31. ročník matematické olympiády

Korespondenční seminář ÚV MO

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor): 31. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1981-1982. 23. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. pp. 148–151.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404759

Korespondenční seminář ÚV MO

Jednou z forem péče o žáky talentované v matematice, kteří nejsou z Prahy ani z Bratislavy, a nemají tudíž možnost pracovat v tamních seminářích, jsou korespondenční semináře. ÚV MO pořádal v průběhu 31. ročníku MO celostátní korespondenční seminář, jehož se zúčastnilo 37 žáků. Bylo jim zasláno ve třech tématech celkem 17 úloh. Řešení účastníků semináře opravovali pracovníci MÚ ČSAV v Praze a opravená řešení se žákům vracela spolu s rozmnoženým komentářem ke každé úloze. Správnost řešení se bodovala, nejlepšími účastníky celostátního korespondenčního semináře ve školním roce 1981/82 byli:

Vladan Pecha, 3. ročník gymnázia M. Koperníka v Bílovci,
Galina Kumičáková, 4. ročník gymnázia v Košicích, Kováčská ul.,
Jaroslav Šindelář, 4. ročník gymnázia v Teplicích,
Ľubomír Šoltés, 4. ročník gymnázia v Michalovcích.

Uvádíme znění všech úloh korespondenčního semináře ÚV MO.

Posloupnosti

1.1 Posloupnost $\{p_n\}$ je rekurentně definována takto: $p_1 = 2$, pro $n > 1$ je p_n největší prvočíselný dělitel čísla

$$p_1 p_2 \ldots p_{n-1} + 1.$$

Dokažte, že žádný člen posloupnosti p_n není roven 5.

1.2 Je dáno přirozené číslo k. Sestavte k-člennou posloupnost $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ tak, aby pro každé i $(0 \leqq i \leqq k - 1)$ byl člen a_i roven počtu členů rovných i.

1.3 Je dáno přirozené číslo n, $(n \geqq 2)$. Definujeme n-členné posloupnosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ rekurentně: $x_1 = n$, $y_1 = 1$, pro $i \geqq 1$ je

$$x_{i+1} = \left[\frac{1}{2}(x_i + y_i)\right], \quad y_{i+1} = \left[\frac{n}{x_i + 1}\right].$$

Dokažte, že nejmenší z členů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je roven $[\sqrt{n}]$. ([ ] znamená celou část čísla.)

1.4 Nechť $\{a_n\}$ je neklesající posloupnost přirozených čísel taková, že posloupnost $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ je neomezená. Dokažte, že nekonečně mnoho členů posloupnosti $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ jsou celá čísla.

1.5 Dokažte, že z každé posloupnosti přirozených čísel lze vybrat posloupnost, jejíž každé dva členy jsou nesoudělné, nebo posloupnost, jejíž všechny členy mají společného dělitele většího než 1.

1.6 Je dána posloupnost přirozených čísel taková, že pro každé přirozené číslo n součet členů, které nejsou větší než n, není menší než n. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu k existuje její vybraná posloupnost, která má součet členů roven k.

1.7 Je dáno reálné číslo a. Posloupnost $\{a_n\}$ je rekurentně definována takto: $a_1 = a$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{a_n}\right)$ pro $a_n \neq 0$, $a_{n+1} = 0$ pro $a_n = 0$. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ obsahuje nekonečně mnoho nekladných členů.

Geometrie

2.1 ABC je rovnoramenný trojúhelník, $|AC| = |BC|$, k je kružnice se středem C, jejíž poloměr je menší než $|AC|$. Najděte na k všechny body T, pro které je tečna kružnice k v bodě T osou úhlu ATB.

2.2 Je dána kružnice k se středem O, na ní body A, B, $A \neq B$, AB není průměrem kružnice k, NN' je průměr kolmý k AB, přičemž N leží na menším oblouku kružnice k s krajními body A, B. Označme M průsečík tětiv NN', AB. Nechť P je libovolný bod většího oblouku, $P \neq A, B, N'$. Dále je PQ tětiva kružnice k procházející bodem M, a R průsečík tětiv AB, PN. Dokažte, že $|QM| < |RN|$.

2.3 ABC, AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 jsou čtyři rovnostranné trojúhelníky ležící v jedné rovině a stejně orientované. Dokažte, že středy úseček A_1C_2, B_1A_2, C_1B_2 tvoří rovnostranný trojúhelník.

2.4 $ABCDE$ a $A_1B_1C_1D_1E_1$ jsou dva pravidelné pětiúhelníky ležící v jedné rovině a stejně orientované, přičemž $A = A_1$. Dokažte, že přímky BB_1, CC_1, DD_1 a EE_1 procházejí jedním bodem.

2.5 Strany trojúhelníku jsou a, b, c, $r = a^2 + b^2 + c^2$, $s = (a + b + c)^2$. Dokažte, že $2r < s \leqq 3r$.

3.1 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nechť je konečná posloupnost nezáporných čísel, pro kterou platí: $a_1 \leqq a_2 \leqq 2a_1$, $a_2 \leqq a_3 \leqq 2a_2$, $\ldots$, $a_{n-1} \leqq a_n \leqq 2a_{n-1}$. Dokažte, že existuje konečná posloupnost $b_1, b_2, \ldots, b_n$, pro kterou platí: b_i se rovná 1 nebo -1 a $0 \leqq b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n \leqq a_1$.

3.2 Budiž n přirozené číslo, x libovolné přirozené číslo menší nebo rovné $n!$. Potom existují přirozená čísla k, a_1, a_2, $\ldots$, a_k taková, že platí následující podmínky: $k \leqq n$, a_i dělí $n!$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ a $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

3.3 Vrcholy neorientovaného grafu (bez smyček) obarvujeme několika různými barvami tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu. Dokažte: Jestliže existuje přirozené číslo n takové, že z každého vrcholu daného grafu vychází nejvýše n hran, potom je možno vrcholy obarvit $n + 1$ barvami.

3.4 Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí: Součet žádných n po sobě jdoucích členů Fibonacciovy posloupnosti není dělitelný třemi.

Fibonacciova posloupnost přirozených čísel je definována vztahy $a_1 = a_2 = 1$, $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ pro všechna $k > 1$.

3.5 V rovině je dána jednotková čtvercová síť. Uvažujme mnohoúhelník (ne nutně konvexní) s vrcholy ve vrcholech sítě, jehož hranice je jediná lomená čára, která sama sebe neprotíná. Označme P obsah tohoto mnohoúhelníku, V počet mřížových bodů ležících uvnitř a S počet mřížových bodů ležících na hranici tohoto mnohoúhelníku. Dokažte, že pro každý takový mnohoúhelník platí

$$\tfrac{1}{2} S + V - P = 1.$$