32. ročník matematické olympiády

Korespondenční seminář ÚV MO

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); František Zítek (editor): 32. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1982/83. 24. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. pp. 126–133.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404772

Korespondenční seminář ÚV MO

Cílem korespondenčního semináře je dále zvyšovat úroveň špičkových řešitelů, kteří nejsou z Prahy ani z Bratislavy, a nemají tak možnost pracovat v tamních seminářích pro přípravu na mezinárodní MO. K účasti pozvalo předsednictvo ÚV MO na základě výsledků v MO, návrhů KV MO a individuálního zájmu asi 50 žáků, z nichž se přihlásilo a zúčastnilo 29 žáků - 3 ze Středočeského kraje, 2 z Jihočeského, 1 ze Západočeského, 5 ze Severočeského, 4 z Východočeského, 4 z Jihomoravského, 5 ze Severomoravského, 2 ze Středoslovenského a 3 z Východoslovenského kraje. Pravidelně jim byly rozesílány série poměrně náročných úloh, které měli během 4 až 5 týdnů vyřešit. Došlá řešení byla opravena, ohodnocena a spolu s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli *Ignác Tereščák* (Michalovce), *Martin Klazar* (Louny), *Milan Kratka* (Prievidza), *František Vencl* (Česká Třebová), *Darina Neumanová* (Brno) a *Jiří Votinský* (Pardubice). Uvádíme znění všech úloh zadaných v korespondenčním semináři.

1. Geometrie

1.1 V prostoru je dána rovina ϱ a body A, B v opačných poloprostorech určených rovinou ϱ. Najděte v rovině ϱ všechny body X, pro které je $||XA| - |XB||$ maximální.

1.2 Bod X se pohybuje po přímce p konstantní rychlostí danou vektorem $\mathbf{u}$, bod Y se pohybuje po přímce q konstantní rychlostí danou vektorem $\mathbf{v}$. Přímky p a q jsou mimoběžné a v jednom okamžiku je bod X v bodě A, Y v bodě B. Najděte polohu bodů X, Y, při které je vzdálenost $|XY|$ minimální.

1.3 V rovině je dán trojúhelník ABC a bod P. Označme K, L, M paty kolmic vedených bodem P ke stranám trojúhelníku ABC. Udejte nutnou a postačující podmínku pro to, aby

a) body K, L, M, P ležely na kružnici,

b) body K, L, M ležely na přímce.

1.4 V rovině je dán trojúhelník ABC. Kružnice k_A prochází bodem A a dotýká se strany BC v bodě B, kružnice k_B prochází bodem B a dotýká se strany CA v bodě C, kružnice k_C prochází bodem C a dotýká se strany AB v bodě A. Dokažte, že se kružnice k_A, k_B, k_C protínají v jednom bodě Q. Co platí o úhlech QAB, QBC, QCA?

1.5 V prostoru jsou dány přímky p, q a rovina ϱ, dále kladné číslo d. Popište konstrukci úsečky délky d, která je rovnoběžná s rovinou ϱ, jeden její krajní bod leží na přímce p, druhý na přímce q.

2. Kombinatorika

2.1 Na rohovém poli šachovnice $n \times n$ ($n \geqq 4$) stojí figura, kterou střídavě přemísťují dva hráči. První z nich táhne vždy dvakrát za sebou jako koněm (tj. dvě pole v jednom směru a jedno pole v kolmém směru), zatímco druhý táhne jednou jako koněm s prodlouženým skokem (tři pole v jednom směru a jedno pole ve směru kolmém). První hráč se snaží dostat do protějšího rohu, druhý se mu v tom snaží zabránit. Může první hráč zvítězit při jakékoli hře druhého hráče?

2.2 Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. První hráč vybere bod X na straně AB, druhý hráč bod Y na straně BC a nakonec první hráč bod Z na straně AC.

a) První hráč chce získat trojúhelník XYZ co možná největšího, druhý co možná nejmenšího obsahu. Jaký obsah si může první hráč zajistit?

b) První hráč se snaží získat trojúhelník XYZ nejmenšího možného obvodu, druhý co možná největšího. Jaký nejmenší obvod si může první hráč zajistit?

2.3 Dva hráči hrají následující hru: První si myslí dvě čísla od 1 do 25, druhý je musí uhádnout. Řekne vždy dvě čísla od 1 do 25 a první mu odpoví, kolik čísel (tj. 0, 1 nebo 2) uhodl. Za jaký nejmenší počet otázek může druhý hráč vždy určit myšlená čísla?

2.4 Na desce je několik hromádek kamenů. Dva hráči se střídají v tazích - při každém tahu se rozdělí každá hromádka mající alespoň dva kameny na dvě menší hromádky a to se děje tak dlouho, dokud na všech hromádkách není po jednom kamenu. Kdo učinil poslední tah, vyhrál.

Který z hráčů si může zajistit výhru, jestliže na začátku bylo na každé hromádce méně než N kamenů? (Proveďte diskusi vzhledem k číslu N.)

2.5 Na čtverečkovaném papíře je vyznačen obdélník $m \times n$ čtverečků. Dva hráči po řadě vyškrtávají všechny čtverečky některé řady nebo sloupce, ve kterém byl ještě alespoň jeden nevyškrtnutý čtvereček. Vyhrává ten, kdo vyškrtne poslední čtverečky. Kdo si může zajistit výhru - začínající hráč, anebo jeho partner?

2.6 V řadě za sebou je N polí, na nejlevějším stojí bílá figurka, na nejpravějším černá. Dva hráči se střídají v tazích, při nichž vždy přemístí svou figurku o jedno pole doleva nebo doprava (je-li obsazované pole volné), vynechat tah není možno. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Kdo si může zajistit výhru - první, nebo druhý hráč?

2.7 Na tabuli je napsán mnohočlen $x^{10} + *x^9 + \dots + *x + 1$. Dva hráči postupně zaměňují hvězdičky u členů $x, x^2, \dots, x^9$ reálnými čísly (ne nutně v tomto pořadí). Jestliže výsledný mnohočlen nebude mít reálné kořeny, vyhrává první hráč; bude-li mít alespoň jeden reálný kořen, vyhrává druhý hráč. Který z hráčů si může zajistit vítězství?

3. Geometrická zobrazení

3.1 Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a přímka q. Sestrojte přímku p rovnoběžnou s q tak, aby vytínala na k_1 a k_2 tětivy, jejichž délky dávají součet a.

3.2 Je dána přímka p a dva body A, B ve stejné polorovině určené přímkou p. Najděte na p takový bod X, že $|AX| + |XB| = a$.

3.3 Jsou dány čtyři soustředné kružnice k, l, m, n. Sestrojte přímku p, která protíná kružnice po řadě v bodech A, B, C, D tak, že $|AB| = |CD|$.

3.4 Společným bodem A kružnic k, l vedeme libovolnou přímku, která protíná kružnice v dalších bodech M_1 a M_2. Potom sestrojíme tečny ke kružnicím k, l s body dotyku M_1 a M_2 a jejich průsečík označíme N; dále vedeme středy kružnic S_1, S_2 přímky S_1J, S_2J rovnoběžné s tečnami M_1N, M_2N. Dokažte, že přímka JN prochází jedním pevným bodem bez ohledu na volbu přímky M_1M_2 a úsečka JN má konstantní délku.

3.5 Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, který je tětivový (lze mu opsat kružnici) a jehož strany znáte.

4. Rovnice

4.1 Nechť f je reálná funkce s definičním oborem $(-\infty, \infty)$ taková, že pro jakákoli dvě reálná čísla x, y platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = y f(x) + x f(y).$$

Nechť ξ je reálný kořen některého mnohočlenu s celočíselnými koeficienty. Potom platí $f(\xi) = 0$. Dokažte.

4.2 Dokažte, že polynom

$$p(x) = x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \dots - a_{n-1} x - a_n,$$

kde $a_j \geqq 0$, $j = 1, \dots, n$, a $\sum_{j=1}^{n} a_j > 0$, má právě jeden kladný kořen.

4.3 Dokažte, že polynom

$$x^4 + (-1 + i)x^3 + (3 + i)x^2 - 2(1 + i)x + 5 + i$$

nemá reálný kořen.

4.4 Pro které konstanty a, b, c, d platí identita

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d =$$

$$= (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)?$$

4.5 Rozložte výraz $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n$ na součin dvou polynomů (n je celé, $n > 1$).

4.6 Rovnice

$$x^3 - 5x^2 + x - 1 = 0$$

má kořeny x_1, x_2, x_3. Vypočtěte hodnoty výrazů

$$(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2) \text{ a } (1 - x_1^4)(1 - x_2^4)(1 - x_3^4).$$

4.7 Řešte rovnici

$$\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bx + b + 1} + \frac{1}{ax + x + 1} = 1.$$

5. Teorie čísel

5.1 Dokažte, že na kružnici, jejíž střed má aspoň jednu souřadnici iracionální, leží nejvýše dva body s racionálními souřadnicemi, tj. obě souřadnice jsou racionální čísla.

5.2 Ukažte, že polynom

$$f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{7x}{15}$$

v celých číslech x nabývá celočíselných hodnot.

5.3 Dokažte, že

$$a^n + b^n = c^n, \ a > b, n > b,$$

nemá řešení v celých kladných číslech.

5.4 Kvadratický polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficienty nemá celočíselné kořeny, pokud $f(3)$ a $f(6)$ jsou lichá čísla. Dokažte.

5.5 Dokažte, že pro největší společný dělitel a nejmenší společný násobek platí rovnosti

$$(a, b, c) [ab, bc, ca] = (ab, bc, ca) [a, b, c] =$$

$$= (a, b, c) [a, b, c] [(a, b), (b, c), (c, a)] = abc.$$

(a, b) je největší společný dělitel čísel a, b, $[a, b]$ je nejmenší společný násobek čísel a, b.

5.6 Nechť jsou posloupnosti $(a_1, a_2, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots)$, $(c_1, c_2, \ldots)$ dány rekurentními vztahy

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2^{a_n},$$

$$b_1 = 3, \qquad b_{n+1} = b_n!,$$

$$c_1 = 3, \qquad c_{n+1} = 3^{c_n}.$$

a) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$a_n \leqq b_n \leqq c_n.$$

b) Najděte co největší číslo f a co nejmenší číslo g tak, aby pro posloupnosti $(f_1, f_2, \ldots)$, $(g_1, g_2, \ldots)$ definované

$$f_1 = f, \qquad f_{n+1} = f^{f_n},$$

$$g_1 = g, \qquad g_{n+1} = g^{g_n}$$

platilo

$$f_n \leqq b_n \leqq g_n \quad \text{pro} \quad n \geqq 2.$$

(Přibližte se k nejlepším hodnotám f a g aspoň tak, aby už nebylo možné f zvětšit a g zmenšit o 0,05.)