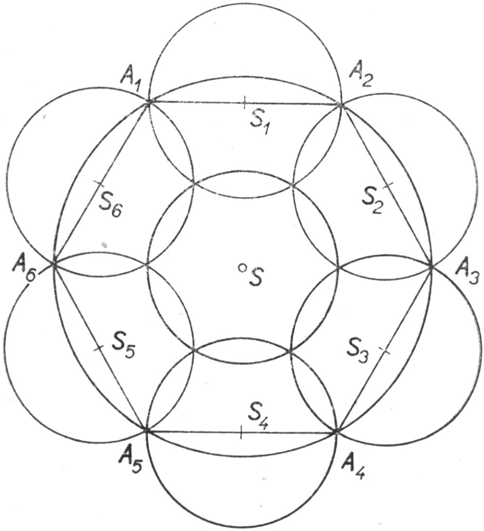
$$k.10^n < k_n.10^n + 1 < k.10^n + 1.$$

Naviac, číslo $k_n.10^n + 1$ je číslo prirodzené. Teda množina **M** obsahuje nekonečne mnoho mrežových bodov $[10^n; k_n.10^n + 1]$, $n = 1, 2, \ldots$.

A - III - 4

V kruhu o poloměru 1 je zvoleno 64 navzájem různých bodů. Dokažte, že z nich lze vybrat 10 navzájem různých bodů, které leží v některém kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$.

Riešenie. Nech k je kružnica, ktorá ohraničuje skúmaný kruh K so stredom S a polomerom 1. Nech $S_1, \ldots, S_6$ sú stredy strán vpísaného pravidelného šesťuholníka $A_1A_2A_3$-$A_4A_5A_6$ do kružnice k (pozri obr. 40). Ukážeme, že kruhy so stredmi S, $S_1, \ldots, S_6$ a polomerom $\frac{1}{2}$ pokrývajú kruh K.



Obr. 40

Uvažujme bod X ležiaci v kruhu K. Bod X leží v niektorom z uhlov A_1SA_2, $A_2SA_3, \ldots, A_6SA_1$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že X leží v uhle A_1SA_2. Uvažujme najprv prípad, keď bod X leží mimo trojuholníka A_1SA_2. Označíme α veľkosť uhla S_1SX (pozri obr. 41).

Zrejme $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{6}$. Podľa kosínusovej vety platí

(1) $$|S_1X|^2 = |S_1S|^2 + |SX|^2 - 2 . |S_1S| . |SX| . \cos \alpha.$$

Keďže $|S_1S| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tak platí

(2) $$|S_1X|^2 = \frac{3}{4} + |SX|^2 - \sqrt{3} . |SX| . \cos \alpha.$$

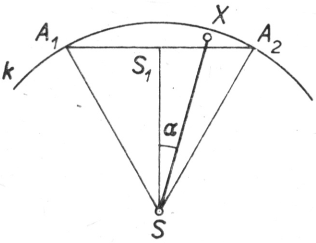
Bod X leží v kruhu K, teda $|SX| \leqq 1$. Z predpokladu, že bod X neleží v trojuholníku A_1A_2S, vyplýva $|SX| . \cos \alpha \geqq$ $\geqq |SS_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Z rovnosti (2) dostávame

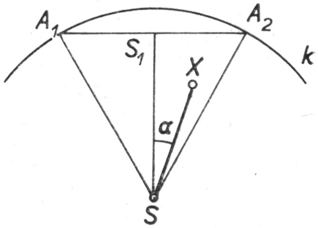
$$|S_1X|^2 \leqq \frac{3}{4} + 1 - \sqrt{3} . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}.$$

Takže bod X leží v kruhu o strede S_1 a polomere $\frac{1}{2}$.

Teraz uvažujme prípad, keď bod X leží v trojuholníku A_1A_2S. Nech naviac $|SX| < \frac{1}{2}$. Ak α je veľkosť uhla XSS_1,



Obr. 41



Obr. 42

tak (pozri obr. 42) z kosínusovej vety dostávame znovu vzťah (1). Keďže $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{6}$, tak

$$(3) \qquad |S_1S| \cos \alpha \geqq |S_1S| \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Označíme $x = |SX|$. Podľa predpokladu je $\frac{1}{2} < x \leqq 1$. Po dosadení do (1) a použitím (3) dostaneme

$$(4) \qquad |S_1X|^2 \leqq \frac{3}{4} + x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} x = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}.$$

Výraz $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ v intervale $\left(\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ nadobúda najväčšiu hodnotu $\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$. Podľa (4) teda

$$|S_1X|^2 \leqq \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}.$$

Takže bod X leží v kruhu o strede S_1 a polomere $\frac{1}{2}$.

Keďže v kruhu K leží 64 zvolených bodov, K je pokrytý siedmymi kruhmi o polomere $\frac{1}{2}$, aspoň v jednom z týchto siedmych kruhov leží 10 bodov. Keby totiž každý zo siedmych kruhov obsahoval najviac 9 zo zvolených bodov, tak by ich bolo spolu nie viac ako $7 . 9 = 63$.

A - III - 5

Daná je postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $a_n \neq a_m$ pre $n \neq m$, dané je prirodzené číslo k. Zostrojte prosté zobrazenie P množiny $1, 2, \ldots, 20k$ do množiny prirodzených čísel také, aby platilo

$$a_{P(1)} < a_{P(2)} < \ldots < a_{P(10)},$$

$$a_{P(10)} > a_{P(11)} > \ldots > a_{P(20)},$$

$$a_{P(20)} < a_{P(21)} < \ldots < a_{P(30)},$$

$$\vdots$$

$$a_{P(20k-10)} > a_{P(20k-9)} > \ldots > a_{P(20k)},$$

$$a_{P(10)} > a_{P(30)} > \ldots > a_{P(20k-10)},$$

$$a_{P(1)} < a_{P(20)} < \ldots < a_{P(20k)}.$$

Riešenie. Najprv prvých $20k$ členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zoradíme podľa veľkosti do rastúcej postupnosti. To znamená, že zostrojíme prosté zobrazenie R množiny $\{1, 2, \ldots, 20k\}$ na seba také, že

$$a_{R(1)} < a_{R(2)} < \ldots < a_{R(20k)}. \tag{1}$$

Zobrazenie P zostrojíme tak, že položíme $P(1) = R(1)$ a za čísla $P(2),\ldots,P(10)$ zvolíme deväť najväčších z čísel $R(1),\ldots, R(20k)$, za $P(11),\ldots,P(20)$ zvolíme desať najmenších z čísel $R(2),\ldots,R(20k)$, ale v klesajúcom poradí. Za $P(21),\ldots,P(30)$ volíme desať najväčších (z čísel $R(1),\ldots,R(20k)$), ktoré sme ešte nepoužili, a tak ďalej striedajúc zase desať najmenších v klesajúcom poradí za čísla $P(31),\ldots,P(40)$.

Teda (zabezpečujeme platnosť prvých dvoch riadkov a $a_{P(1)} > a_{P(20)}$):

$$P(1) = R(1),$$

$$P(2) = R(20k-8),\ P(3) = R(20k-7),\ldots,P(10) = R(20k),$$

$$P(11) = R(11),\ P(12) = R(10),\ldots,P(20) = R(2).$$

Ďalej definujeme v súlade s nerovnosťami v riadkoch $2i + 1$ a $2i + 2$:

$$P(20i + j) = R(20k - 10i - 9 + j) \quad \text{pre} \quad i = 1,2,\ldots,k - 1, \quad j = 1,2,\ldots,10,$$

$$P(20i + 10 + j) = R(10i + 12 - j) \quad \text{pre} \quad i = 1,2,\ldots, k - 1, \quad j = 1,2,\ldots, 10.$$

Ak $l = 2i + 1$ je nepárne, tak

$$P(10l) = P(20i + 10) = R(20k - 10i - 9 + 10) =$$

$$= R(20k - 10i + 1),$$

$$P(10l + 1) = P(20i + 10 + 1) = R(10i + 12 - 1) =$$

$$= R(10i + 11).$$

Keďže $2i < k$, tak $10i + 11 < 20k - 10i + 1$, a teda

$$a_{P(10l)} > a_{P(10l+1)} \, .$$

Pre l párne by sme postupovali podobne. Ukážeme ešte platnosť nerovnosti v predposlednom riadku. Podľa definície zobrazenia P platí

$$P(20i + 10) = R(20k - 10i + 1).$$

Keďže $20k - 10 + 1 > 20k - 20 + 1 > \ldots > 20k - 10(k - 1) + 1$, tak

$$a_{P(10)} > a_{P(30)} = a_{R(20k-10+1)} > a_{P(50)} = a_{R(20k-20+1)}$$

atď.

A - III - 6

Nechť n, k jsou daná přirozená čísla. Určete všechny uspořádané n-tice nezáporných reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které splňují soustavu rovnic

$$(1) \qquad x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = 1,$$

$$(2) \qquad (1 + x_1).(1 + x_2). \ldots .(1 + x_n) = 2.$$

Riešenie. Nech nezáporné čísla $x_1, \ldots, x_n$ vyhovujú rovniciam (1) a (2).

Keby bolo $x_i > 1$, tak $x_1^k + \ldots + x_n^k \geqq x_i^k > 1$, čo je spor s (1). Teda $0 \leqq x_i \leqq 1$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Takže pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $x_i^k \leqq x_i$.

Využijeme to, že čísla $x_1, \ldots, x_n$ sú nezáporné a z rovnice (2) postupne dostaneme

$$2 = (1 + x_1). \ldots .(1 + x_n) = 1 + (x_1 + \ldots + x_n) +$$

$$+ (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}\, x_n) + \ldots + x_1x_2. \ldots .x_n \geqq 1 +$$

$$+ (x_1 + \ldots + x_n) + (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}\, x_n) \geqq 1 +$$

$$+ (x_1^k + \ldots + x_n^k) + (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}\, x_n) \geqq 2 +$$

$$+ (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}\, x_n).$$

V uvedených nerovnostiach musí platiť rovnosť a teda musí platiť

$$x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n = 0.$$

Z toho vyplýva, že z čísel $x_1, \ldots, x_n$ môže byť najviac jedno nenulové. Ak všetky $x_1, \ldots, x_n$ okrem x_i sú rovné nule, tak z (1) vyplýva, že $x_i = 1$. Teda n-tica $x_1, \ldots, x_n$ musí byť niektorá z n-tíc

$$(3) \qquad \begin{array}{c} 1, 0, 0, 0, \ldots, 0 \\ 0, 1, 0, 0, \ldots, 0 \\ 0, 0, 1, 0, \ldots, 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0, 0, 0, \ldots, 0, 1\,. \end{array}$$

Skúškou sa presvedčíme, že uvedené n-tice sú riešením rovníc (1) a (2).

Podľa riešenia *J. Sgalla,* žiaka III. D triedy
Gymnázia W. Piecka v Prahe.

Iné riešenie. Ľahko vidieť, že n-tice (3) sú riešením rovníc (1) a (2). Matematickou indukciou ukážeme, že rovnice (1) a (2) iné riešenia nemajú.

Pre $n = 1$ rovnice (1) a (2) majú tvar

$$x_1^k = 1,$$

$$1 + x_1 = 2,$$

a teda $x_1 = 1$ je jediné riešenie.

Predpokladajme, že sústava (1) a (2) nemá iné riešenia ako (3), a skúmajme sústavu

(4) $$x_1^k + \ldots + x_{n+1}^k = 1,$$

(5) $$(1 + x_1). \ldots .(1 + x_{n+1}) = 2.$$

Z rovnice (4) vyplýva, že $0 \leqq x_i \leqq 1$ pre $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, a teda $0 \leqq x_i^k \leqq x_i$. Potom tiež

$$x_1 + \ldots + x_{n+1} \geqq 1.$$

Z rovnice (5) dostaneme

$$2 = (1 + x_1). \ldots .(1 + x_{n+1}) = 1 + (x_1 + \ldots + x_{n+1}) +$$

$$+ \ldots + x_1x_2. \ldots .x_{n+1} \geqq 1 + 1 + x_1.x_2. \ldots .x_{n+1}.$$

Teda $x_1.x_2. \ldots .x_{n+1} = 0$. Teda jedno z čísel $x_1, x_2, \ldots,$ x_{n+1} musí byť rovné nule, napr. $x_{n+1} = 0$. Potom dosadením do rovníc (4) a (5) dostaneme pre čísla $x_1, \ldots, x_n$ rovnice (1) a (2). O tých už vieme, že majú riešenia (3). Teda rovnice (4) a (5) majú riešenia $n + 1$-tice núl a jednej jednotky.

Podľa riešenia *L. Kouby,* žiaka IV. D triedy
Gymnázia W. Piecka v Prahe.