33. ročník matematické olympiády

Korespondenční seminář ÚV MO

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Beloslav Riečan (editor); Karol Križalkovič (editor): 33. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1983-84. 25. mezinárodní matematická olympiáda (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. pp. 124–132.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404787

Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář ÚV MO je jednou z forem péče o talentované žáky, zvláště pak o ty, kteří nemají možnost navštěvovat speciální školy se zaměřením na matematiku a pracovat v tamních seminářích. Zásadně však nejsou přijímáni studenti pražských škol, ti mají obvykle možnost seznámit se s vybranými okruhy úloh na seminářích řešitelů MO.

K účasti v korespondenčním semináři pozvalo předsednictvo ÚV MO na základě návrhů KV MO a individuálního zájmu téměř 50 žáků, z nichž se přihlásilo 33 řešitelů ze všech krajů republiky:

Kraj	Stč	Jč	Zč	Sč	Vč	Jm	Sm	Bva	Zsl	Ssl	Vsl
Počet řešitelů	1	3	5	2	4	4	2	5	2	1	4

V průběhu 33. ročníku MO jim bylo zasláno pět sérií poměrně náročných úloh. Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře.

Korespondenční seminář je řízen tajemníkem ÚV MO *Karlem Horákem,* který se stará o výběr a přípravu úloh a obvykle provádí i redakci komentářů. Opravu pak zajišťuje několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK v Praze (všichni to jsou bývalí olympionici).

Celý korespondenční seminář absolvovalo 25 řešitelů, nejlepšími v celkovém hodnocení byli *Martin Klazar* (G Louny), *Ján Šefčík* (G A. Markuša, Bratislava), *Jarmila Ranošová* (G M. Koperníka, Bílovec), *Juraj Balázs* (G Košice, Kuzmányho ul.) a *Aleš Limpouch* (G J. K. Tyla, Hradec Králové). Uvádíme znění všech zadaných úloh.

Užití invariantů

1.1 Na tabuli je napsáno několik nul, jedniček a dvojek. Můžeme smazat dvě od sebe různá čísla a místo nich napsat jedno, které se liší od právě smazaných. Dokažte, že jestliže nakonec zůstane na tabuli jediné číslo, pak stejné číslo dostaneme při každém jiném pořadí uvedené operace.

1.2 V tabulce 8×8 jsou zapsána celá čísla. Je dovoleno vybrat libovolný čtverec 3×3 nebo 4×4 a zvětšit v něm všechna čísla o 1. Je vždy možné pomocí takovéto operace dostat tabulku, v níž jsou všechna čísla dělitelná třemi?

1.3 Kruh je rozdělen na 10 výsečí, v každé z nich je jeden kámen. Jedním tahem je možno přemístit libovolné dva kameny do sousedních výsečí tak, aby se přitom pohybovaly v opačných směrech. Je možno takovými tahy dosáhnout toho, aby všechny kameny ležely ve stejné výseči?

1.4 Vrchol A_{12} pravidelného dvanáctiúhelníku je označen znaménkem $-$, ostatní vrcholy $+$. Je dovoleno změnit znaménka na opačná ve třech vrcholech tvořících rovnoramenný nepravoúhlý trojúhelník. Je možno pomocí takovýchto změn dosáhnout toho, aby ve vrcholu A_1 bylo $-$ a v ostatních vrcholech $+$?

1.5 Změní se výsledek předchozí úlohy, jestliže můžeme měnit znaménka i ve vrcholech rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků?

1.6 Čísla 1, 2, . . ., 1975 jsou zapsána ve svém přirozeném pořadí. Je dovoleno vybrat libovolná čtyři čísla a umístit je na stejná místa, kde byla předtím, ale v opačném pořadí. Je možné pomocí takovýchto operací dosáhnout pořadí čísel 1975, 1974, . . ., 2, 1?

1.7 Na kružnici je rozmístěno 10 bílých a 20 černých kamenů. Můžeme vyměnit libovolné dva kameny, mezi kterými stojí ještě tři jiné kameny. Dvě konfigurace kamenů jsou ekvivalentní, jestliže můžeme od jedné ke druhé přejít prováděním uvedené operace. Kolik existuje neekvivalentních konfigurací kamenů?

Planimetrie

2.1 Z měst A a B vyjíždějí v různou dobu různými rychlostmi proti sobě dva jezdci, aby si vyměnili zprávy. Setkají se v místě C a okamžitě se vracejí zpět. Po návratu do svých měst opět vyjíždějí proti sobě s novými zprávami, setkají se v místě D a opět se vracejí atd. Kde se setkají při 1983. cestě, pohybují-li se oba neustále konstantní rychlostí?

2.2 Trojúhelník $A_1B_1C_1$ dostaneme z trojúhelníku ABC otočením o nějaký úhel $\omega < 180°$ okolo středu kružnice opsané trojúhelníku ABC. Průsečíky odpovídajících si stran AB, A_1B_1; BC, B_1C_1 a CA, C_1A_1 jsou vrcholy trojúhelníku podobného trojúhelníku ABC. Dokažte.

2.3 Úhlopříčky rozdělují daný čtyřúhelník $ABCD$ na čtyři trojúhelníky, jimž vepsané kružnice mají shodné poloměry. Dokažte, že $ABCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

2.4 O čtyřúhelníku $ABCD$ víme, že poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, BCD, CDA, DAB jsou shodné. Dokažte, že pak je $ABCD$ obdélník.

2.5 Nechť a, b, c, d jsou strany čtyřúhelníku $ABCD$, e, f nechť jsou velikosti jeho úhlopříček. Označíme-li α, γ dva z protilehlých úhlů čtyřúhelníku, potom platí

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha + \gamma).$$

Dokažte.

2.6 Dokažte, že je-li ABC rovnostranný trojúhelník a P libovolný bod v rovině ABC takový, že neleží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, pak existuje trojúhelník se stranami délky $|PA|$, $|PB|$, $|PC|$.

2.7 Mějme trojúhelník ABC a sestrojme nad jeho stranami rovnostranné trojúhelníky APB, BQC, CRA tak, že trojúhelníky APB ($|AP| = |AB|$) a BQC ($|BQ| = |BC|$) nemají s trojúhelníkem ABC společný žádný vnitřní bod a trojúhelník CRA ($|CR| = |CA|$) leží v polorovině CAB. Dokažte, že $BPRQ$ je rovnoběžník.

Posloupnosti

3.1 Dokažte, že pro každou posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy jsou navzájem různá přirozená čísla, která nemají ve svém dekadickém zápisu nulu, platí pro každé k

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} < 29.$$

3.2 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu m existuje přirozené číslo k tak, že

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{m} a_i\right| = \max_{1 \leqq i \leqq m} |a_i|.$$

3.3 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$, která má tuto vlastnost: existuje přirozené číslo m takové, že

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 0$$

a pro každé přirozené číslo k je $a_{m+k} = a_k$. Dokažte, že existuje přirozené číslo p tak, že pro každé celé nezáporné číslo k platí

$$a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{p+k} \geqq 0.$$

3.4 Uvažujme čtyři posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ takové, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n + b_n,\ b_{n+1} = b_n + c_n,\ c_{n+1} = c_n + d_n,$$

$$d_{n+1} = d_n + a_n.$$

Dokažte, že pokud existují přirozená čísla k, m tak, že

$$a_{k+m} = a_m,\ b_{k+m} = b_m,\ c_{k+m} = c_m,\ d_{k+m} = d_m,$$

pak je

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0.$$

3.5 Nechť pro posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ platí

$$a_n + a_{n+2} \geqq 2a_{n+1}$$

pro každé přirozené n. Dokažte, že pak pro každé n přirozené je

$$\frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}}{n+1} \geqq \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}{n}.$$

3.6 Jsou dána přirozená čísla a_1, a_2. Pro přirozená čísla $n > 2$ položíme $a_n = |a_{n-2} - a_{n-1}|$. Tak jsme definovali posloupnost nezáporných celých čísel a_n. Je-li největší člen této posloupnosti 1984, jaký je největší možný index prvního nulového členu?

3.7 Je dána posloupnost číslic $\{a_n\}$ neobsahující číslici 9. Tato posloupnost určuje posloupnost $\{b_n\}$, jejíž členy mají dekadické zápisy $b_1 = (a_1)$, $b_2 = (a_1a_2)$ atd. Dokažte, že posloupnost $\{b_n\}$ obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.

Kombinatorické úlohy z teorie čísel

4.1 Jsou dána přirozená čísla a, b. Existují přirozená čísla c, d taková, že $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$?

4.2 Turnaje se zúčastnilo $(m - 1)n + 1$ sportovců. Dokažte, že buď je mezi nimi m účastníků, kteří se navzájem neznají, nebo je mezi nimi sportovec, který se zná s alespoň n ostatními sportovci.

4.3 V tabulce $n \times m$ jsou zapsána navzájem různá reálná čísla. V každém řádku (resp. sloupci) je podtrženo k (resp. r) největších čísel. Dokažte, že alespoň kr čísel je podtrženo dvakrát.

4.4 Je dáno prvočíslo p. Pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ označíme symbolem a_k zbytek čísla k^p při dělení číslem p^2. Určete

$$s = \sum_{k=1}^{p-1} a_k .$$

4.5 Nechť p_n, q_n jsou nesoudělná přirozená čísla, pro něž platí

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n}.$$

Dokažte, že platí

a) p_n je sudé pro všechna n;

b) pro každé k existuje n tak, že 2^k dělí p_{n+m} pro všechna m.

4.6 V posloupnosti 19842376... je každá číslice počínaje pátou rovna poslední číslici součtu předchozích čtyř číslic.

a) Existuje v posloupnosti čtveřice 1985?

b) Vyskytuje se v posloupnosti čtveřice 4198?

Rovnice a funkce

5.1 Označme Q^2 množinu všech bodů v rovině R^2, jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla. Rozhodněte, zda

a) sjednocení všech úseček, jejichž krajní body náleží množině Q^2, pokrývá rovinu R^2,

b) konvexní obal Q^2 (tj. nejmenší konvexní podmnožina R^2 obsahující množinu Q^2) je celá rovina.

5.2 Najděte všechna celá čísla x, pro která je

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

úplný čtverec.

5.3 Určete všechna reálná čísla a tak, aby pro kořeny x_1, x_2, x_3 rovnice

$$x^3 - 6x^2 + ax + a = 0$$

platilo

$$(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

5.4 Mohou mít rovnice

$$x^5 - x - 1 = 0, \quad x^2 + ax + b = 0,$$

kde a, b jsou racionální čísla, společný (komplexní) kořen?

5.5 Uvažujme rovnici

$$\sqrt{2p + 1 - x^2} + \sqrt{3x + p + 4} = \sqrt{x^2 + 9x + 3p + 9}, \quad (1)$$

kde x, p jsou reálná čísla. Ukažte, že pak je

$$(x^2 + x - p)(x^2 + 8x + 2p + 9) = 0,$$

a najděte množinu reálných parametrů p, pro které má rovnice (1) právě jeden reálný kořen.

5.6 Ukažte, že rovnice

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n}x^n = 0$$

nemá pro sudá n žádný reálný kořen.

5.7 Nechť f a g jsou zobrazení množiny A do sebe. Funkci f nazveme n-tou funkcionální odmocninou g (n je přirozené číslo), je-li

$$f^n(x) = g(x)$$

pro každé $x \in$ A. Přitom definujeme

$$f^1(x) = f(x),\ f^{n+1}(x) = f(f^n(x)).$$

a) Dokažte, že funkce g: $\mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}^+$, $g(x) = \frac{1}{x}$, má nekonečně mnoho n-tých funkcionálních odmocnin pro každé $n \geqq 2$.

b) Dokažte, že existuje prosté zobrazení R na R, které nemá n-tou funkcionální odmocninu pro žádné $n \geqq 2$.