# 33. ročník matematické olympiády

## Správa o 25. medzinárodnej matematickej olympiáde

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Beloslav Riečan (editor); Karol Križalkovič (editor): 33. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1983-84. 25. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. pp. 133–167.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404788

# Správa o 25. medzinárodnej matematickej olympiáde

## 1. *Organizácia a priebeh súťaže*

Jubilejná - 25. medzinárodná matematická olympiáda sa konala v hlavnom meste našej republiky - v Prahe. Táto skutočnosť znamenala možno menšiu atraktívnosť pre našich reprezentantov, lebo účasť v súťaži nebola spojená so zahraničnou cestou. Na druhej strane však umožnila zoznámiť sa s neopakovateľnou atmosférou súťaže oveľa širšiemu okruhu našich odborníkov ako je to možné v prípade jej konania sa v zahraničí.

Usporiadateľom 25. MMO bolo Ministerstvo školstva ČSR (po vzájomnej dohode oboch národných ministerstiev), ktoré prípravou a organizačným zabezpečením poverilo Matematicko-fyzikálnu fakultu Univerzity Karlovej a Matematický ústav ČSAV. Na usporiadaní MMO sa ďalej podieľali JČSMF, ÚV SZM, ÚV MO, odbor školstva NVP a KV MO v Prahe.

Možno to neprichodí hodnotiť nám a hodnotiť to už teraz, ale pražská olympiáda sa vyznačovala priateľskou atmosférou znásobenou srdečnosťou a obetavosťou usporiadateľov a znamenala úspech tak z hľadiska upevnenia priateľstva a spolupráce mladých matematikov z celého sveta, ako aj z hľadiska upevnenia dobrého mena usporiadajúcej krajiny. Zásluhu na tom mal predovšetkým organizačný výbor na čele s *prof. dr. Karlom Drbohlavom, DrSc.* Nezabudnuteľným zážitkom bol otvárací ceremoniál i vyhlásenie výsledkov olympiády v aule Karolína, bohatý kultúrny a spoločenský program (vrátane prijatia na staromestskej radnici, výletu na Karlštejn atď.), ako aj matematické hry organizované pre mládež po skončení súťaže. Druhý raz v histórii olympiád sa uskutočnilo v jej programe sympózium, na ktorom referovali viacerí delegáti o výchove matematických talentov v jednotlivých krajinách. Za ČSSR prehovoril dlhoročný funkcionár MO *prof. dr. Jozef Moravčík, CSc.* Priebeh olympiády bol široko komentovaný našimi hromadnými oznamovacími prostriedkami, vrátane rozhlasu a televízie. Účastníci sa mali príležitosť zoznámiť s hodnotnou výstavkou matematických materiálov z mnohých krajín.

Olympiády sa zúčastnil rekordný počet 34 krajín z 5 kontinentov (po prvýkrát sa zúčastnili Cyprus a Nórsko) i rekordný počet 192 účastníkov. Prítomný bol aj zástupca UNESCO *prof. E. Jacobsen.* Otvorenie súťaže sa konalo 3. júla 1984, záver 9. júla 1984, samotná súťaž prebiehala v dňoch 4. a 5. júla, ďalšie 3 dni boli venované oprave úloh a ich koordinácii (hlavným koordinátorom bol *prof. dr. Lev Bukovský, DrSc.*, z PF UPJŠ v Košiciach). Ale ešte predtým medzinárodná jury (pod vedením jedného z našich najskúsenejších olympijských pracovníkov *dr. Františka Zítka, CSc.*, z MÚ ČSAV v Prahe) vybrala 6 súťažných úloh. Podklady jej pripravila problémová komisia (vedená *členom korešpondentom ČSAV prof. dr. Miroslavom Fiedlerom, DrSc.* z MÚ ČSAV v Prahe), ktorá vybrala a spracovala 16 najvhodnejších úloh spomedzi úloh navrhnutých jednotlivými krajinami. Jury rozhodla hlasovaním o konečnom výbere. Bola pritom o niečo náročnejšia ako problémová komisia. Možno až príliš, čo ostatne môže čitateľ posúdiť sám.

## Úlohy prvého súťažného dňa

**1.** Nech $x, y, z$ sú nezáporné reálne čísla, $x + y + z = 1$. Dokážte, že

$$0 \leqq xy + yz + zx - 2xyz \leqq \frac{7}{27}.$$

(Táto úloha bola navrhnutá NSR.)

**2.** Nájdite takú dvojicu $(a, b)$ celých kladných čísel, aby platilo:

(1) číslo $ab(a + b)$ nie je deliteľné číslom 7,

(2) číslo $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ je deliteľné číslom $7^7$.

Výsledok zdôvodnite.

(Táto úloha bola navrhnutá Holandskom.)

**3.** V rovine sú dané dva rôzne body $O$, $A$. Pre ľubovoľný bod $X$ roviny rôzny od bodu $O$ označíme symbolom $\alpha(X)$ veľkosť orientovaného uhla $AOX$ meranú v radiánoch proti smeru hodinových ručičiek ($0 \leqq \alpha(X) < 2\pi$) a symbolom $C(X)$ kružnicu so stredom v bode $O$ a polomerom dĺžky $|OX| + \dfrac{\alpha(X)}{|OX|}$. Daný je konečný počet farieb a každý bod roviny je zafarbený jednou z nich. Dokážte, že v rovine existuje taký bod $X$, že $\alpha(X) > 0$ a na kružnici $C(X)$ existuje aspoň jeden bod tej istej farby ako $X$.

(Táto úloha bola navrhnutá Rumunskom.)

## Úlohy druhého súťažného dňa

**4.** V konvexnom štvoruholníku sa priamka $CD$ dotýka kružnice o priemere $AB$. Dokážte, že priamka $AB$ sa dotýka kružnice o priemere $CD$ vtedy a len vtedy, keď sú priamky $BC$, $AD$ rovnobežné.

(Táto úloha bola navrhnutá Rumunskom.)

**5.** Nech $d$ je súčet dĺžok všetkých uhlopriečok a $p$ je obvod rovinného konvexného $n$-úholníka ($n > 3$). Dokážte, že

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2$$

($[x]$ je celá časť čísla $x$, tj. najväčšie celé číslo neprevyšujúce $x$).

(Táto úloha bola navrhnutá Mongolskom.)

**6.** Nech $a, b, c, d$ sú nepárne celé čísla vyhovujúce nasledujúcim podmienkam:

(1) $0 < a < b < c < d$,

(2) $ad = bc$,

(3) $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ pre nejaké celé čísla $k, m$.

Dokážte, že $a = 1$.

(Táto úloha bola navrhnutá Poľskom.)

Po oba dni mali súťažiaci na riešenie k dispozícii čas 4,5 hodiny.

## 2. *Výsledky* 25. *MMO*

Po náročnej koordinácii, pri ktorej panovala spokojnosť s našimi koordinátormi (československé riešenia boli koordinované autorskými krajinami vzhľadom na to, že sme boli usporiadajúcou krajinou), jury určila výsledky. Stalo sa tak na zasadnutí siahajúcom hlboko do noci. Okrem určenia výsledkov jury prerokovala na záverečnom zasadnutí aj ďalšie otázky. Medziiným sa dohodlo, že v r. 1985 sa uskutoční medzinárodná matematická olympiáda vo Fínsku, v r. 1986 v Poľsku a v r. 1988 v Austrálii. Otvoreným ostal rok 1987, na ktorý predložili návrh Kuba aj Švédsko.

Jury rozhodla, že ocenených bude polovica zo 192 účastníkov. Pri tradičnom rozdelení prvých, resp. druhých, resp. tretích cien v pomere 1 : 2 : 3, bolo udelených 14 prvých, 32 druhých a 49 tretích cien. Okrem toho bola udelená jedna osobitná cena za originálne riešenie úlohy č. 5. Prehľad výsledkov je uvedený v priloženej tabuľke (str. 138).

K celkovým výsledkom treba poznamenať, že 3 krajiny vyslali neúplný počet účastníkov: Alžírsko štyroch, Luxembursko a Nórsko po jednom. (Ostatne, už aj z tohto vidieť, že nie je možné stanoviť oficiálne poradie krajín.) MMO mala 8 absolútnych víťazov, ktorí získali plný počet 42 bodov. Boli to: *A. Astrelin* (ZSSR), *Dan Than Son* (Vietnam), *K. Gröger* (NDR), *K. Ignatiev* (ZSSR), *B. D. Mihov* (Bulharsko), *D. Moews* (USA), *L. Oridoroga* (ZSSR), *D. Tataru* (Rumunsko).

## 3. *Hodnotenie československej účasti*

Predsedníctvo ÚV MO určilo členov čs. družstva na svojom zasadnutí 21. 6. 1984. Vychádzalo najmä z výsledkov celoštátneho kola a krajského kola ako aj permanentnej súťaže prebiehajúcej v rámci 3-týždňového sústredenia užšieho

| Krajina | Počet bodov | Neoficiálne poradie | Počet cien 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|---|---|---|
| Alžírsko | 36 | 28 | — | — | — |
| Austrália | 103 | 15 | — | 1 | 2 |
| Belgicko | 56 | 23—24 | — | — | 1 |
| Brazília | 92 | 18 | — | — | 3 |
| Bulharsko | 203 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| Cyprus | 47 | 26 | — | — | 1 |
| ČSSR | 125 | 13 | — | 2 | 2 |
| Fínsko | 31 | 29 | — | — | — |
| Francúzsko | 126 | 12 | — | 2 | 2 |
| Grécko | 88 | 19 | — | 1 | — |
| Holandsko | 93 | 17 | — | 1 | 2 |
| Juhoslávia | 105 | 14 | — | — | 4 |
| Kanada | 83 | 20 | — | — | 1 |
| Kolumbia | 80 | 21 | — | — | 2 |
| Kuba | 67 | 22 | — | — | 1 |
| Kuvajt | 9 | 33 | — | — | — |
| Luxembursko | 22 | 32 | — | — | 1 |
| Maďarsko | 195 | 4—5 | 1 | 4 | 1 |
| Maroko | 56 | 23—24 | — | — | 1 |
| Mongolsko | 146 | 10 | — | 3 | 2 |
| NDR | 161 | 8 | 1 | 2 | 3 |
| NSR | 150 | 9 | — | 2 | 4 |
| Nórsko | 24 | 31 | — | — | 1 |
| Poľsko | 140 | 11 | — | 1 | 5 |
| Rakúsko | 97 | 16 | — | 1 | 2 |
| Rumunsko | 199 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| Španielsko | 43 | 27 | — | — | — |
| Švédsko | 53 | 25 | — | — | — |
| Taliansko | 0 | 34 | — | — | — |
| Tunis | 29 | 30 | — | — | — |
| USA | 195 | 4—5 | 1 | 4 | 1 |
| Veľká Británia | 169 | 6 | 1 | 3 | 1 |
| Vietnam | 162 | 7 | 1 | 2 | 3 |
| ZSSR | 235 | 1 | 5 | 1 | — |

10-členného výberu. Toto sústredenie sa konalo 4.—23. 6. 1984 v Bratislave. Predsedníctvo prihliadalo tiež k sústredeniu širšieho kádra (1.—8. 4. 1984 v Brezovej pod Bradlom) a k celoštátnemu korešpondenčnému semináru. Určilo týchto reprezentantov: *Juraja Balázsa* (4. ročník gymnázia na Kuzmányho ul. v Košiciach), *Martina Grajcara* (4. ročník gymnázia M. Koperníka v Bílovci), *Pavla Krtouša* (3. ročník gymnázia v Liberci), *Adama Obdržálka* (2. ročník gymnázia W. Piecka v Prahe), *Jána Šefčíka* (3. ročník gymnázia A. Markuša v Bratislave) a *Jiřího Witzanyho* (4. ročník gymnázia W. Piecka v Prahe). Náhradníkom bol *Petr Hájek* (2. ročník gymnázia W. Piecka v Prahe). Vedúcim čs. delegácie bol *prof. dr. Beloslav Riečan, DrSc.*, z MFF UK v Bratislave, jeho zástupcom *dr. Leo Boček, CSc.*, z MFF UK v Prahe.

Dosiahnuté výsledky sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

| Žiak | Počet bodov za riešenie úlohy č. 1 2 3 4 5 6 | Súčet bodov | Udelená cena a celkové umiestnenie | |
|---|---|---|---|---|
| Juraj Balázs | 7 7 0 7 4 1 | 26 | 2. | 47.—49. |
| Martin Grajcar | 6 7 0 7 4 1 | 25 | 3. | 50.—52. |
| Pavel Krtouš | 0 1 0 6 3 1 | 11 | — | 123.—132. |
| Adam Obdržálek | 3 1 0 4 1 0 | 9 | — | 139.—143. |
| Ján Šefčík | 7 7 0 6 0 0 | 20 | 3. | 76.—81. |
| Jiří Witzany | 7 1 7 6 7 6 | 34 | 2. | 25.—28. |
| | | 125 | | |

Vzhľadom na mimoriadnu náročnosť príkladov 25. MMO môžme s uspokojením konštatovať, že naši reprezentanti podali solídne výkony. Isteže, naše (neoficiálne) 13. miesto nepôsobí efektne a v posledných rokoch sme si zvykli na umiestnenie o niečo lepšie. Treba si však uvedomiť, že medzitým rady našich súťažiacich opustilo niekoľko výnimočných talentov (napr. jeden z nich, Igor Kříž, už tohto roku ako poslucháč 1. ročníka MFF UK v Prahe získal popredné umiestnenie v celoštátnom kole ŠVOČ), do nášho družstva nastúpili noví, nadaní síce, ale neskúsení členovia. Svoje zohrala aj napätá atmosféra medzinárodnej súťaže.

Na druhej strane, v takej náročnej súťaži, akou MMO je, hrá významnú úlohu aj náhoda. Keby napr. aj zvyšní dvaja členovia nášho tímu boli získali ceny (tj. keby boli uhrali svoj štandard, ako to dokázal urobiť v neoficiálnom súťažení, pravda, v neporovnateľne uvoľnenejšej atmosfére, náš náhradník), boli by sme zopakovali vlaňajší úspech a umiestnili sa v prvej desiatke. Alebo taký útok nášho Witzanyho na 1. cenu. Zo suchých čísel sa nedá vyčítať ten drobný krôčik, čo ho od nej delil. Witzanyho položil druhý príklad. Mimochodom príklad bez zvláštnej invencie, ani nie obzvlášť ťažký. Bolo treba upraviť binóm; kto prišiel na vhodnú úpravu, príklad vyriešil. Jiří uskutočnil niekoľko rôznych jednoduchších i zložitejších obratov. V jednom z nich sa už implicitne objavilo riešenie. Možno Jiřímu chýbalo 5 minút a bol by mal namiesto jedného bodu za 2. príklad bodov sedem, namiesto druhej ceny, cenu prvú.

Ale také je už súťaženie, treba ho brať športovo. Pre všetkých našich súťažiacich bola MMO životným zážitkom, pre tých mladších azda aj povzbudením do ďalšieho ročníka súťaže. Zanedbateľným nie je ani spôsob, akým na 25. MMO zvíťazila myšlienka priateľstva medzi národmi. Ani to, že sa tak stalo v hlavnom meste našej vlasti.

## 4. *Řešení úloh* 25. *MMO*

**Řešení 1. úlohy.** K důkazu nezápornosti uvedeného výrazu si stačí uvědomit, že $0 \leqq x, y, z \leqq 1$, takže

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx \geqq 0.$$

Můžeme také díky symetrii předpokládat $x \leqq y \leqq z$, takže $x \leqq \frac{1}{3}$ a

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy + yz(1 - 2x) + zx \geqq 0.$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a harmonickým průměrem platí dokonce

$$\frac{xy + yz + zx}{3} \geqq \frac{3}{\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \frac{3\,xyz}{x + y + z} = 3xyz,$$

tj.

$$xy + yz + zx \geqq 9xyz.$$

Nyní dokážeme druhou nerovnost. Položme $x = \frac{1}{3} + a,$

$y = \frac{1}{3} + b$, $z = \frac{1}{3} + c$, podle předpokladu úlohy pak je

$a + b + c = 0$, $-\frac{1}{3} \leqq a, b, c \leqq \frac{2}{3}$ a

$$xy + yz + zx - 2xyz = \frac{7}{27} + \frac{1}{3}(ab + bc + ca) - 2abc =$$

$$= \frac{7}{27} + \frac{1}{3}(bc - a^2 - 6abc). \qquad (1)$$

Vzhledem k symetrii můžeme předpokládat $a \leqq b \leqq c$, pak musí být buď $a \leqq b \leqq 0 \leqq c$, nebo $a \leqq 0 \leqq b \leqq c$.

V prvním případě je $bc - a^2 - 6abc \leqq 0$, v druhém případě můžeme psát pro $-\frac{1}{3} \leqq a \leqq 0$

$$bc - a^2 - 6abc = bc - (b + c)^2 - 6abc = -(b - c)^2 -$$
$$- 3bc - 6abc = -(b - c)^2 - 3bc(1 + 2a) \leqq 0$$

s rovností, právě když $b = c = a = 0$. V obou případech plyne z (1) nerovnost

$$xy + yz + zx - 2xyz \leqq \frac{7}{27}.$$

**2. řešení.** Nechť např. $x \geqq \frac{1}{2}$, pak je

$$xy + yz + zx - 2xyz = x(y + z) + yz(1 - 2x) =$$

$$= x(1 - x) + yz(1 - 2x) \leqq x(1 - x) \leqq \frac{1}{4} < \frac{7}{27}.$$

Vzhledem k symetrii zbývá vyšetřit jen případ, kdy je $0 \leqq x, y, z < \frac{1}{2}$. Položme $x' = 1 - 2x$, $y' = 1 - 2y$, $z' = 1 - 2z$, pak je

$$x' + y' + z' = 1, \qquad x', y', z' > 0$$

a

$$xy + yz + zx - 2xyz = \frac{1}{4}(1 + x'y'z').$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dostaneme

$$x'y'z' \leqq \left(\frac{x' + y' + z'}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

takže

$$xy + yz + zx - 2xyz \leqq \frac{7}{27}.$$

**3. řešení.** Uvažujme mnohočlen

$$p(t) = (t - x)(t - y)(t - z) =$$

$$= t^3 - t^2 + t(xy + yz + zx) - xyz.$$

Máme tedy dokázat, že pro $x \geqq y \geqq z \geqq 0$, $x + y + z = 1$ je

$$-\frac{1}{8} \leqq p\left(\frac{1}{2}\right) \leqq \frac{1}{216}.$$

Je-li $x \geqq \frac{1}{2}$, je $y \leqq \frac{1}{2}$, $z \leqq \frac{1}{2}$, $p\left(\frac{1}{2}\right) \leqq 0$ a podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$-p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{2x - \frac{1}{2}}{3}\right)^3 \leqq \frac{1}{8},$$

podobně pro $x \leqq \frac{1}{2}$ je

$$0 \leqq p\left(\frac{1}{2}\right) \leqq \left(\frac{\frac{3}{2} - x - y - z}{3}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

**4. řešení.** Funkce

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx - 2xyz$$

je spojitá a nabývá proto v uvažovaném definičním oboru $0 \leqq x, y, z \leqq 1$, $x + y + z = 1$ svého maxima. Je-li $x < \frac{1}{2}$ a $y \neq z$, platí

$$f\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) = x(y+z) + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 (1-2x) >$$

$$> x(y+z) + yz(1-2x) = f(x, y, z).$$

Z důvodu symetrie můžeme předpokládat, že $x \leqq y \leqq z$. Není-li $x = y = z = \frac{1}{3}$, je buď $x < y < z$, nebo $x = y < z$ $\left(\text{v obou případech musí být } x < \frac{1}{2}\right)$, takže

$$f\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) > f(x, y, z),$$

nebo $x < y = z$ a $z \leqq \frac{1}{2}$, takže pokud $z \neq \frac{1}{2}$, je

$$f\left(z, \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) > f(z, x, y) = f(x, y, z).$$

Pro $y = z = \frac{1}{2}$, $x = 0$ máme $f\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$.

Funkce $f$ tedy nabývá v uvedeném definičním oboru svého maxima v jediném bodě $x = y = z = \frac{1}{3}$ a je

$$f(x, y, z) \leqq f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

**5. řešení.** Označme $k = xy + yz + zx - 2xyz = x(1-x) + yz(1-2x)$. Vzhledem k symetrii můžeme předpokládat, že $x \leqq \frac{1}{3}$. Protože

$$y + z = 1 - x,$$

$$yz = \frac{k + x(x-1)}{1-2x},$$

jsou čísla $y$, $z$ reálné kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 + (x-1)\,t + \frac{k + x\,(x-1)}{1-2x} = 0,$$

pro jejíž diskriminant platí

$$(x-1)^2\,(1-2x) - 4k - 4x(x-1) \geqq 0,$$

neboli

$$k \leqq -\frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{4}\,.$$

Funkce $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{4}$ má v intervalu $\langle 0, \frac{1}{3} \rangle$ nezápornou derivaci

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x = \frac{1}{2}\,x(1-3x) \geqq 0,$$

takže

$$k \leqq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

**6. řešení.** Najdeme extrémy funkce

$$f(x, y) = xy + y(1 - x - y) +$$

$$+ (1 - x - y)x - 2xy(1 - x - y) =$$

$$= x + y - x^2 - y^2 - 3xy + 2x^2y + 2xy^2$$

v trojúhelníku $T$ s vrcholy (0, 0), (0, 1), (1, 0). Ty budou ležet buď na jeho hranici, nebo v jeho vnitřních bodech, pro které zároveň

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2x - 3y + 4xy + 2y^2 =$$

$$= (2x + y - 1)(2y - 1) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 2y - 3x + 4xy + 2x^2 =$$

$$= (2y + x - 1)(2x - 1) = 0.$$

Snadno zjistíme, že těmto dvěma podmínkám vyhovuje jediný vnitřní bod trojúhelníku $T$, totiž $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, v němž

$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$. Zbývá prozkoumat hranici trojúhelníku $T$, tj. vyšetřit průběh funkce

$$f(x, 0) = f(0, x) = f(x, 1 - x) = x(1 - x)$$

v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Tam je ale $0 \leqq x(1 - x) \leqq \frac{1}{4}$.

Funkce $f(x, y)$ nabývá v trojúhelníku $T$ maxima $\frac{7}{27}$ v bodě $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ a minima 0 v bodech (0, 0), (0, 1), (1, 0), takže je

$$0 \leqq xy + yz + zx - 2xyz \leqq \frac{7}{27}$$

s rovností vlevo pro trojice (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) a vpravo pro $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

**Řešení 2. úlohy.** Podle binomické věty je

$$\begin{aligned}
&(a + b)^7 - a^7 - b^7 = \\
&= 7ab((a^5 + b^5) + 3ab(a^3 + b^3) + 5a^2b^2(a + b)) = \\
&= 7ab(a + b)(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) = \\
&= 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Vyhovují-li čísla $a$, $b$ podmínkám úlohy, je číslo $a^2 + ab + b^2$ dělitelné číslem $7^3 = 343$. Zkusme např. $a = 1$ a hledejme $b$ tak, aby $b^2 + b + 1$ bylo dělitelné 343. Vyhovuje $b = 18$.

**2. řešení.** Použijeme rovnost (1). Položme $a = 1$ a hledejme $b$ tak, aby čísla $b$, $b + 1$ nebyla dělitelná sedmi a aby $b^2 + b + 1$ bylo dělitelné $7^3$. Podle Eulerovy věty platí pro nesoudělná čísla $r$, $s$, že $r^{\varphi(s)} - 1$ je dělitelné číslem $s$, kde $\varphi(s)$ je počet přirozených čísel menších než $s$ a nesoudělných s $s$. Je-li tedy $r$ číslo, které není dělitelné sedmi, je

$$r^{\varphi(7^3)} - 1 = r^{6.7^2} - 1 = (r^{2.7^2} - 1)(r^{4.7^2} + r^{2.7^2} + 1)$$

dělitelné $7^3$, a není-li ani $r^{98} - 1$ dělitelné sedmi, bude $r^{2\cdot 98} + r^{98} + 1$ dělitelné $7^3$. Dvojice $a = 1$, $b = r^{98}$ tedy vyhovuje podmínkám úlohy, pokud žádné z čísel

$$r,\ r^{98} - 1,\ b + 1 = r^{98} + 1$$

není dělitelné sedmi.

Není-li $r$ dělitelné sedmi, dává $r^6$ podle Fermatovy věty při dělení sedmi zbytek 1. Protože $98 = 6.16 + 2$, dávají čísla $r^{98}$ a $r^2$ při dělení sedmi stejný zbytek, takže stačí najít takové $r$, aby žádné z čísel $r$, $r^2 - 1$, $r^2 + 1$ nebylo dělitelné sedmi. Odtud plyne, že dvojice $a = 1$, $b = r^{98}$ vyhovují úloze, právě když $r$ dává při dělení sedmi zbytek 2, 3, 4 nebo 5.

**3. řešení.** Řešením úlohy jsou právě ty dvojice $(a, b)$, pro něž $a \not\equiv 0 \pmod 7$, $b \not\equiv 0 \pmod 7$, $a + b \not\equiv 0 \pmod 7$ a

$$a^2 + b^2 + ab \equiv 0 \pmod{7^3}. \qquad (2)$$

Vyhovuje-li dvojice $(a, b)$ rovnici (2), vyhovuje jí zřejmě i dvojice $(ka, kb)$ pro libovolné přirozené číslo $k$. Vyhovuje-li tedy úloze dvojice $(a, b)$, vyhovuje podle Eulerovy věty i dvojice $(1, a^{293}b)$. Chceme-li tedy najít všechny dvojice $(a, b)$ vyhovující úloze, stačí najít všechna řešení tvaru $(1, t)$, ostatní pak budou tvaru $(k, kt)$, kde $k \not\equiv 0 \pmod 7$.

Řešme tedy rovnici

$$t^2 + t + 1 \equiv 0 \pmod{7^3}. \tag{3}$$

Vyhovuje-li $t$ rovnici (3), vyhovuje jí i (mod 7) a snadno zjistíme, že $t \equiv 2 \pmod 7$ nebo $t \equiv 4 \pmod 7$.

Nechť $t \equiv 2 \pmod 7$, tj. $t = 7m + 2$. Pak má rovnice

$$(7m + 2)^2 + (7m + 2) + 1 \equiv 0 \pmod{7^2}$$

neboli

$$35m + 7 \equiv 0 \pmod{7^2}$$

neboli

$$5m + 1 \equiv 0 \pmod 7$$

řešení $m \equiv 4 \pmod 7$. Proto vyhovuje-li $t \equiv 2 \pmod 7$ rovnici (3), je $t \equiv 30 \pmod{7^2}$, tj. $t = 49n + 30$. Platí tedy

$$(49n + 30)^2 + (49n + 30) + 1 \equiv 0 \pmod{7^3},$$

neboli

$$61n + 19 \equiv 0 \pmod 7$$

a odtud $n \equiv 6 \pmod{7}$. V případě $t \equiv 2 \pmod{7}$ jsme našli jediné řešení rovnice (3) $t \equiv 324 \pmod{7^3}$.

V případě $t \equiv 4 \pmod{7}$ najdeme analogicky druhé řešení rovnice (3) $t \equiv 18 \pmod{7^3}$.

Řešením úlohy jsou všechny dvojice přirozených čísel

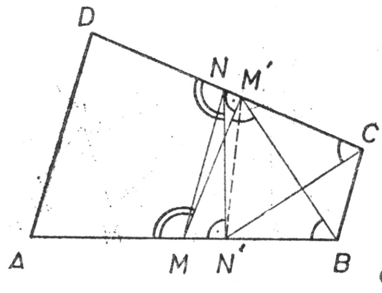
$$(a, b) \equiv (k, 18k) \text{ nebo } (k, 324k) \pmod{7^3},$$

kde $k \not\equiv 0 \pmod{7}$.

**Řešení 3. úlohy.** Uvažujme dvě kružnice $R = (O, r)$ a $S = (O, s)$, kde $0 < r < s < 1$. Na kružnici $R$ existuje bod $X$ takový, že $S = C(X)$. Je to bod $X$, pro nějž $\alpha(X) = r(s - r)$ (zřejmě $0 < \alpha(X) < 1$). Nevyskytuje-li se barva bodu $X$ na kružnici $S$, znamená to, že množina všech barev na kružnici $R$ se liší od množiny všech barev na kružnici $S$.

Kdyby dokazované tvrzení neplatilo, znamenalo by to, že na každých dvou různých kružnicích se středem $O$ a poloměrem menším než 1 jsou různé množiny barev. Množina všech barev, jimiž jsou obarveny body roviny, by tedy měla nekonečně mnoho podmnožin a nebyla by konečná.

**Řešení 4. úlohy.** Označme $M$ střed strany $AB$, $M'$ pravoúhlý průmět bodu $M$ na přímku $CD$ (obr. 30). Protože



Obr. 30

podle předpokladu leží bod $M'$ na kružnici s průměrem $AB$, je trojúhelník $BM'M$ rovnoramenný, neboli

$$|\sphericalangle MBM'| = |\sphericalangle MM'B| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle AMM'|.$$

Dále označme $N$ střed strany $CD$ a $N'$ jeho průmět na přímku $AB$. Protože $|\sphericalangle MM'D| = |\sphericalangle NN'A| = 90°$, je

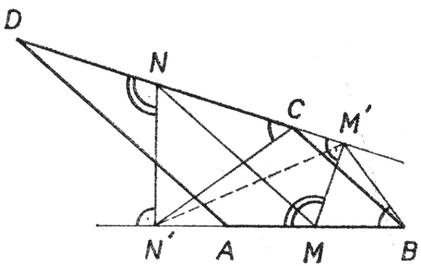
$$|\sphericalangle AMM'| = |\sphericalangle DNN'|$$

a body $M, M', N, N'$ leží na kružnici s průměrem $MN$.

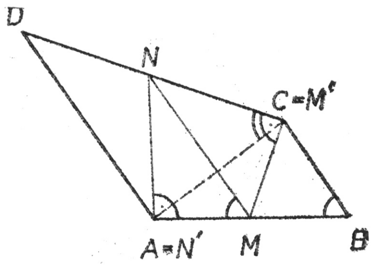
Kružnice nad průměrem $CD$ se dotýká přímky $AB$, právě když trojúhelník $CN'N$ je rovnoramenný, tj. právě když

$$|\sphericalangle NCN'| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle DNN'| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle AMM'| = |\sphericalangle MBM'|.$$

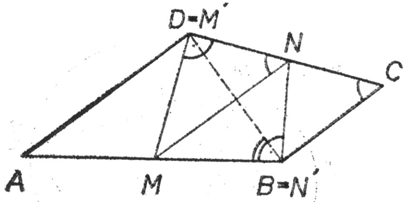
To nastane pro $M' \neq C$ a $N' \neq B$ právě tehdy, leží-li body $M', N', B, C$ na kružnici (obr. 30, 31). Pokud je $M' = C$ (obr. 32) nebo $N' = B$ (obr. 33), je zřejmě $|\sphericalangle NCN'| = |\sphericalangle MBM'|$, právě když $MN \| BC$, tj. $AD \| BC$, takže




Obr. 31




Obr. 32



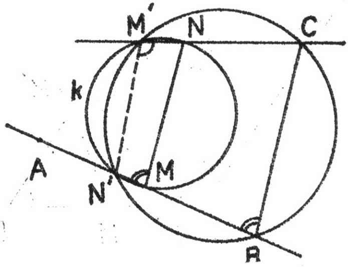

Obr. 33

v tomto speciálním případě jsme s důkazem hotovi (dokonce bude $A = N'$; resp. $D = M'$).

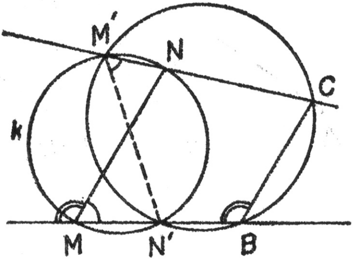
Zbývá ukázat, že čtyři různé body $M'$, $N'$, $B$, $C$ leží na kružnici, právě když

$$|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle ABC|,$$

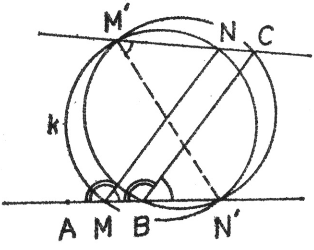
tj. jsou-li protější strany $BC$ a $AD$ čtyřúhelníku $ABCD$ rovnoběžné. To ale plyne okamžitě z věty o obvodových úhlech - jen je třeba uvážit všechny možné polohy bodů $M'$, $N'$ vůči bodům $M$, $N$, $B$, $C$ (podle toho je buď $|\sphericalangle N'MN| = |\sphericalangle N'M'N|$ nebo $|\sphericalangle N'MN| = 180° - |\sphericalangle N'M'N|$ a po-



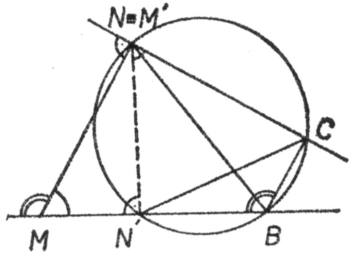

Obr. 34a



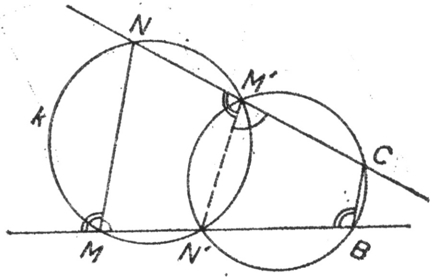

Obr. 34b




Obr. 34c




Obr. 34d

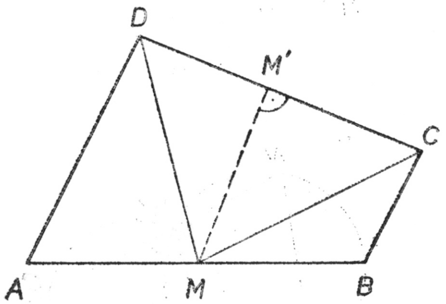



Obr. 34e

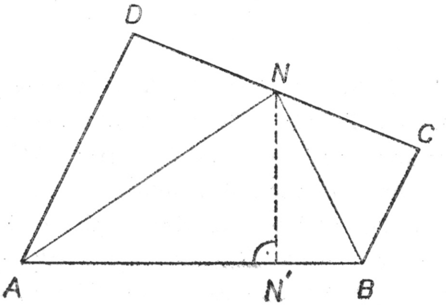
dobně buď $|\sphericalangle N'BC| = 180° - |\sphericalangle N'M'N|$ nebo $|\sphericalangle N'BC| = |\sphericalangle N'M'N|$). Ze všech 16 možností však stačí uvažovat jen případy uvedené na obr. 34a–e (případ $M' = N$, $N' = M$ je triviální). Tím je důkaz hotov.

*Poznámka.* Poslední tvrzení zřejmě platí, i když $MN$ je libovolná tětiva kružnice $k$ (obr. 34): Předpokládejme, že body $M, N, M', N'$ leží na kružnici, bod $B$ leží na přímce $MN'$ a bod $C$ na přímce $M'N$, $M' \neq C \neq B \neq N'$. Potom body $M', N', B, C$ leží na kružnici, právě když $MN \| BC$.

**2. řešení.** Označme $M$ střed strany $AB$, $N$ střed strany $CD$. Podle předpokladu je $|MM'| = \dfrac{|AB|}{2}$, obsah $S(ABCD)$ čtyřúhelníku $ABCD$ můžeme tedy vyjádřit jako (obr. 35)




Obr. 35




Obr. 36

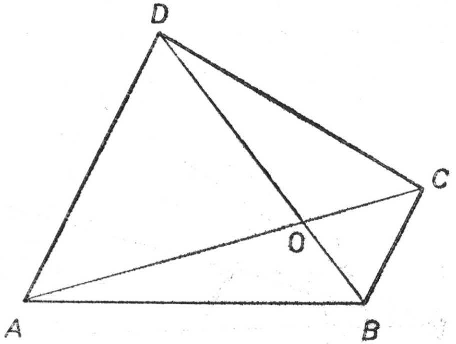
$$S(ABCD) = S(AMD) + S(MBC) + S(CDM) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, S(ABD) + \tfrac{1}{2}\, S(ABC) + \tfrac{1}{4}\, |CD|\,.\,|AB|.$$

Zároveň však je (obr. 36)

$$S(ABCD) = \tfrac{1}{2}\, S(CDA) + \tfrac{1}{2}\, S(CDB) + \tfrac{1}{2}\, |AB|\,.\,|NN'|.$$

Odtud plyne odečtením (obr. 37)




Obr. 37

$$|AB|(\tfrac{1}{2}\, |CD| - |NN'|) = S(CDA) + S(CDB) - S(ABD) -$$

$$- S(ABC) = S(ABCD) + S(CDO) - S(ABO) -$$

$$- S(ABCD) - S(ABO) + S(CDO) =$$

$$= 2(S(CDO) - S(ABO)) = 2(S(ADC) - S(ADB)).$$

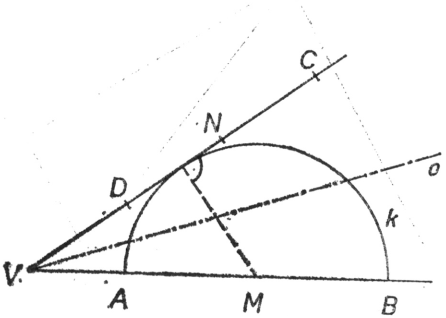
Kružnice nad průměrem $CD$ se dotýká přímky $AB$, právě když $|NN'| = \frac{1}{2}\, |CD|$, což je podle poslední rovnosti, právě když

$$S(ADC) = S(ADB).$$

To je však ekvivalentní s rovnoběžností přímek $AD$ a $BC$.

**3. řešení.** Pokud $AB \| CD$, dotýká se zřejmě kružnice nad průměrem $CD$ strany $AB$, právě když $|CD| = |AB|$, tj. právě když $ABCD$ je rovnoběžník.

Jsou-li přímky $AB$, $CD$ různoběžné, označme $V$ jejich průsečík, $o$ osu úhlu $BVC$, $M$ a $N$ středy stran $AB$ a $CD$ (obr. 38). Uvažujme zobrazení $Z$, které dostaneme složením




Obr. 38

osové souměrnosti podle osy $o$ a stejnolehlosti se středem $V$ a koeficientem $\frac{|VN|}{|VM|}$. V tomto zobrazení bude $Z(M) = N$. Protože kružnice $k$ sestrojená nad průměrem $AB$ má střed v bodě $M$ a dotýká se přímky $CD$, bude se kružnice nad průměrem $CD$ se středem $Z(M)$ dotýkat přímky $AB$, právě když bude obrazem kružnice $k$ v zobrazení $Z$, tj. právě když bude $Z(A) = D$ a $Z(B) = C$. Zřejmě však je $AZ(A) \| BZ(B)$.

**Řešení 5. úlohy.** Uvažujme konvexní $n$-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$. S indexy budeme počítat modulo $n$.

Je-li $A_iA_j$ úhlopříčka, je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$|A_iA_j| + |A_{i+1}A_{j+1}| > |A_iA_{i+1}| + |A_jA_{j+1}|.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro všech $\dfrac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček $A_iA_j$, dostaneme vlevo každou úhlopříčku dvakrát a vpravo každou stranu $(n-3)$-krát, tedy

$$2d > (n-3)p.$$

Pro délku úhlopříčky $A_iA_j$ dále platí

$$\begin{aligned} |A_iA_j| &< |A_iA_{i+1}| + \dots + |A_{j-1}A_j|, \\ |A_iA_j| &< |A_jA_{j+1}| + \dots + |A_{i-1}A_i|. \end{aligned} \tag{1}$$

Je-li $n = 2k + 1$, vezměme pro každou úhlopříčku $A_iA_j$ tu z nerovností (1), která má na pravé straně menší počet sčítanců, a těchto $\dfrac{n(n-3)}{2}$ nerovností sečtěme. Dostaneme nerovnost, na jejíž levé straně je $d$ a na pravé straně je součet délek stran, v němž se každá strana vyskytuje tolikrát, pro kolik úhlopříček leží v »menší« ze dvou částí, na které je obvod úhlopříčkou rozdělen. Např. pro stranu $A_1A_n$ vychází z vrcholu $A_k$ jediná taková úhlopříčka, z vrcholu

$A_{k-1}$ dvě, . . ., z vrcholu $A_2$ jich vychází $k - 1$ a z vrcholu $A_1$ také $k - 1$. Na pravé straně je tedy každá strana započtena tolikrát, kolik je

$$1 + 2 + \ldots + (k - 1) + (k - 1),$$

takže

$$d < \frac{(k-1)(k+2)}{2}\,p = \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right).$$

Je-li $n = 2k$, vezměme pro každý »průměr« $A_iA_{i+k}$ nerovnost

$$|A_iA_{i+k}| < \frac{p}{2}$$

a pro ostatní úhlopříčky opět tu z nerovností (1), která má na pravé straně menší počet sčítanců. Sečteme-li těchto $\dfrac{n(n-3)}{2}$ nerovností, dostaneme

$$d < k\frac{p}{2} + \frac{(k-2)(k+1)}{2}\,p = \frac{k^2-2}{2}\,p =$$

$$= \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right).$$

*Poznámka.* Nerovnosti, které jsme dokázali, nelze zlepšit. Pro mnohoúhelník, jehož dvě sousední strany mají délku 1 a ostatní strany jsou velmi malé, bude

$$p \doteq 2,\ d \doteq n - 3 \text{ a } \frac{2d}{p} \doteq n - 3.$$

Pro mnohoúhelník, jehož »protilehlé« strany $A_kA_{k+1}$, $A_nA_1$, kde $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, mají délku 1 a ostatní strany jsou velmi malé, bude

$$p \doteq 2,\ d \doteq k(n - k) - 2$$

a

$$\frac{2d}{p} \doteq k(n - k) - 2 = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2.$$

**2. řešení.** Zvolme přímku $q$ a pravoúhlé průměty vrcholů $A_1$ $A_2, \ldots, A_n$ uvažovaného mnohoúhelníku na přímku $q$ označme $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.

Uvažujme nejprve body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ležící v přímce v tomto pořadí a odhadněme součet délek $s$ všech úseček $B_iB_j$ pomocí délky úsečky $B_1B_n$ a čísla $n$. Zřejmě

$$s \geqq (|B_1B_2| + |B_2B_n|) + (|B_1B_3| + |B_3B_n|) + \ldots + \\ + (|B_1B_{n-1}| + |B_{n-1}B_n|) + |B_1B_n| = (n - 1)\,|B_1B_n|.$$

Dále si všimněme, že každá úsečka $B_iB_j$ se skládá z úseček $B_kB_{k+1}$, přičemž každá úsečka $B_kB_{k+1}$ je částí právě $k(n - k)$ úseček $B_iB_j$. Je tedy

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n - k)\,|B_kB_{k+1}|.$$

Přitom

$$4k(n-k) = n^2 - (n-2k)^2$$

a součin $k(n-k)$ nabývá tudíž největší hodnoty pro $k = \left[\frac{n}{2}\right]$,

takže

$$s \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] |B_k B_{k+1}| = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] |B_1 B_n|.$$

Odvodili jsme nerovnosti

$$(n-1)\,|B_1 B_n| \leqq s \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] |B_1 B_n|. \qquad (2)$$

Jsou-li mezi body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ aspoň čtyři různé, jsou přitom na obou stranách ostré nerovnosti.

Průměty $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ nemusejí sice ležet na přímce $q$ v tomto pořadí, vzhledem ke konvexitě mnohoúhelníku $A_1 A_2 \ldots A_n$ je však součet

$$|A'_1 A'_2| + |A'_2 A'_3| + \ldots + |A'_{n-1} A'_n| + |A'_n A'_1|$$

roven dvojnásobku nejdelší z úseček $A'_i A'_j$. Je tedy podle (2)

$$(n-1)\,(|A'_1 A'_2| + |A'_2 A'_3| + \ldots + |A'_n A'_1|) \leqq$$

$$\leqq 2 \sum_{i<j} |A'_i A'_j| \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] (|A'_1 A'_2| + |A'_2 A'_3| +$$

$$+ \ldots + |A'_n A'_1|),$$

přičemž $|A'_iA'_j| = |A_iA_j| \cos \alpha_{ij}$, označíme-li $\alpha_{ij}$ úhel sevřený přímkami $A_iA_j$, $q$ $\left(0 \leqq \alpha_{ij} \leqq \frac{\pi}{2}\right)$.

Otáčejme nyní zvolenou přímku $q$ kolem nějakého bodu $O$. Pro $0 \leqq x < \pi$ tak dostaneme přímku $q(x)$, která bude s přímkou $A_iA_j$ svírat úhel $\alpha_{ij}(x)$ $\left(0 \leqq \alpha_{ij}(x) \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, bude tedy pro každé $x \in \langle 0, \pi)$ platit

$$(n-1)(|A_1A_2| \cos \alpha_{12}(x) + |A_2A_3| \cos \alpha_{23}(x) + \ldots + |A_nA_1| \cos \alpha_{n1}(x)) \leqq 2 \sum_{i<j} |A_iA_j| \cos \alpha_{ij}(x) \leqq$$

$$\leqq \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right](|A_1A_2| \cos \alpha_{12}(x) + |A_2A_3| \cos \alpha_{23}(x) + \ldots + |A_nA_1| \cos \alpha_{n1}(x)).$$

Přitom je pro $1 \leqq i < j \leqq n$

$$\int_0^\pi \cos \alpha_{ij}(x) \, dx = \int_0^\pi |\cos x| \, dx = 2.$$

Zintegrujeme-li tedy poslední nerovnost na intervalu $\langle 0, \pi)$, dostaneme

$$2(n-1)(|A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots + |A_nA_1|) \leqq 4 \sum_{i<j} |A_iA_j| \leqq$$

$$\leqq 2\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right](|A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots + |A_nA_1|),$$

neboli

$$(n-1)p \leqq 2(d+p) \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]p.$$

Protože $n > 3$ a jen pro konečně mnoho $x \in \langle 0, \pi)$ se stane, že některé průměty splynou, budou na obou stranách dokonce ostré nerovnosti, tj.

$$(n-1)p < 2(d+p) < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]p,$$

čili

$$(n-3)p < 2d < \left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right)p.$$

**Řešení 6. úlohy.** Nejprve dokážeme, že $k > m$, což plyne z nerovnosti

$$a((a+d)-(b+c)) = a(a-c)+a(d-b) =$$
$$= a(a-c)+bc-ab = (a-b)(a-c) > 0.$$

Z rovnosti

$$a(2^k - a) = b(2^m - b)$$

dostaneme

$$2^m \mid b^2 - a^2 = (b+a)(b-a). \qquad (1)$$

Čísla $b + a$, $b - a$ nejsou obě dělitelná čtyřmi, protože jejich součet $2b$ není dělitelný čtyřmi. Jedno z čísel $b + a$, $b - a$ je tedy podle (1) dělitelné číslem $2^{m-1}$ - označme je $x$. Je však

$$0 < x \leqq b + a < b + c = 2^m,$$

a tedy

$$x = 2^{m-1}. \tag{2}$$

Číslo

$$b + c - x = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1} \tag{3}$$

je jedno z čísel $c + a$, $c - a$. Protože $a$, $b$, $c$ jsou lichá čísla, plyne z (2), že $a$, $b$ jsou nesoudělná čísla, a z (3), že $a$, $c$ jsou nesoudělná čísla. Z podmínky $ad = bc$ vidíme, že $a|bc$. Musí tedy být $a = 1$.

Navíc $x$, tj. jedno z čísel $b + 1$, $b - 1$ je rovno $2^{m-1}$ a jedno z čísel $c + 1$, $c - 1$ je rovno $2^{m-1}$. Protože $b < c$, je $b = 2^{m-1} - 1$, $c = 2^{m-1} + 1$ a odtud $d = 2^{2(m-1)} - 1$, kde $m > 2$ je přirozené číslo.

**2. řešení.** Nejprve ukážeme, že $k > m$:

$$2^{2k} = (d + a)^2 = (d - a)^2 + 4ad > (c - b)^2 + 4bc =$$
$$= (b + c)^2 = 2^{2m}.$$

Uvažujme přirozená čísla $x$, $y$, pro která je

$$\begin{aligned} a = 2^{k-1} - x,\ b = 2^{m-1} - y,\ c = 2^{m-1} + y,\\ d = 2^{k-1} + x. \end{aligned} \tag{4}$$

Platí

$$2^{2k-2} - x^2 = ad = bc = 2^{2m-2} - y^2, \tag{5}$$

takže

$$x^2 - y^2 = 2^{2k-2} - 2^{2m-2},$$

neboli

$$(x - y)(x + y) = 2^{2m-2}(2^{2(k-m)} - 1). \tag{6}$$

Čísla $x, y$ jsou lichá, čísla $x + y$, $x - y$ sudá a přitom nemohou být obě zároveň dělitelná čtyřmi, protože

$$x + y + x - y = 2x. \tag{7}$$

Je tedy $\{x + y, x - y\} = \{2r, 2^{2m-3}s\}$ pro nějaká lichá čísla $r$ a $s$. Odtud plyne podle (7) a (6)

$$x = 2^{2m-4}s + r, rs = 2^{2(k-m)} - 1,$$

takže podle (4)

$$a = 2^{k-1} - x = 2^{k-1} - 2^{2(m-2)}s - r$$

a dále

$$1 \leqq sa = 2^{k-1}s - 2^{2(m-2)}s^2 - 2^{2(k-m)} + 1 =$$

$$= 1 - (2^{m-2}s - 2^{k-m})^2 \leqq 1,$$

tedy

$$a = s = 1.$$

Navíc je $m - 2 = k - m$, tj. $k = 2m - 2$ a ze (4) dostaneme

$$x = 2^{2m-3} - 1,\ d = a + 2x = 2^{2m-2} - 1 = bc = 2^{2m-2} - y^2,$$

takže

$$b = 2^{m-1} - 1,\ c = 2^{m-1} + 1.$$

Podmínkám úlohy tedy vyhovují právě všechny čtveřice

$$a = 1,\ b = 2^{m-1} - 1,\ c = 2^{m-1} + 1,\ d = 2^{2m-2} - 1,$$

kde $m > 2$ je přirozené číslo.