32. ročník matematické olympiády

Kategória A

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); František Zítek (editor): 32. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1982/83. 24. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. pp. 90–125.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404771

Kategória A

ÚLOHY I. KOLA - DOMÁCA ČASŤ

A - I - 1

Nech k, n sú prirodzené čísla, $n \geqq 2$. Ak prirodzené čísla x, y vyhovujú nerovnici

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{k^2 + 1} \right| < \frac{1}{y^n}, \tag{1}$$

potom platí

$$\frac{x}{y} + k > y^{n-2} - 1 .$$

Dokážte.

Riešenie. Je zrejmé, že za daných predpokladov je číslo

$$\frac{x}{y} + \sqrt{k^2 + 1}$$

kladné, a ak ním vynásobíme obe strany nerovnosti (1), dostaneme

$$\left|\frac{x^2}{y^2} - (k^2 + 1)\right| < \frac{1}{y^n}\left(\frac{x}{y} + \sqrt{k^2 + 1}\right). \qquad (2)$$

Po vynásobení nerovnosti (2) kladným číslom y^n a po jednoduchej úprave dostávame ďalej

$$y^{n-2}\,|x^2 - y^2(k^2 + 1)| < \frac{x}{y} + \sqrt{k^2 + 1}. \qquad (3)$$

Teraz najskôr ukážeme, že za daných predpokladov musí platiť

$$x^2 - y^2(k^2 + 1) \neq 0\,. \qquad (4)$$

Ak by totiž neplatil vzťah (4), muselo by byť $x^2 = y^2(k^2 + 1)$, čo znamená, že číslo $k^2 + 1$ by muselo byť štvorcom prirodzeného čísla; to však nie je možné, pretože pre každé prirodzené číslo k platí

$$k^2 < k^2 + 1 < (k + 1)^2\,.$$

Tým je platnosť vzťahu (4) dokázaná a vzhľadom na to, že číslo na jeho ľavej strane je celé, vyplýva z toho, že

$$|x^2 - y^2(k^2 + 1)| \geqq 1\,. \qquad (5)$$

Ďalej je zrejmé, že pre prirodzené číslo k platí $k + 1 > > \sqrt{k^2 + 1}$, z čoho vyplýva, že

$$\frac{x}{y} + k + 1 > \frac{x}{y} + \sqrt{k^2 + 1}. \qquad (6)$$

Vzhľadom na (5) a (6) však z nerovnosti (3) vyplýva, že

$$y^{n-2} < \frac{x}{y} + k + 1,$$

odkiaľ už bezprostredne plynie správnosť dokazovanej nerovnosti.

A - I - 2

Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú kladné reálne čísla. Pre každú n-ticu kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí nerovnosť

$$\frac{1}{n}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}\right)} \geqq \sqrt[n]{\frac{x_1 \,.\, x_2 \,.\, \ldots \,.\, x_n}{a_1 \,.\, a_2 \,.\, \ldots \,.\, a_n}}.$$

Dokážte. Kedy platí rovnosť?

Riešenie. Podľa známej Cauchyho nerovnosti platí

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,.\, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}} \geqq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} \tag{1}$$

a podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom zasa

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} \geqq \sqrt[n]{\frac{x_1 \,.\, x_2 \,.\, \ldots \,.\, x_n}{a_1 \,.\, a_2 \,.\, \ldots \,.\, a_n}}. \tag{2}$$

Z nerovnosti (1) vynásobenej kladným číslom $\frac{1}{n}$ a z nerovnosti (2) však už vyplýva správnosť dokazovanej nerovnosti. Rovnosť v danom vzťahu nastane zrejme práve vtedy, keď nastáva rovnosť vo vzťahu (1) a súčasne vo vzťahu (2). Rovnosť vo vzťahu (1) však nastáva práve vtedy, keď platí

$$x_1a_1 = x_2a_2 = \ldots = x_na_n\,, \tag{3}$$

a rovnosť vo vzťahu (2) nastáva práve vtedy, keď

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}\,. \tag{4}$$

Rovnosti (3) a (4) však súčasne platia práve vtedy, keď

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n \text{ a } a_1 = a_2 = \ldots = a_n\,.$$

A - I - 3

Množina φ bodov v rovine ϱ má tieto dve vlastnosti:

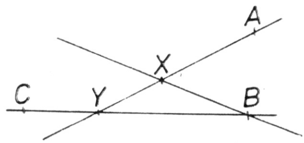
V_1: Spolu s každými svojimi dvoma navzájom rôznymi bodmi A, B obsahuje celú úsečku AB.

V_2: V každom kruhu s polomerom 1 leží aspoň jeden bod z φ.

Potom platí $\varphi = \varrho$. Dokážte.

Riešenie. Ak nejaká množina bodov v rovine má vlastnosť V_1, voláme ju konvexnou množinou. Množina φ je teda konvexnou množinou so špeciálnou vlastnosťou V_2. Vzhľadom na to, že každý nenulový uhol v rovine obsahuje nejaký kruh s polomerom 1, vyplýva z V_2, že každý nenulový uhol v rovine ϱ obsahuje aspoň jeden bod množiny φ.

Nech X je ľubovoľný bod roviny ϱ. Z vlastnosti V_2 vyplýva, že množina φ je neprázdna. Nech $A \in \varphi$. Ak je $X = A$, potom zrejme $X \in \varphi$. Nech $X \neq A$. Uvažujme o priamke AX, ktorá rozdelí rovinu ϱ na dve polroviny. Vzhľadom na vyššie uvedené vyplýva, že v každej z oboch polrovín, ktoré sú priamymi uhlami, leží bod z φ. Označme jeden z nich B. Bod B neleží na priamke AX. Preto dutý uhol určený polpriamkami opačnými ku polpriamkam XA a XB je nenulový a nachádza sa v ňom aspoň jeden bod $C \in \varphi$ (obr. 30). Označ-



Obr. 30

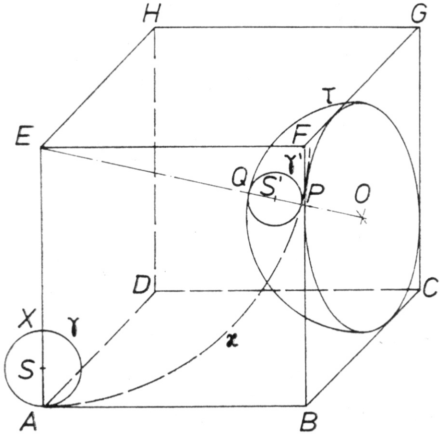
me Y priesečník priamok CB a XA. Bod Y leží zrejme na úsečke BC a vzhľadom na to, že bod C leží v polrovine opačnej k polrovine obsahujúcej bod A a určenej priamkou BX, leží bod Y taktiež na polpriamke opačnej k polpriamke XA. Z toho však podľa V_1 vyplýva, že $Y \in \varphi$ ako bod úsečky BC, a taktiež, že $X \in \varphi$ ako bod úsečky YA.

Tým sme dokázali, že každý bod roviny ϱ patrí do množiny φ, z čoho už vyplýva, že $\varphi = \varrho$.

A - I - 4

Je daná kocka $ABCDEFGH$ s hranou dĺžky a. Označme O stred steny $BCGF$ a τ guľu so stredom O a priemerom a. Bodom E veďte rovinu σ a zostrojte bod X na hrane AE tak, aby guli s priemerom AX v súmernosti podľa roviny σ odpovedala guľa najväčšieho priemeru, ktorá leží celá v guli τ. Vypočítajte dĺžku tohto najväčšieho priemeru.

Riešenie (obr. 31). Pri ľubovoľnej polohe roviny σ, ktorá prechádza bodom E, leží obraz bodu A v súmernosti podľa



Obr. 31

roviny σ na guľovej ploche $\varkappa(E; a)$. Guľa so stredom S na hrane AE s polomerom SA sa dotýka guľovej plochy $\varkappa$ (v bode A) a to isté platí i pre jej obraz v súmernosti podľa roviny σ. Guľová plocha γ požadovaných vlastností bude mať maximálny priemer práve vtedy, keď sa jej symetrický obraz γ' bude dotýkať oboch guľových plôch $\varkappa$ a τ a jej stred S' bude ležať súčasne na úsečke EO ako strednej oboch guľových plôch. Označme P, Q v uvedenom poradí body dotyku guľovej plochy γ' s guľovými plochami $\varkappa$ a τ.

Hľadaná rovina súmernosti σ zrejme rozpoluje uhol AEO a je kolmá na rovinu AEO. Veľkosť $|PQ|$ priemeru gule γ' vypočítame teraz z pravouhlého trojuholníka EFO. Zrejme platí:

$$|EP| + |OQ| = |EO| + |PQ|, \tag{1}$$

a z pravouhlého trojuholníka EFO máme

$$|EO|^2 = |EF|^2 + |FO|^2,$$

čiže

$$|EO|^2 = a^2 + \frac{a^2}{2},$$

odkiaľ

$$|EO| = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Z (1) po dosadení dostaneme

$$a + \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} + |PQ|,$$

z čoho po jednoduchej úprave vyplýva

$$|PQ| = |AX| = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{6}).$$

A - I - 5

V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stranou $|AB| = 1$.

a) Určte v rovine množinu M, ktorú vyplnia tretie vrcholy všetkých rovnostranných trojuholníkov, ktorých dva vrcholy ležia vo vnútri alebo na hranici daného štvorca $ABCD$.

b) Vypočítajte obsah množiny M.

Riešenie úlohy nájde čitateľ v ročenke 30. ročníka MO na str. 133—136 (úloha A-III-1).

A - I - 6

Pre dané prirodzené číslo n riešte sústavu n rovníc o n neznámych $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\binom{2}{2} \cdot x_1 = \binom{4}{4}, \tag{1_1}$$

$$\binom{3}{2} \cdot x_1 + \binom{2}{2} \cdot x_2 = \binom{5}{4}, \tag{1_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{n+1}{2} \cdot x_1 + \binom{n}{2} \cdot x_2 + \ldots + \binom{2}{2} \cdot x_n = \binom{n+3}{4}. \tag{1_n}$$

Riešenie. Ak od rovnice (1_k) odčítame rovnicu (1_{k-1}) postupne pre $k = n, n-1, \ldots, 2$ a využijeme známe pravidlo o súčte kombinačných čísel

$$\binom{r}{s} + \binom{r}{s+1} = \binom{r+1}{s+1},$$

ktoré platí pre každú dvojicu nezáporných celých čísel r, s, dostaneme sústavu rovníc

$$
\begin{aligned}
&x_1 &&= 1,\\
&2x_1 + x_2 &&= 4,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(n-1)x_1 + (n-2)x_2 + \ldots + 2x_{n-2} + x_{n-1} &&= \binom{n+1}{3},\\
&nx_1 + (n-1)x_2 + \ldots + 3x_{n-2} + 2x_{n-1} + x_n &&= \binom{n+2}{3},
\end{aligned}
$$

ktorá je zrejme s danou sústavou ekvivalentná. Ak pre túto sústavu zopakujeme algoritmus odčítania $(k-1)$-tej rovnice od k-tej pre $k = n, n-1, \ldots, 2$, dostaneme opäť ekvivalentnú sústavu

$$
\begin{aligned}
&x_1 &&= 1,\\
&x_1 + x_2 &&= 3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} &&= \binom{n}{2},\\
&x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &&= \binom{n+1}{2}.
\end{aligned}
$$

Po ďalšom zopakovaní použitého algoritmu dostávame konečne sústavu

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n,$$

ktorá predstavuje jediné riešenie danej sústavy.

Poznámka. Skutočnosť, že daná sústava má jediné riešenie, je zrejmá už z jej tvaru. Toto riešenie by bolo možné určiť aj tak, že z prvej rovnice vypočítame $x_1 = 1$ a dosadíme do druhej rovnice, z ktorej jednoznačne určíme x_2, atď.

ÚLOHY I. KOLA - ŠKOLSKÁ ČASŤ

A - S - 1

Nech je n prirodzené číslo. Uvažujme o všetkých usporiadaných n-ticiach reálnych čísel x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ takých, že pre žiadne $i = 1, 2, \ldots, n$ nie je x_i celočíselným násobkom čísla $\frac{\pi}{2}$ a platí $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tg}^2 x_i = 1$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu súčtu

$$s = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cotg}^2 x_i \,.$$

Riešenie. Je

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{cotg}^2 x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{cotg}^2 x_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tg}^2 x_i\right) \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{cotg} x_i \operatorname{tg} x_i\right)^2 = n^2$$

podľa Cauchyho nerovnosti. Z toho je zrejmé, že pri ľubovoľnej voľbe hodnôt x_i vyhovujúcich podmienkam úlohy je $s \geqq n^2$. Ak však zvolíme všetky hodnoty x_i rovnaké a tak, aby platilo $\operatorname{tg} x_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$, je

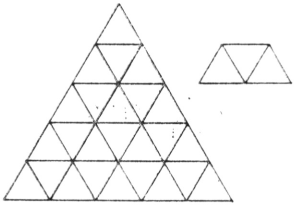
$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tg}^2 x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cotg}^2 x_i = \sum_{i=1}^{n} n = n^2.$$

Preto je n^2 najmenšia možná hodnota súčtu s.

A - S - 2

Určte všetky prirodzené čísla n, pre ktoré možno rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky n rozložiť na navzájom sa neprekrývajúce lichobežníky so stranami dĺžky 1, 1, 1, 2.

Riešenie. Rovnostranný trojuholník so stranou n (n prirodzené) sa dá rozložiť (obr. 32) na $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

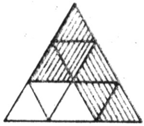


Obr. 32

rovnostranných trojuholníkov so stranou 1. Lichobežník so stranami dĺžok 1, 1, 1, 2 sa dá rozložiť na 3 rovnostranné trojuholníky so stranou 1. Z toho vyplýva, že ak sa rovnostranný trojuholník so stranou n dá rozložiť na lichobežníky uvažovaného tvaru, musí byť n^2 deliteľné číslom 3, čo znamená, že číslo n musí byť deliteľné číslom 3.

Nech obrátene platí: $n = 3k$, kde k je prirodzené číslo.

Potom sa rovnostranný trojuholník so stranou n dá rozložiť na rovnostranné trojuholníky so stranou 3 a každý rovnostranný trojuholník so stranou 3 sa dá rozložiť na 3 lichobežníky uvažovaného tvaru (obr. 33). Tým je dokázané, že tiež trojuholník so stranou $3k$ sa dá rozložiť na lichobežníky so stranami 1, 1, 1, 2.



Obr. 33

A - S - 3a

Vo vnútri kruhu K so stredom S a polomerom r je daný bod A. Nájdite množinu bodov v rovine, ktorú vyplnia vrcholy D všetkých rovnobežníkov $ABCD$, ktorých vrchol B i priesečník uhlopriečok leží vo vnútri alebo na hranici kruhu K.

Riešenie. Ukážeme, že hľadanou množinou M je kruh K_1 so stredom S a polomerom $3r$, z ktorého sú v prípade $S = A$ vyňaté všetky hraničné body a v prípade $S \neq A$ dva body X, Y, v ktorých hranicu kruhu K_1 pretína priamka SA.

Nech je totiž $D \in \mathsf{M}$ a $ABCD$ rovnobežník vyhovujúci úlohe. Označme T priesečník jeho uhlopriečok. Potom platí:

$$|SD| \leqq |ST| + |TD| = |ST| + |TB| \leqq$$
$$\leqq |ST| + |TS| + |SB| \leqq 3r.$$

Bod D leží teda v K_1. Je zrejmé, že v prípade $S = A$ nemôže D ležať na hranici K_1 a v prípade $S \neq A$ nemôže byť bod D totožný s bodom X alebo Y.

Nech obrátene leží bod D v množine $K_1(S; 3r)$ s výnimkou uvedených bodov. Rozlíšime dva prípady:

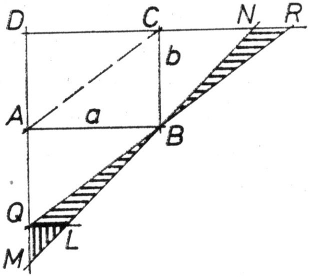
a) $S \neq A$. Ak neleží D na priamke SA, stačí za bod B zvoliť vzdialenejší priesečník priamky DS s hranicou K a doplniť body A, B, D na rovnobežník $ABCD$ vyhovujúci požiadavkám úlohy. Ak D leží na priamke SA, je $X \neq D \neq Y$ podľa predpokladu. Označme K_D kruh, ktorý vznikne z K rovnoľahlosťou so stredom D a koeficientom 2. Potom existuje bod $B \in K \cap K_D$, ktorý neleží na priamke SA. Stačí body B, D doplniť na rovnobežník $ABCD$ vyhovujúci požiadavkám úlohy.

b) $S = A$. V tomto prípade volíme bod B podľa druhej konštrukcie časti a).

A - S - 3b

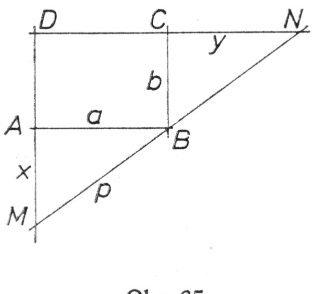
V rovine je daný pravouholník $ABCD$ so stranami $|AB| = a$, $|BC| = b$. Bodom B veďte priamku p tak, aby obsah trojuholníka ohraničeného polpriamkami DC, DA a priamkou p bol minimálny.

Riešenie (obr. 34). Bodom B vedieme priamku rovnobežnú s priamkou AC. Jej priesečníky s polpriamkami DA, DC v uvedenom poradí označme Q, R. Zrejme je $|CR| = a$, $|AQ| = b$ a obsah trojuholníka DQR bude $ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab = 2ab$. Veďme bodom B inú priamku, ktorá pretína



Obr. 34

polpriamku DA v bode M a polpriamku DC v bode N. Je zrejmé, že buď N leží vo vnútri úsečky CR, alebo M leží vo vnútri úsečky AQ. Nech nastane napríklad prvá možnosť. Označme L priesečník priamky MN s priamkou vedenou bodom Q rovnobežne s priamkou DC. Potom sú trojuholníky QLB, RNB zhodné. Obsah lichobežníka $QLND$ sa rovná obsahu trojuholníka QRD, kým obsah trojuholníka DMN je pre $N \neq R$ väčší než obsah trojuholníka DQR. Hľadanou priamkou p je teda rovnobežka s priamkou AC vedená bodom B.



Obr. 35

Iné riešenie (obr. 35). Veďme bodom B priamku p, ktorá pretína polpriamku DA v bode M a polpriamku DC v bode N. Označme $|AM| = x$, $|CN| = y$. Z podobnosti trojuholníkov BNC, MBA, ktoré majú zrejme všetky uhly zhodné, vyplýva, že $x : b = a : y$ čiže $xy = ab$. Pre obsah P trojuholníka DMN platí:

$$P = ab + \frac{1}{2}(ax + by) = ab + \frac{1}{2}\left(ax + \frac{ab^2}{x}\right) =$$

$$= ab + \frac{a}{2}\,\frac{b^2 + x^2}{x}.$$

Použitím nerovnosti $b^2 + x^2 \geqq 2bx$ vyplývajúcej zo známej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch nezáporných čísel dostávame: $P \geqq 2ab$, pričom znamienko rovnosti platí len pre $x = b$, kedy musí byť tiež $y = a$. V tom prípade však je zrejme priamka p rovnobežná s priamkou AC.

ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

Nech n je prirodzené číslo a nech pre reálne čísla α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i = 1.$$

Potom

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin 2\alpha_i\right| \leqq 2\sqrt{n-1}.$$

Dokážte.

Riešenie. Podľa známej Cauchyho nerovnosti pre reálne čísla x_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2. \tag{1}$$

Ak v (1) položíme $x_i = \sin \alpha_i$, $y_i = \cos \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i\right) \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i \cos \alpha_i\right)^2. \tag{2}$$

Pretože podľa predpokladu $\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i = 1$, postupne dostávame

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (1 - \sin^2 \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i = n - 1,$$

na základe čoho z (2) vyplýva

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i \cos \alpha_i\right)^2 \leqq n - 1, \tag{3}$$

a pretože $\sin 2\alpha_i = 2\sin\alpha_i\cos\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, po jednoduchej úprave z (3) dostaneme

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2\alpha_i\right| \leqq 2\sqrt{n-1},$$

čo sme mali dokázať.

A - II - 2

Detská skladačka pozostáva z kameňov (plochých doštičiek) týchto troch typov:

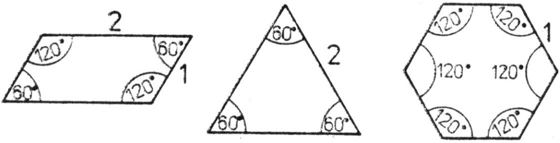
a) rovnobežník so stranami dĺžky 12 mm a 24 mm a ostrým vnútorným uhlom veľkosti 60°;

b) rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 24 mm;

c) pravidelný šesťuholník so stranou dĺžky 12 mm.

Rozhodnite, či je možné z kameňov uvedených typov zložiť rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 180 mm tak, aby každý z bodov trojuholníka bol pokrytý niektorým kameňom, pričom by sa kamene vzájomne neprekrývali, ak predpokladáme, že kameňov každého typu je dostatočne veľký počet.

Riešenie. Odpoveď bude záporná, čo dokážeme nepriamo. Pripusťme, že naša snaha bola úspešná, a kvôli zjednodušeniu zvoľme za jednotku dĺžky úsečku 12 mm dlhú. Potom náš predpoklad znamená, že rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 15 možno vyjadriť ako zjednotenie konečného počtu navzájom sa neprekrývajúcich konvexných mnohouholníkov, z ktorých každý patrí k niektorému z týchto troch typov (obr. 36):



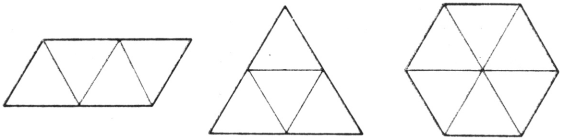
Obr. 36a, b, c

a) rovnobežník so stranami 1 a 2 a ostrým vnútorným uhlom veľkosti 60°;

b) rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 2;

c) pravidelný šesťuholník so stranou dĺžky 1.

Plošný obsah rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 1 označme p (hodnotu p možno zrejme ľahko vyčísliť, ale nebudeme ju potrebovať). Pomocou p možno ľahko vyjadriť plošné obsahy mnohouholníkov všetkých troch typov z obr. 36, ako ukazuje obr. 37.



Obr. 37a, b, c

Dostávame teda, že plošný obsah rovnobežníka typu a) je $4p$, plošný obsah trojuholníka typu b) je taktiež $4p$ a plošný obsah šesťuholníka typu c) je $6p$. Z podobnosti rovnostranného trojuholníka so stranou 15 s rovnostranným trojuholníkom so stranou 1 (koeficient podobnosti je zrejme 15) dostávame, že plošný obsah trojuholníka so stranou dĺžky 15 je 15^2p.

Ak použijeme na zloženie trojuholníka so stranou 15 x rovnobežníkov typu a), y trojuholníkov typu b) a z šesťuholníkov typu c), kde x, y, z sú nezáporné celé čísla, potom platí:

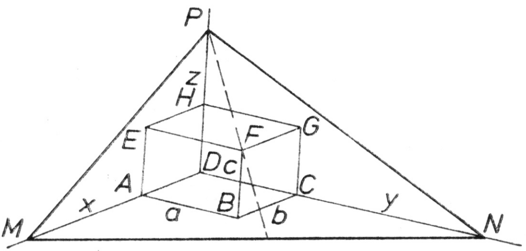
$$4px + 4py + 6pz = 15^2p \text{ čiže } 4x + 4y + 6z = 15^2.$$

V poslednej rovnosti však na ľavej strane máme číslo párne a na pravej číslo nepárne, čo znamená, že rovnosť neplatí pre žiadne celé nezáporné x, y, z. Tento spor potvrdzuje správnosť nášho tvrdenia, že sa uvedený trojuholník z kameňov skladačky zložiť nedá.

A - II - 3a

Je daný kváder $ABCDEFGH$ s rozmermi a, b, c. Jeho vrcholom F veďte rovinu ϱ tak, aby objem štvorstena ohraničeného rovinami ADC, CDH, HDA, ϱ a obsahujúceho daný kváder bol minimálny.

Riešenie (obr. 38). Označme M, N, P v uvedenom po-



Obr. 38

radí priesečníky roviny ϱ s polpriamkami DA, DC, DH. Nech ďalej $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|BF| = c$. Predpokladajme, že štvorsten $DMNP$ už má požadovanú vlastnosť, a označme $|DM| = x$, $|DN| = y$, $|DP| = z$. Objem V štvorstena $DMNP$ sa zrejme rovná súčtu objemov štvorstenov $FMDP$, $FNDP$, $FMND$, ktorých výšky v uvedenom poradí majú veľkosti a, b, c. Preto platí:

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{xz}{2}\,a + \frac{1}{3}\,\frac{yz}{2}\,b + \frac{1}{3}\,\frac{xy}{2}\,c. \tag{1}$$

Na druhej strane však zrejme platí:

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{xy}{2}\,z = \frac{1}{6}\,xyz. \tag{2}$$

Preto z rovností (1), (2) vyplýva

$$axz + byz + cxy = xyz. \tag{3}$$

Ak rovnosť (3) vynásobíme kladným číslom $\dfrac{1}{xyz}$, dostaneme

$$\frac{a}{y} + \frac{b}{x} + \frac{c}{z} = 1. \tag{4}$$

K tomu, aby sme zistili, pri ktorých hodnotách x, y, z bude objem V minimálny, využijeme známu nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom

$$\frac{u + v + w}{3} \geqq \sqrt[3]{uvw}, \tag{5}$$

ktorá platí pre ľubovoľné kladné reálne čísla u, v, w, pričom rovnosť vo vzťahu (5) nastáva práve vtedy, keď $u = v = w$. Ak teraz vo vzťahu (5) položíme $u = \frac{a}{y}$, $v = \frac{b}{x}$, $w = \frac{c}{z}$, dostaneme vzhľadom na (4)

$$1 = \frac{a}{y} + \frac{b}{x} + \frac{c}{z} \geqq 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{xyz}},$$

z čoho vyplýva, že $xyz \geqq 27abc$. Vzhľadom na (2) preto platí

$$V \geqq \frac{27}{6}\, abc = \frac{9}{2}\, abc. \tag{6}$$

Rovnosť vo vzťahu (6) však nastane zrejme práve vtedy, keď

$$\frac{a}{y} = \frac{b}{x} = \frac{c}{z},$$

z čoho vzhľadom na (4) vyplýva

$$x = 3b, y = 3a, z = 3c. \tag{7}$$

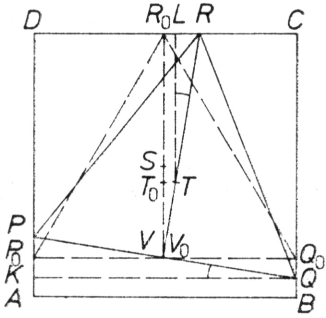
Pre hodnoty x, y, z určené vzťahom (7) bude teda objem V štvorstena $DMNP$ minimálny, rovný $\frac{9}{2}\, abc$.

Z toho už priamo vyplýva konštrukcia roviny ϱ požadovaných vlastností.

A - II - 3b

V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stranou $|AB| = 1$. Určte v rovine množinu M ťažísk všetkých takých rovnostranných trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy ležia na stranách daného štvorca $ABCD$.

Riešenie. Nech PQR je rovnostranný trojuholník, ktorého všetky tri vrcholy ležia na stranách štvorca $ABCD$ (obr. 39). Nech T je jeho ťažisko, V stred strany PQ, čiže



Obr. 39

päta výšky z vrcholu R na stranu PQ a S stred štvorca $ABCD$. Pretože $|RV| = \frac{\sqrt{3}}{2}|PQ|$, je zrejmé, že žiadne dva vrcholy tohto trojuholníka nemôžu ležať na tej istej strane daného štvorca. Vzhľadom na osovú symetriu rovnostranného trojuholníka i osovú a stredovú symetriu štvorca stačí preto uvažovať napríklad o prípade, keď $P \in AD$, $Q \in BC$, $R \in CD$. V ostatných prípadoch bude totiž situácia analogická. Označme R_0 stred strany CD a $P_0 \in AD$, $Q_0 \in BC$ také body hranice štvorca $ABCD$, pre ktoré platí: $|P_0R_0| = |Q_0R_0| = 1$. Potom $P_0Q_0R_0$ je rovnostranný trojuholník požadovaných vlastností. Nech T_0 je jeho ťažisko a V_0 stred strany P_0Q_0. Oba tieto body ležia zrejme na polpriamke R_0S a platí: $|R_0T_0| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vzhľadom na už spomenutú symetriu stačí dokonca uvažovať o prípade, keď $Q \in Q_0B$, $R \in R_0C$, $P \in P_0D$. Označme K, resp. L, pätu kolmice z bodu Q, resp. T, na stranu AD, resp. CD (pozri obr. 39). Potom zrejme $|\sphericalangle LTR| = |\sphericalangle KQP|$ a pravouhlé trojuholníky PKQ a RLT sú podobné. Vieme, že platí:

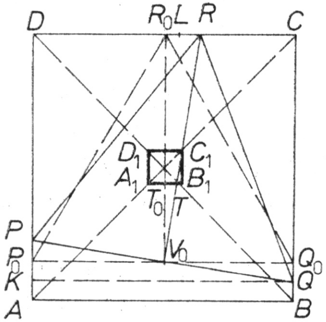
$$|RT| = \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,|PQ| = \frac{\sqrt{3}}{3}\,|PQ|.$$

Z toho však vyplýva, že

$$|LT| = \frac{\sqrt{3}}{3}\,|KQ| = \frac{\sqrt{3}}{3}\,|AB| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Znamená to teda, že ťažisko T každého rovnostranného trojuholníka uvažovaných vlastností leží vo vzdialenosti $\frac{\sqrt{3}}{3}$ od strany CD do vnútra štvorca $ABCD$. Z vyššie uve-

denej symetrie preto vyplýva, že ťažiská T všetkých rovnostranných trojuholníkov s vrcholmi na stranách štvorca $ABCD$ ležia na stranách štvorca $A_1B_1C_1D_1$ rovnoľahlého so štvorcom $ABCD$ v rovnoľahlosti (homotetii) so stredom S a s koeficientom rovnoľahlosti $k = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{2} =$
$= \frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 3)$ (obr. 40).



Obr. 40

Zostáva nám ešte ukázať, že každý bod T hranice štvorca $A_1B_1C_1D_1$ má požadovanú vlastnosť, tj. existuje rovnostranný trojuholník PQR s vrcholmi na stranách štvorca $ABCD$ a s ťažiskom v bode T. Vzhľadom na symetriu zrejme stačí, ak dôkaz urobíme pre body úsečky T_0B_1. Z predchádzajúcej časti riešenia vieme, že pre bod T_0 je takým trojuholníkom trojuholník $P_0Q_0R_0$ so stranou 1. Nech $T \neq T_0$ je ľubovoľný bod úsečky T_0B_1. Polpriamka V_0T pretína stranu CD štvorca $ABCD$ v bode R. Kolmica k priamke V_0R v bode V_0

pretína stranu AD štvorca $ABCD$ v bode P a stranu BC v bode Q. Trojuholník PQR je už rovnostranným trojuholníkom s ťažiskom v bode T.

Je totiž $|\sphericalangle R_0V_0R| = |\sphericalangle TV_0T_0| = |\sphericalangle LTR,|$ kde $TL // V_0R_0$ (obr. 40), z čoho vyplýva, že pravouhlé trojuholníky V_0R_0R, V_0T_0T, TLR sú podobné. Pretože $|V_0T_0| : |T_0R_0| = 1 : 2$, bude tiež $|V_0T| : |TR| = 1 : 2$. Ďalej platí: $|\sphericalangle PV_0P_0| = |\sphericalangle Q_0V_0Q| = |\sphericalangle PQK|$, kde $QK // AB$. Preto sú podobné tiež pravouhlé trojuholníky P_0V_0P, Q_0V_0Q a PQK. Keďže $|P_0V_0| = |Q_0V_0|$, bude tiež $|PV_0| = |V_0Q|$. Preto pravouhlé trojuholníky RV_0P, RV_0Q sú zhodné. Z toho vyplýva, že RV_0 je ťažnica trojuholníka PQR a T je jeho ťažisko. Keďže platí $|RV_0| : |PV_0| = |R_0V_0| : |P_0V_0|$, sú tiež pravouhlé trojuholníky RV_0P a $R_0V_0P_0$ podobné, čo znamená, že $|\sphericalangle PRV_0| = |\sphericalangle P_0R_0V_0| = 30°$ a $|\sphericalangle RPV_0| = |\sphericalangle R_0P_0V_0| = 60°$. Trojuholník PQR je teda rovnostranný, ako sme chceli dokázať.

Záver: Množinou M ťažísk všetkých rovnostranných trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy ležia na stranách daného štvorca $ABCD$, je hranica štvorca $A_1B_1C_1D_1$ rovnoľahlého so štvorcom $ABCD$ v rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom rovnoľahlosti $\frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 3)$.

A - III - 1

Nech $n \geqq 1$ je dané prirodzené číslo. Uvažujme o všetkých n-ticiach takých reálnych čísel x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, pre ktoré platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = k, \tag{1}$$

kde $0 \leqq k \leqq n$ je dané reálne číslo. Určte, akú najväčšiu hodnotu nadobúda výraz

$$s = \left| \sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i \right|.$$

Riešenie. Podľa známej Cauchyho nerovnosti platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \cos^2 x_i \right) \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \cos x_i \right)^2. \tag{2}$$

Ak platí (1), potom

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 x_i = \sum_{i=1}^{n} (1 - \sin^2 x_i) = \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = n - k,$$

z čoho po dosadení do ľavej strany (2) a jednoduchej úprave máme

$$4k(n-k) \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i\right)^2,$$

odkiaľ

$$s = \left|\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i\right| \leqq 2\sqrt{k(n-k)}. \qquad (3)$$

Ak zvolíme x_i pre $i = 1, 2, \ldots, n$ tak, že $\sin x_i = \sqrt{\frac{k}{n}} \leqq 1$, $0 \leqq x_i \leqq \frac{\pi}{2}$, je $\cos x_i = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$ a $s = 2\sqrt{k(n-k)}$. Vzhľadom na (3) je teda táto hodnota za daných podmienok maximálna.

A - III - 2

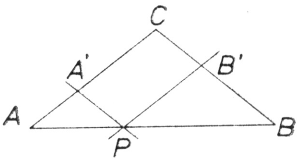
V rovine je daný trojuholník ABC. Dokážte, že pre každý bod P vnútra strany AB tohto trojuholníka platí:

$$|PC| \, . \, |AB| < |PA| \, . \, |BC| + |PB| \, . \, |AC|,$$

kde $|XY|$ znamená vzdialenosť bodov X a Y.

Riešenie. Nech bod P je ľubovoľný pevný bod vnútra strany AB trojuholníka ABC (obr. 41). Vo vnútri strany AC zostrojíme bod A' a vo vnútri strany BC bod B' tak, aby platilo $PA' \parallel BC$, $PB' \parallel AC$. Z trojuholníkovej nerovnosti vyplýva

$$|PC| < |PA'| + |A'C| = |PA'| + |PB'|. \qquad (1)$$



Obr. 41

Z podobnosti trojuholníkov APA', ABC, PBB' dostaneme

$$|PA'| = \frac{|PA|}{|AB|}|BC|, \ |PB'| = \frac{|PB|}{|AB|}|AC|,$$

z čoho po dosadení do (1) dostaneme

$$|PC| < \frac{|PA|}{|AB|}|BC| + \frac{|PB|}{|AB|}|AC|. \qquad (2)$$

Vynásobením nerovnosti (2) kladným číslom $|AB|$ už dostávame nerovnosť, ktorej správnosť bolo treba dokázať.

Iné riešenie. Zaveďme v rovine pravouhlú súradnicovú sústavu a označme a, b, c, p v uvedenom poradí polohové vektory bodov A, B, C, P. Označme ďalej $|v|$ dĺžku vektora v. Zrejme platí:

$$p = (1 - t)\, a + t\, b,$$

kde reálne číslo $0 < t < 1$ vyhovuje vzťahom

$$t = \frac{|p - a|}{|b - a|}, \quad 1 - t = \frac{|p - b|}{|b - a|}. \qquad (3)$$

Použitím trojuholníkovej nerovnosti vzhľadom na (3) postupne dostaneme:

$$\begin{aligned}
|PC| &= |c - p| = |tc + (1 - t)c - tb - (1 - t)a| = \\
&= |(1 - t)(c - a) + t(c - b)| < \\
&< (1 - t)|c - a| + t|c - b| = \\
&= \frac{|p - a|}{|b - a|}|c - b| + \frac{|p - b|}{|b - a|}|c - a| = \\
&= \frac{|PA|}{|AB|}|BC| + \frac{|PB|}{|AB|}|AC|,
\end{aligned}$$

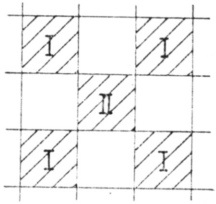
z čoho už priamo vyplýva dokazované tvrdenie. Ostrá nerovnosť v trojuholníkovej nerovnosti platí preto, lebo vektory $c - a$, $c - b$ sú lineárne nezávislé.

A - III - 3

Polia šachovnice 8×8 tvoria štvorce so stranou dĺžky 3 cm. Na šachovnicu položíme obdĺžnikový prúžok papiera s rozmermi 6 cm a 3 cm. Budeme hovoriť, že prúžok sa prekrýva s poľom šachovnice, ak má s ním spoločný aspoň jeden vnútorný bod. Zistite, aký je najväčší počet čiernych polí, s ktorými sa môže daný obdĺžnikový prúžok papiera prekrývať.

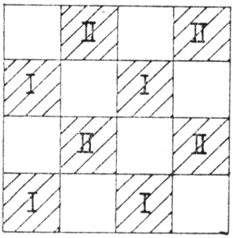
Riešenie. Kvôli zjednodušeniu zvolíme úsečku veľkosti 3 cm za novú jednotku dĺžky. Potom je každé pole šachovnice štvorec so stranou 1 a na šachovnicu kladieme obdĺžnik so stranami 2 a 1.

Najskôr ukážeme, že nie je možné nájsť takú polohu obdĺžnika, aby sa prekrýval so siedmimi poliami šachovnice. Predovšetkým si uvedomíme, že obdĺžnik sa nemôže prekrývať súčasne so štyrmi poliami označenými I na obr. 42.



Obr. 42

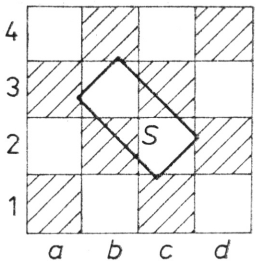
V opačnom prípade by musel totiž obsahovať aspoň jeden vnútorný bod každého z polí označených I, a teda aj celý konvexný obal týchto bodov. Vo vnútri konvexného obalu však leží zrejme celé pole označené II, čo je štvorec so stranou 1. Tento by však mal ležať vo vnútri obdĺžnika rozmerov 2×1, čo je spor.



Obr. 43

Najdlhšou úsečkou daného obdĺžnika je zrejme jeho uhlopriečka, ktorej veľkosť je $\sqrt{5} < 3$. Z toho vyplýva, že daný obdĺžnik môže mať neprázdny prienik najviac so štyrmi riadkami a najviac so štyrmi stĺpcami šachovnice. Bude teda určite vždy ležať v nejakej časti šachovnice s rozmermi 4×4 polia (obr. 43). V tejto časti je práve 8 čiernych polí, ktoré označíme symbolmi I a II. Zo štyroch polí označených I sa však podľa vyššie uvedeného obdĺžnik prekrýva najviac s troma a analogicky sa dokáže, že i z polí označených II sa môže prekrývať najviac s troma. Z toho vyplýva, že daný obdĺžnik sa môže prekrývať najviac so 6 čiernymi poliami.

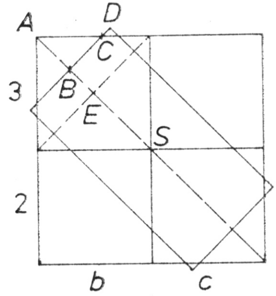
Teraz ukážeme, že skutočne existuje taká poloha obdĺžnika, pri ktorej sa prekrýva so 6 čiernymi poliami šachovnice. Stačí ho položiť tak, ako je to znázornené na obr. 44: jeho



Obr. 44

stred S leží v bode dotyku polí $b2, c3$ a jeho strany zvierajú so stranami šachovnice uhol 45°. Ak použijeme označenie

ako na obr. 45, je $|BS| = 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} = |ES|$, $|BC| = |AB| =$
$= |AS| - |BS| = \sqrt{2} - 1$, $|BD| = \frac{1}{2} > |BC|$. Preto obsa-



Obr. 45

huje úsečka BD vnútorný bod poľa $b4$. Zo súmernosti obdĺžnika podľa stredu S i podľa osi AS však vyplýva, že obdĺžnik má spoločné vnútorné body tiež s poliami $a3$, $c1$ a $d2$ a samozrejme aj s poliami $b2$ a $c3$.

Podľa riešenia *J. Sgalla*, 4. tr.
gymn. W. Piecka, Praha

A - III - 4

Nech $n \geqq 2$ je dané prirodzené číslo a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú za sebou nasledujúce členy aritmetickej postupnosti. Potom platí:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k = 0. \tag{1}$$

Dokážte.

Riešenie. Pre každé $k\,(0 \leqq k \leqq n)$ zrejme platí $a_k = a_0 + kd$, kde d je diferencia danej aritmetickej postupnosti. Označme L ľavú stranu rovnosti (1). Je teda

$$\mathrm{L} = a_0 \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} \right] +$$
$$+ d \left[-\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n n \binom{n}{n} \right].$$

Výraz v prvej hranatej zátvorke je však podľa binomickej vety n-tou mocninou dvojčlena $1 - 1$ a tak sa pre $n \geqq 2$ zrejme rovná nule. V druhej hranatej zátvorke sú sčítance tvaru

$$(-1)^k\, k \binom{n}{k} = (-1)^k\, k \frac{n!}{(n-k)!\, k!} =$$
$$= (-1)^k\, n \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} = (-1)^k n \binom{n-1}{k-1},$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Súčet v tejto zátvorke sa teda rovná $-n(1-1)^{n-1} = 0$. Oba sčítance v L sú teda rovné nule, čím je správnosť rovnosti (1) dokázaná.

A - III - 5

Určte všetky dvojice (x, y) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{y^3}. \qquad (1)$$

Riešenie. Najskôr dokážeme, že pre každé riešenie (x, y) danej nerovnice (x, y prirodzené) je $y < 3$. Ak totiž vynásobíme danú nerovnosť kladným číslom $y^2 \left(\frac{x}{y} + \sqrt{2} \right)$, dostaneme

$$|x^2 - 2y^2| < \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y} + \sqrt{2} \right). \qquad (2)$$

Vzhľadom na iracionálnosť čísla $\sqrt{2}$ nie je $x^2 - 2y^2 = 0$. Je teda $|x^2 - 2y^2| \geqq 1$ a vzhľadom na to z (2) vyplýva

$$1 < \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y} + \sqrt{2} \right). \qquad (3)$$

Zo vzťahu $\left| \frac{x}{y} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{y^3}$ však vyplýva, že $\frac{x}{y} < \sqrt{2} + \frac{1}{y^3}$, z čoho vzhľadom na (3) máme $1 < \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y^3} + 2\sqrt{2} \right)$. Pre $y \geqq 3$ je však

$$\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y^3}+2\sqrt{2}\right)<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}+2{,}84\right)<1,$$

čo je spor.

Stačí teda vyšetrovať prípady $y = 1$ a $y = 2$, čo vedie k riešeniu nerovníc

$$|x-\sqrt{2}|<1, \qquad |x-2\sqrt{2}|<\frac{1}{4}.$$

Prvá z nich má práve dve riešenia: $x = 1$, $x = 2$, a druhá jediné riešenie: $x = 3$.

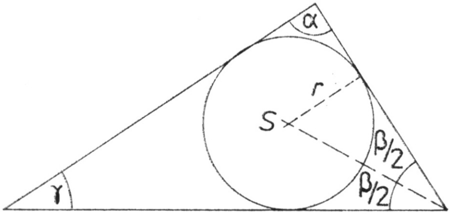
Všetky riešenia v obore prirodzených čísel nerovnice (1) teda sú: (1, 1), (2, 1) a (3, 2).

A - III - 6

Je daná kružnica $k = (S; r)$. Nech M je množina všetkých takých trojuholníkov s vpísanou kružnicou k, ktorých najväčší uhol sa rovná dvojnásobku najmenšieho uhla. Nájdite množinu všetkých bodov, ktorú vyplnia druhé od bodu S najvzdialenejšie vrcholy všetkých trojuholníkov z množiny M.

Riešenie. Nech T je ľubovoľný trojuholník z množiny M a $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$ sú veľkosti jeho vnútorných uhlov. Platí teda $\alpha = 2\gamma$. Druhý od S najvzdialenejší vrchol trojuholníka T je vrchol odpovedajúci uhlu β a jeho vzdialenosť od S bude $r/\sin\dfrac{\beta}{2}$ (obr. 46). Zrejme je

$$\alpha+\beta+\gamma=\beta+3\gamma=\pi \quad \text{a} \quad \gamma \leqq \beta \leqq 2\gamma.$$



Obr. 46

Z toho vyplýva, že musí platiť

$$\frac{\pi}{4} \leqq \beta \leqq \frac{2\pi}{5}. \tag{1}$$

Nech teraz β je uhol vyhovujúci podmienke (1). Potom $\alpha = \frac{2}{3}(\pi - \beta)$, $\gamma = \frac{1}{3}(\pi - \beta)$ vyhovujú rovnostiam $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\alpha = 2\gamma$ a nerovnostiam $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$. To znamená, že trojuholník T s vnútornými uhlami α, β, γ, ktorý patrí do množiny M, existuje.

Hľadanou množinou bodov je preto uzavreté medzikružie ohraničené kružnicami $k_1 = \left(S, r/\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $k_2 = \left(S, r/\sin\frac{\pi}{8}\right)$.