32. ročník matematické olympiády

Kategorie B

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); František Zítek (editor): 32. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1982/83. 24. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. pp. 73–89.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404770

ÚLOHY I. KOLA — DOMÁCÍ ČÁST

B - I - 1

Dokažte, že žádné z čísel $3^{1982} + 2^{1981}$ a $3^{1982} - 2^{1981}$ není prvočíslo.

Řešení. Dokážeme, že první číslo je dělitelné jedenácti a druhé sedmi. Je totiž $3^{1982} + 2^{1981} = (3^2)^{991} + 2^{1981} = (11 - 2)^{991} + 2^{1981} = 11\,T - 2^{991} + 2^{1981} = 11\,T + 2^{991}(2^{990} - 1)$. Nyní stačí dokázat, že číslo $2^{990} - 1$ je dělitelné číslem 11. Je $2^{990} - 1 = (2^{10})^{99} - 1 = 1024^{99} - 1 = (1024 - 1)\,Q$, kde Q je stejně jako T číslo přirozené. A protože je 1 023 dělitelné jedenácti, je první část úlohy dokázána. Vezmeme druhé ze zadaných čísel. Je $3^{1982} - 2^{1981} = (7 + 2)^{991} - 2^{1981} = 7\,R + 2^{991} - 2^{1981} = 7\,R - 2^{991}\,[(2^3)^{330} - 1]$ a $8^{330} - 1 = (8 - 1)\,S$, čísla R, S jsou přirozená. První číslo je tedy dělitelné jedenácti, druhé sedmi a přitom se těmto číslům nerovnají, jsou mnohem větší. Proto to nejsou prvočísla.

B - I - 2

Určete množinu všech bodů v rovině, která je grafem relace

$$G = \left\{[x, y] \in \mathsf{R} \times \mathsf{R} : (x - m)^2 + (y - n)^2 \leqq \right.$$

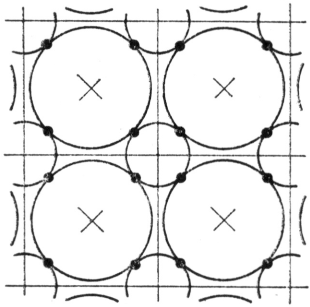
$$\leqq \frac{1}{16} \wedge \left(x - \frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} - q\right)^2 \leqq \frac{(2\sqrt{2} - 1)^2}{16}$$

$$\left.\text{pro některá celá čísla } m, n, p, q\right\} .$$

Řešení. Pro reálná čísla m, n je množinou všech bodů $[x, y]$, splňující podmínku $(x - m)^2 + (y - n)^2 \leqq \frac{1}{16}$, kruh se středem v bodě $[m, n]$ o poloměru $\frac{1}{4}$. Podobně je množinou všech bodů, jejichž souřadnice x, y splňují nerovnici

$$\left(x - \frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} - q\right)^2 \leqq \frac{(2\sqrt{2} - 1)^2}{16}$$

kruh se středem $\left[p + \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2}\right]$ o poloměru $\frac{2\sqrt{2} - 1}{4}$. Bod $[x, y]$ patří tedy do grafu relace G právě tehdy, leží-li v některém kruhu o poloměru $\frac{1}{4}$, jehož střed má celočíselné souřadnice, a současně patří bod $[x, y]$ do některého kruhu o poloměru $\frac{2\sqrt{2} - 1}{4}$, přičemž souřadnice středu tohoto kruhu se liší od celého čísla o $\frac{1}{2}$. Můžeme také říci, že střed tohoto kruhu splývá se středem jednotkového čtverce, jehož vrcholy mají celočíselné souřadnice. Budeme stručně mluvit o kruzích první soustavy a kruzích druhé soustavy. Bod patří do grafu relace G právě tehdy, patří-li do některého kruhu první soustavy a zároveň do některého kruhu soustavy druhé. Každý kruh jedné soustavy se dotýká čtyř kruhů druhé soustavy (obr. 18). Hledaná množina se skládá ze všech takto obdržených bodů dotyku, tedy ze všech bodů



Obr. 18

$$\left[m + \frac{\sqrt{2}}{8}, n + \frac{\sqrt{2}}{8}\right], \left[m + \frac{\sqrt{2}}{8}, n - \frac{\sqrt{2}}{8}\right],$$

$$\left[m - \frac{\sqrt{2}}{8}, n + \frac{\sqrt{2}}{8}\right], \left[m - \frac{\sqrt{2}}{8}, n - \frac{\sqrt{2}}{8}\right],$$

kde m, n jsou celá čísla.

B - I - 3

Lineárním mnohočlenem tří proměnných x, y, z rozumíme funkci tvaru $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz + d$, kde a, b, c, d

jsou reálná čísla, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Čísla a, b, c, d se nazývají koeficienty mnohočlenu. Zjistěte, zda existují takové lineární mnohočleny L_1, L_2, L_3, L_4 tří proměnných x, y, z s reálnými koeficienty, aby pro všechny $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$ platilo $L_1(x, y, z) \,.\, L_2(x, y, z) + L_3(x, y, z) \,.\, L_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

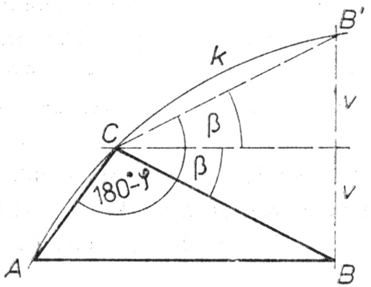
Řešení. Nulovým bodem mnohočlenu $R(x, y, z)$ tří proměnných nazýváme takovou uspořádanou trojici (x_0, y_0, z_0) reálných čísel, pro kterou platí $R(x_0, y_0, z_0) = 0$. Předpokládejme, že mnohočleny L_1, L_2, L_3, L_4 s vlastností popsanou v textu úlohy existují. Protože mnohočlen $P(x, y, z) = L_1(x, y, z).L_2(x, y, z) + L_3(x, y, z).L_4(x, y, z)$ se má pro každou trojici reálných čísel (x, y, z) rovnat mnohočlenu $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, musí mít oba mnohočleny stejné nulové body. Mnohočlen Q má však jediný nulový bod, je jím trojice $(0, 0, 0)$. Je tedy také $P(x, y, z) = 0$ pouze pro $x = y = z = 0$. Má-li některý z mnohočlenů L_1, L_2 společný nulový bod s některým z mnohočlenů L_3, L_4, je to též nulový bod mnohočlenu P. Proto nemůže mít žádná z dvojic mnohočlenů (L_1, L_3), (L_1, L_4), (L_2, L_3) nebo (L_2, L_4) společný nulový bod různý od bodu $(0, 0, 0)$. Je-li $L_1(x, y, z) = ax + by + cz + d$, musí se L_3 rovnat až na nenulový násobek mnohočlenu $ax + by + cz + d_3$, kde je $d_3 \neq d$. V opačném případě by měly mnohočleny L_1 a L_3 dokonce nekonečně mnoho společných nulových bodů. Je tedy $L_3(x, y, z) = p(ax + by + cz + d_3)$, podobně $L_4(x, y, z) = q(ax + by + cz + d_4)$ a také $L_2(x, y, z) = r(ax + by + cz + d_2)$, kde $pqr \neq 0$, $d_3 \neq d$, $d_4 \neq d$, $d_2 \neq d_3$, $d_2 \neq d_4$. Protože je $P(0, 0, 0) = 0$, je $drd_2 + d_3d_4pq = 0$ a $P(x, y, z) = (r + pq)(ax + by + cz)^2 +$

$+ (dr + d_2r + pqd_3 + pqd_4)(ax + by + cz)$. Mnohočlen $ax + by + cz$ má však nekonečně mnoho nulových bodů, a tím jsme došli ke sporu. Lineární mnohočleny L_1, L_2, L_3, L_4 požadované vlastnosti neexistují.

B - I - 4

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka strany c, výška v na stranu c a rozdíl φ úhlů při vrcholech A, B hledaného trojúhelníku.

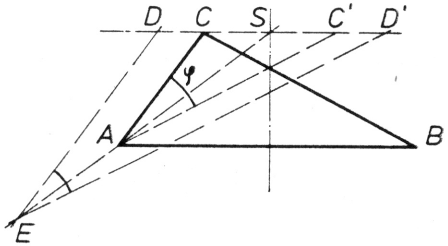
Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $\alpha > \beta$, tedy $\varphi > 0$. Předpokládejme, že trojúhelník ABC má požadované vlastnosti. Bodem C veďme přímku p rovnoběžnou s přímkou AB. Nechť je B' bod souměrně sdružený k bodu B podle přímky p. Pak je úhel ABB' pravý a úhel ACB' má velikost $\gamma + 2\beta = 180° - \varphi$ (obr. 19). Z popsaného rozboru již vyplývá konstrukce. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABB' s pravým úhlem při vrcholu B tak, že $|AB| = c$, $|BB'| = 2v$. Nad úsečkou AB' sestrojíme v polorovině opačné k polorovině $AB'B$ kruhový oblouk k, který



Obr. 19

je množinou všech těch bodů X této poloroviny, pro něž platí $|\sphericalangle AXB'| = 180° - \varphi$. Vrchol C je pak průnikem oblouku k a přímky p, která je osou úsečky BB'. Úloha má vždy právě jedno řešení.

Jiné řešení využívá stejnolehlosti. Předpokládejme, že trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy. Nechť je C' bod souměrně sdružený k bodu C podle osy o úsečky AB (obr. 20).

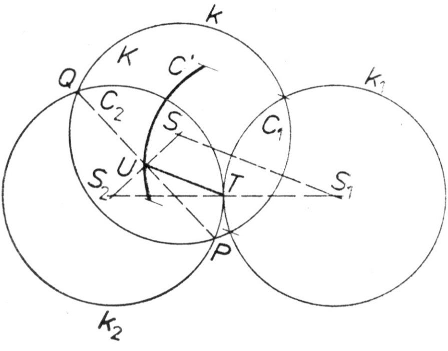


Obr. 20

Potom má úhel BAC' velikost β, a tedy úhel CAC' velikost φ. Toho využijeme při konstrukci trojúhelníku ABC. Sestrojíme úsečku AB délky c a na její ose o zvolíme bod S tak, aby měl od přímky AB vzdálenost v. Dále zvolíme úsečku DD' tak, aby byla rovnoběžná s přímkou AB a bod S byl jejím středem. Na polopřímce SA zvolíme bod E tak, aby $|\sphericalangle DED'| = \varphi$. Trojúhelník DED' je s hledaným trojúhelníkem CAC' stejnolehlý, středem stejnolehlosti je bod S. Stačí tedy bodem A vést rovnoběžku s přímkou ED; její průsečík s přímkou DD' je vrchol C hledaného trojúhelníku.

V kruhu K o poloměru 1 leží kruhový oblouk C_1 o tomtéž poloměru, jehož krajní body leží oba na hraniční kružnici kruhu K. Oblouku C_1 se dotýká další kruhový oblouk C_2 o poloměru 1, který leží v kruhu K a jehož krajní body P, Q leží na hraniční kružnici kruhu K. Najděte množinu středů tětiv PQ všech možných oblouků C_2 popsaných vlastností.

Řešení. Oblouk C_1 leží na kružnici k_1 se středem S_1, podobně oblouk C_2 je částí kružnice, kterou označíme k_2 a její střed S_2. Označme ještě k hraniční kružnici kruhu K a S její střed. Protože kružnice k, k_2 mají stejně velké poloměry a protínají se v bodech P, Q, splývá střed U úsečky PQ se středem úsečky SS_2. Obdobně splývá bod dotyku T oblouků C_1, C_2 se středem úsečky S_1S_2. Je tedy úsečka UT střední příčkou v trojúhelníku S_2SS_1 (obr. 21). Proto je bod U obrazem bodu T v posunutí, ve kterém se zobrazí bod S_1 na střed úsečky S_1S. Protože každý bod oblouku C_1



Obr. 21

je bodem dotyku oblouku C_1 a některého oblouku C_2 požadovaných vlastností, je množinou středů všech v textu úlohy popsaných úseček PQ oblouk C', který dostaneme z oblouku C_1 zmíněným posunutím.

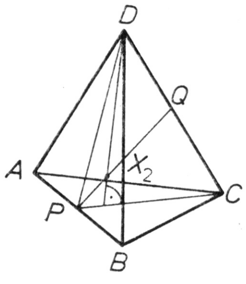
B - I - 6

Dvě protilehlé hrany h_1, h_2 čtyřstěnu jsou na sebe kolmé, jejich vzdálenost označíme v. Zbývající hrany čtyřstěnu jsou stejně dlouhé, jejich délku označíme d.

a) Ukažte, že výšky čtyřstěnu, které jsou vedeny krajními body hrany h_1, jsou různoběžné. Jejich průsečík označíme X_1. Podobně označíme X_2 průsečík výšek čtyřstěnu, které jsou vedeny krajními body hrany h_2.

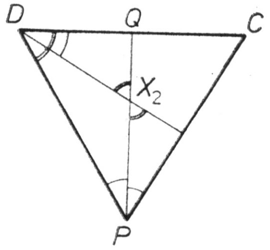
b) Dokažte, že vzdálenost bodů X_1 a X_2 závisí pouze na hodnotách v, d a že nezávisí na velikostech hran h_1, h_2.

Řešení. Označme vrcholy uvažovaného čtyřstěnu A, B, C, D a nechť AB, CD jsou ty hrany čtyřstěnu, které jsou na sebe kolmé, $|AB| = h_1$, $|CD| = h_2$. Trojúhelník ABC je rovnoramenný, proto jsou přímky AB a CP na sebe kolmé, když je P střed hrany AB (obr. 22). Stejně tak jsou kolmé



Obr. 22

přímky DP a AB, takže rovina CDP je kolmá na přímku AB. V této rovině leží tudíž výšky čtyřstěnu vedené body D, C, protože jsou též kolmé na přímku AB. Bod X_2 je proto průsečíkem výšek v trojúhelníku CDP, a leží tedy na spojnici PQ, kde Q je střed hrany CD. Z podobnosti trojúhelníků PQD a DQX_2 plyne $|QX_2| = \dfrac{(h_2)^2}{4v}$, protože $|PQ| = v$ (obr. 23). Podobně odvodíme, že $|PX_1| = \dfrac{(h_1)^2}{4v}$ a $|X_1X_2| = |v - |PX_1| - |QX_2||$. Z pravoúhlých trojúhelníků PCQ a PBC pak plyne



Obr. 23

$$|PC|^2 = v^2 + \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 = d^2 - \left(\frac{h_1}{2}\right)^2,$$

tedy

$$d^2 - v^2 = \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{2}\right)^2,$$

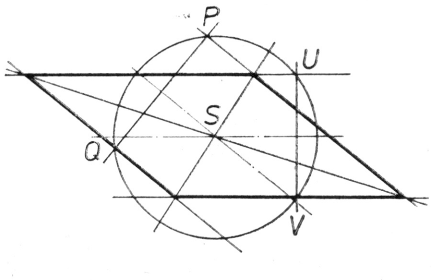
a proto $|X_1X_2| = \dfrac{|2v^2 - d^2|}{v}$. Vidíme, že výsledek závisí pouze na hodnotách v, d, což jsme měli dokázat.

ÚLOHY I. KOLA - ŠKOLNÍ ČÁST

B - S - 1

Úsečky PQ a UV jsou dvě tětivy kružnice o středu S, které nejsou spolu rovnoběžné. V bodech P a Q vedeme kolmice k přímce PQ, body U, V vedeme kolmice k přímce UV. Obdržené čtyři přímky tvoří rovnoběžník. Dokažte, že jeho úhlopříčky procházejí bodem S.

Řešení. Osy úseček PQ a UV jsou středními příčkami uvažovaného rovnoběžníku a procházejí středem S kružnice, protože to jsou osy tětiv kružnice o středu S (obr. 24). Je tedy

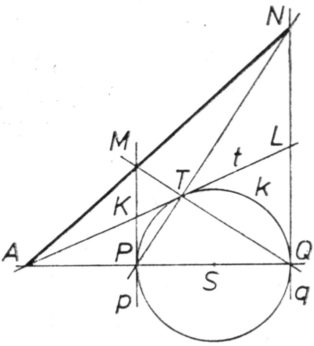


Obr. 24

bod S středem uvažovaného rovnoběžníku, a proto jím procházejí též obě jeho úhlopříčky.

V rovině je dána kružnice k o středu S a v její vnější oblasti bod A. Přímka t prochází bodem A a dotýká se kružnice k v bodě T. Označme P, Q průsečíky přímky AS s kružnicí k, tečny kružnice k v bodech P, Q označíme p, q. Průsečík přímek p a QT označíme M, průsečík přímek q a PT označíme N. Dokažte, že body M, N, A leží na přímce.

Řešení. Označme K průsečík přímek p, t (obr. 25) a obdobně L průsečík přímek q, t. Protože jsou přímky p, q rovno-



Obr. 25

běžné, prochází přímka MN právě tehdy bodem A, když platí $|NQ| : |MP| = |LQ| : |KP|$. V pravoúhlém trojúhelníku NTQ je $|TL| = |LQ|$, protože úseky na tečnách kružnice vedených bodem L jsou stejně dlouhé. Je tedy bod L středem přepony NQ. Stejně tak je bod K středem úsečky MP. Platí tudíž $|MP| = 2|KP|$ a $|NQ| = 2|LQ|$, a tím také výše uvedená úměra. Proto také leží body N, M, A na přímce.

B - S - 3a

Dokažte, že číslo

$$1\,984 \,.\, 12^4 - 1\,983 \,.\, 12^3 + 1\,982 \,.\, 12^2 - 1\,981 \,.\, 12$$

je dělitelné číslem 13.

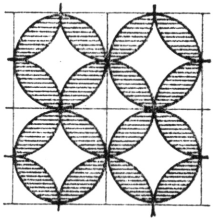
Řešení. Protože máme dokázat dělitelnost daného čísla číslem 13, napíšeme si číslo 12 jako $13 - 1$. Dané číslo napíšeme tedy ve tvaru $12[1\,984(13-1)^3 - 1\,983(13-1)^2 + 1\,982(13-1) - 1\,981] = 12[1\,984(13^3 - 3 \,.\, 13^2 + 3 \,.\, 13 - 1) - 1\,983(13^2 - 2 \,.\, 13 + 1) + 1\,982(13-1) - 1\,981] = 12(13a - 1\,984 - 1\,983 - 1\,982 - 1\,981)$, kde je a celé číslo. Stačí proto již jen dokázat, že je třinácti dělitelné číslo $1\,981 + 1\,982 + 1\,983 + 1\,984$, což je zřejmé, protože se tento součet rovná číslu $2 \,.\, 3\,965 = 2 \,.\, 13 \,.\, 305$.

B - S - 3b

V rovině se zvolenou kartézskou soustavou souřadnic určete množinu všech bodů $[x, y]$, pro které platí: existují celá čísla m, n tak, že $(x - m)^2 + (y - n)^2 = \frac{1}{4}$, a zároveň existují celá čísla r, s tak, že $\left(x - \frac{1}{2} - r\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} - s\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Řešení. První podmínka říká, že bod $[x, y]$ leží v některém kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, jehož střed má celočíselné souřadnice.

Druhá podmínka úlohy říká, že bod $[x, y]$ leží v některém kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, jehož střed má souřadnice $r + \frac{1}{2}$, $s + \frac{1}{2}$, kde r, s jsou libovolná celá čísla. Hledaná množina se tedy skládá ze všech průniků libovolného kruhu první skupiny s libovolným kruhem druhé skupiny (obr. 26).



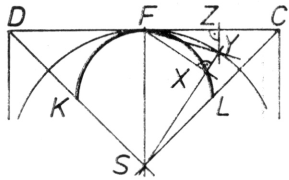
Obr. 26

ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

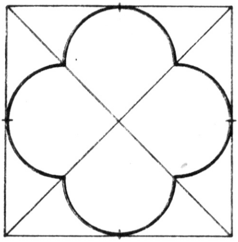
Je dán čtverec $ABCD$ se středem S a kružnice k, která je mu vepsána. Určete množinu všech bodů X s touto vlastností: k bodu X existuje na kružnici k bod Y tak, že bod X leží na úsečce SY a vzdálenost bodů X, Y se rovná vzdálenosti bodu Y od obvodu čtverce $ABCD$.

Řešení. Podle textu úlohy máme ke každému bodu Y kružnice k najít bod X tak, aby ležel na úsečce SY a aby se vzdálenost bodů X, Y rovnala vzdálenosti bodu Y od obvodu čtverce, a pak určit, co vyplní všechny takto obdržené body X. Uvažujme nejdříve jen ty body Y kružnice k, které leží zároveň v trojúhelníku DSC (obr. 27). Pro každý takový bod Y



Obr. 27

se jeho vzdálenost od obvodu čtverce rovná jeho vzdálenosti od přímky DC. Splývá-li bod Y se středem F úsečky DC, je $X = Y = F$. Pro $Y \neq F$ označme ještě Z patu kolmice vedené bodem Y k přímce DC. Trojúhelník YFS je rovnoramenný, proto je $|\sphericalangle SYF| = |\sphericalangle SFY|$. Z rovnoběžnosti přímek YZ a SF plyne $|\sphericalangle SFY| = |\sphericalangle ZYF|$, tedy $|\sphericalangle XYF| = |\sphericalangle ZYF|$. Podle věty *sus* jsou tedy trojúhelníky ZYF a XYF shodné, proto jsou přímky FX a XS kolmé. Vidíme, že body X leží podle Thaletovy věty na kružnici nad průměrem SF, a protože leží též v trojúhelníku DSC, leží body X na polokružnici nad průměrem KL, která obsahuje bod F, přičemž K, L jsou středy úseček SD, SC. Nechť je obráceně X bod této polokružnice, Y průsečík polopřímky SX s kružnicí k a Z pata kolmice vedené bodem Y k přímce DC. Pak jsou trojúhelníky ZYF a XYF pravoúhlé se společnou přeponou YF. Stejně jako v předcházející části odvodíme shodnost úhlů ZYF a XYF, jde tedy o shodné pravoúhlé trojúhelníky. Proto je $|YZ| = |XY|$, a bod X je tudíž bodem hledané množiny. Probíhá-li tedy bod Y čtvrtkružnici, která je průnikem kružnice k a trojúhelníku DSC, probíhá bod X celou polokružnici nad průměrem KL, obsahující střed úsečky DC. Celá hledaná množina se pak skládá ze čtyř polokružnic (obr. 28).



Obr. 28

B - II - 2

Dokažte, že pro žádné prvočíslo p nemá jeho mocnina p^k s kladným sudým exponentem k tvar $2^s - 1$, kde je číslo s celé.

Řešení. Předpokládejme, že $p^k = 2^s - 1$, s celé. Je vidět, že nemůže být $s = 0$, protože $2^0 - 1 = 0$; s nemůže být také záporné, neboť pro záporné s je i $2^s - 1$ záporné. Je-li $p = 2$, je p^k dělitelné dvěma, poněvadž se předpokládá k kladné, zatímco $2^s - 1$ je číslo liché, a proto se čísla 2^k a $2^s - 1$ nemohou sobě rovnat. Je-li p jiné prvočíslo, je p liché. Položíme-li $k = 2l$, je $p^l = 2m + 1$ také liché a $p^k = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$. Toto číslo dává při dělení čtyřmi zbytek 1. Avšak čísla tvaru $2^s - 1$ mají při dělení čtyřmi zbytek tři pro každé celé s, $s \geqq 2$. V případě $s = 1$ by však muselo být $p = 1$, což není prvočíslo. Tím je úloha dokázána.

B - II - 3a

Lineárním mnohočlenem tří proměnných x, y, z rozumíme funkci tvaru $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz + d$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla a aspoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly.

Ukažte, že lineární mnohočleny L, L_1, L_2, L_3, L_4 tří proměnných x, y, z takové, že pro všechna reálná čísla x, y, z a reálný parametr k platí

$$x^3 + y^3 + kz^3 = L(x, y, z) \,.$$
$$. \, [L_1(x, y, z) \,.\, L_2(x, y, z) + L_3(x, y, z) \,.\, L_4(x, y, z)],$$

existují tehdy a jen tehdy, když je $k = 0$.

Řešení. Pro $k = 0$ máme

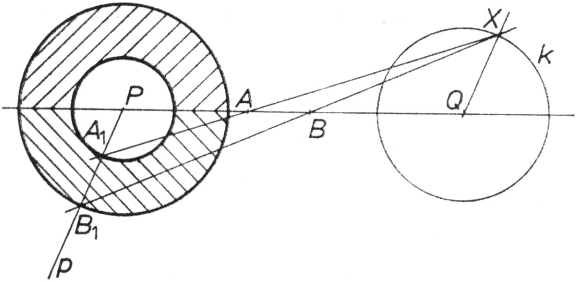
$$x^3 + y^3 = (x + y)\,[x(x - y) + y \,.\, y],$$

stačí tedy položit $L = x + y$, $L_1 = x$, $L_2 = x - y$, $L_3 = L_4 = y$. Předpokládejme, že pro $k \neq 0$ a každé x, y, z je $x^3 + y^3 + kz^3 = L[L_1L_2 + L_3L_4]$. Položme $L(x, y, z) = ax + by + cz + d$. Protože je $k \neq 0$, musí být také $c \neq 0$. V opačném případě by mnohočlen $L[L_1L_2 + L_3L_4]$ neobsahoval proměnnou z ve třetí mocnině. Pak se však tento mnohočlen rovná nule pro libovolné hodnoty x, y a $z = -(ax + by + d)/c$. To ovšem znamená, že pro libovolná x, y je $x^3 + y^3 - k(ax + by + d)^3/c^3 = 0$. Dosadíme-li postupně za x, y uspořádané dvojice čísel (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, —1), dostaneme spor.

B - II - 3b

Uvnitř úsečky PQ jsou dány dva různé body A, B. Kružnice k má střed v bodě Q a poloměr r. Zvolme si libovolný bod X kružnice k, který neleží na přímce PQ, a označme p přímku rovnoběžnou s přímkou QX procházející bodem P. Dále označme A_1 průsečík přímky p s přímkou XA a B_1 průsečík přímky p s přímkou XB. Jakou část roviny vyplní úsečky A_1B_1, když bod X probíhá celou kružnici k kromě bodů přímky PQ?

Řešení. Probíhá-li bod X kružnici k, probíhá bod A_1 kružnici o středu P a poloměru $\frac{|PA|}{|AQ|}r$, z obou kružnic musíme ovšem vynechat body na přímce PQ. Bod A_1 je totiž obrazem bodu X ve stejnolehlosti se středem A, ve které bodu Q odpovídá bod P (obr. 29). Podobně probíhá bod B_1 kružnici



Obr. 29

se středem P a poloměrem $\frac{|PB|}{|BQ|}r$. Úsečky A_1B_1 jsou úsečky, které jsou průnikem mezikruží ohraničeného uvedenými kružnicemi a polopřímkami s počátečním bodem P. Ze stejnolehlosti vyplývá, že i obráceně patří každá taková úsečka s výjimkou těch, které leží na přímce PQ, do hledané množiny. Výsledkem je tedy mezikruží se středem v bodě P bez těch bodů, které leží na přímce PQ.