34. ročník matematické olympiády

Kategória Z8

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Milan Koman (editor); Karol Križalkovič (editor): 34. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1984/85. 26. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987. pp. 62–82.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404797

Kategória Z8

ÚLOHY I. KOLA

Z8 - I - 1

Najděte všechna čtyřciferná přirozená čísla dělitelná číslem 99, která mají tuto vlastnost: vyměníme-li mezi sebou první dvě cifry, dostaneme čtyřciferné číslo dělitelné číslem 91.

Řešení. Hledaná čtyřciferná čísla mají být dělitelná číslem 99, to znamená, že musí být dělitelná devíti a současně jedenácti. Uvážíme-li dělitelnost číslem 9 (přirozené číslo vyjádřené v desítkové soustavě je dělitelné devíti právě tehdy, když je devíti dělitelný ciferný součet tohoto čísla), a dále tu skutečnost, že záměnou první a druhé číslice hledaných čísel se jejich ciferný součet nezmění, je zřejmé, že přirozená čísla vzniklá z hledaných čísel záměnou první a druhé číslice budou dělitelná číslem 9 a podle podmínky úlohy číslem 91, tj. budou dělitelná čísly 9, 7 a 13, neboť $91 = 7 \cdot 13$. Vezmeme tedy všechny čtyřciferné násobky přirozeného čísla $7 \cdot 9 \cdot 13 = 819$. Jsou to čísla 1 638, 2 457, 3 276, 4 095, 4 914, 5 733, 6 552, 7 371, 8 190, 9 009 a 9 828. Dále již snadno zjistíme (například použitím kritéria dělitelnosti číslem 11), že všem podmínkám úlohy vyhovují právě čísla 6 138, 4 257 a 2 376.

Z8 - I - 2

Je dán obdélník $ABCD$ s obsahem 42 cm^2, jehož rozměry jsou vyjádřené přirozenými čísly. Nechť M je takový vnitřní bod obdélníku $ABCD$, že přímky jím procházející rovnoběžně se stranami obdélníku rozdělí daný obdélník na čtyři pravoúhelníky, jejichž rozměry jsou také vyjádřeny přirozenými čísly. Zjistěte všechny možnosti pro polohu bodu M v případě, že mezi vzniklými pravoúhelníky je alespoň jeden čtverec a určete velikosti stran všech takových čtverců.

Řešení. Nejdříve je třeba určit rozměry všech obdélníků s obsahem 42 cm^2. Podle zadání mají být tyto rozměry vyjádřeny přirozenými čísly. Jsou to tyto možnosti:

a) a = 1 cm, b = 42 cm   *c*) a = 3 cm, b = 14 cm
b) a = 2 cm, b = 21 cm   *d*) a = 6 cm, b = 7 cm

Případ a) z našich úvah vypustíme, neboť je zřejmé, že uvnitř obdélníku s těmito rozměry nelze zvolit bod M podle zadání úlohy.

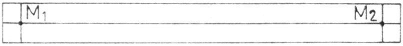
Případy b) *až d*). Má-li být mezi pravoúhelníky, které vzniknou způsobem popsaným v zadání úlohy alespoň jeden čtverec, jsou tím pro polohu bodu M dány tyto podmínky:

1. Bod M je stejně vzdálen alespoň od dvou sousedních stran obdélníku.

2. Tyto vzdálenosti jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Strany uvažovaných čtverců jsou rovny těmto vzdálenostem.

Protože bod M má být vnitřním bodem obdélníku, musí být strana každého čtverce menší než kratší rozměr obdélníku a současně musí být její velikost vyjádřena přirozeným číslem. Co se týče počtu možností polohy bodu M, je třeba vzít v úvahu, že obdélník má čtyři dvojice sousedních stran.

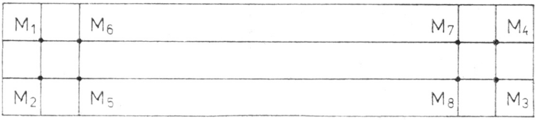
Případ b). Pro délku strany čtverce je jediná možnost rovná 1 cm. Pro polohu bodu M jsou pak dvě možnosti. V obou případech jsou mezi vzniklými pravoúhelníky právě dva čtverce o straně délky 1 cm. V obr. 14 jsou možné polohy bodu M označeny M_1, M_2.



Obr. 14

Případ c). Pro délku strany čtverce jsou dvě možnosti: 1 cm a 2 cm. Pro to, aby způsobem uvedeným v zadání úlohy vznikl čtverec o straně délky 1 cm, jsou čtyři možnosti (v obrázku 15 označené M_1 – M_4). Má-li být strana vzniklého čtverce 2 cm dlouhá, jsou pro polohu bodu M čtyři možnosti (v obr. 15 označené M_5 – M_8). Celkem je tedy 8 možností polohy bodu M.

Případ d). Pro délku strany čtverce jsou tyto možnosti: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm.



Obr. 15

Pro délky stran čtverců 1 cm, 2 cm, 4 cm a 5 cm jsou vždy čtyři možné polohy bodu M (vzhledem k tomu, že obdélník $ABCD$ má čtyři dvojice sousedních stran). Při každé poloze bodu M je mezi vzniklými pravoúhelníky právě jeden čtverec. Jedná se tedy o 16 možných poloh bodu M.

V případě, že délka strany uvažovaného čtverce je 3 cm, jsou pro polohu bodu M dvě možnosti. Přitom v obou případech vznikají právě dva čtverce o straně délky 3 cm. Možnosti polohy bodu M v případě, že vznikne čtverec o straně délky

a) 1 cm jsou v obr. 16 označeny M_1 — M_4,

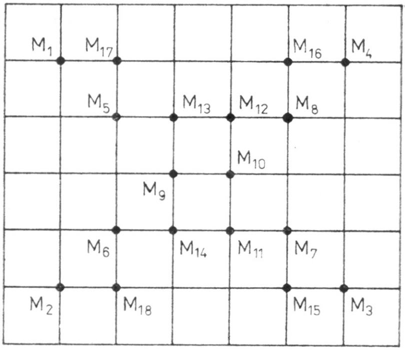
b) 2 cm jsou v obr. 16 označeny M_5 — M_8,

c) 3 cm jsou v obr. 16 označeny M_9 — M_{10},

d) 4 cm jsou v obr. 16 označeny M_{11} — M_{14},

e) 5 cm jsou v obr. 16 označeny M_{15} — M_{18}.

V obdélníku o rozměrech $a = 6$ cm, $b = 7$ cm je tedy 18 možností pro polohu bodu M a 5 možností pro délku strany uvažovaného čtverce.

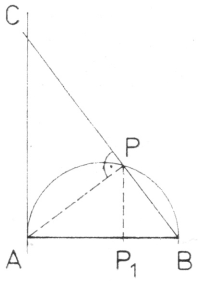


Obr. 16

Z8 - I - 3

Je dána úsečka AB. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou BC, ve kterém pro patu P výšky z vrcholu A na stranu BC platí $d(BP) : d(CP) = 3 : 5$. Kolik řešení má úloha?

Řešení. *Rozbor* (obr. 17). Bod P leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem AB. $\triangle ABP \sim \triangle CBA$ podle

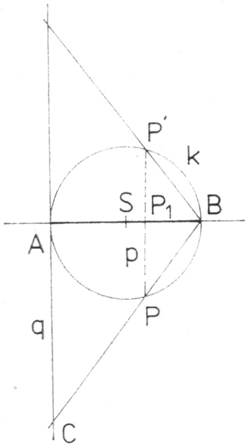


Obr. 17

věty *uu*: $\sphericalangle APB \cong \sphericalangle CAB = R$, $\sphericalangle ABP$ společný. Sestrojíme-li v trojúhelníku ABP výšku z vrcholu P na stranu AB a označíme-li její patu P_1, platí $d(BP_1) : d(AP_1) = 3 : 5$. Platnost tohoto tvrzení plyne z vlastnosti podobného zobrazení. Označíme-li k poměr podobnosti, ve které je obrazem trojúhelníku ABC trojúhelník PBA, platí $d(AP_1) = k . d(CP)$, $d(BP_1) = k \, . \, d(BP)$ a dále $d(BP_1) : d(AP_1) =$
$= k \, . \, d(BP) : k \, . \, d(CP) = d(BP) : d(CP) = 3 : 5.$
Bod P_1 tedy lze sestrojit. Bod P je pak průsečíkem Thaletovy kružnice s kolmicí k přímce AB vedené bodem P_1.

Zbývající vrchol C trojúhelníku ABC je pak průsečíkem přímky PB s kolmicí k přímce AB vedené bodem A.

Konstrukce (obr. 18)



Obr. 18

1. S; S střed AB
2. k; $k\left(S, r = \frac{1}{2}\, d(AB)\right)$
3. P_1; $P_1 \in AB$ a $d(BP_1) : d(AP_1) = 3 : 5$
4. p; $P_1 \in p$ a $p \perp AB$
5. P; $P \in p \cap k$
6. $\leftrightarrow BP$
7. q; $A \in q$ a $q \perp AB$
8. C; $C \in q \cap \leftrightarrow BP$

Zkouška. Trojúhelník ABC je pravoúhlý, $\sphericalangle BAC = R$. $\triangle ABP \sim \triangle CPB$ dle *uu*. $d(BP_1) : d(AP_1) = 3 : 5$. Z vlastnosti podobnosti pak plyne

$$d(BP) : d(CP) = d(BP_1) : d(AP_1) = 3 : 5.$$

Diskuse. Počet řešení úlohy je dán počtem průsečíků přímky p a kružnice k. Tyto průsečíky jsou vždy dva. Dostáváme tak dva trojúhelníky vyhovující zadání, které jsou souměrně sdružené podle přímky AB.

Z8 - I - 4

Určete všechny dvojice prvočísel p, q, pro které platí

$$11\,p + 13\,q = 1985.$$

Řešení. Víme, že

$$11\,p + 13\,q = 1985 \tag{1}$$

Mohli bychom za p postupně dosazovat malá prvočísla taková, že $11\,p$ je menší než 1985, vypočítat vždy příslušné q a zjistit, zda je to prvočíslo. Výpočet si však můžeme usnadnit touto úvahou: Prvočísla p, q nemohou být obě lichá, neboť pak by levá strana rovnice (1) byla sudé číslo, zatímco 1985 je číslo liché. Je tedy buď $p = 2$, nebo $q = 2$.

Pro $p = 2$ dostáváme: $11\,.\,2 + 13\,q = 1985$

$$13\,q = 1963$$

$$q = 151$$

Číslo 151 je prvočíslo, takže dvojice [2, 151] vyhovuje úloze.

Pro $q = 2$ plyne z rovnice (1): $11\,p + 13\,.\,2 = 1985$

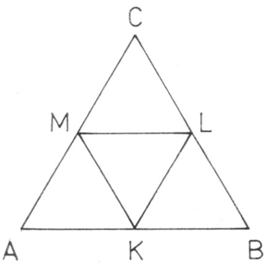
$$11p = 1959$$

Číslo 1959 není dělitelné jedenácti, takže žádná dvojice tvaru [p , 2] neexistuje.

Vyhovuje jediná dvojice [2, 151].

Z8 - I - 5

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, který je rozdělen úsečkami KL, KM, LM, kde body K, L, M jsou v uvedeném pořadí středy stran AB, BC a AC, na čtyři menší rovnostranné trojúhelníky, viz obr. 19. Kolika způsoby je možno strany



Obr. 19

těchto menších trojúhelníků očíslovat čísly 1, 2, . . ., 9 tak, aby součet tří čísel na stranách každého z menších trojúhelníků byl stejný a jeden byl očíslován čísly 4, 5, 6 (v libovolném pořadí).

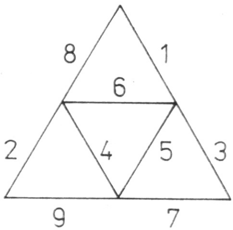
Poznámka. Dvě číslování jsou různá, jestliže aspoň jedna z devíti úseček AK, BK, . . . je v každém z nich očíslovaná jiným číslem.

Řešení. Číslo 15 můžeme napsat jako součet tří navzájem různých čísel množiny $\{1, 2, \ldots, 9\}$ pouze jedním z následujících 8 způsobů:

$$
\begin{aligned}
15 &= 1 + 5 + 9 = 2 + 6 + 7 \\
&= 1 + 6 + 8 = 3 + 4 + 8 \\
&= 2 + 4 + 9 = 3 + 5 + 7 \qquad \text{(I)} \\
&= 2 + 5 + 8 = 4 + 5 + 6
\end{aligned}
$$

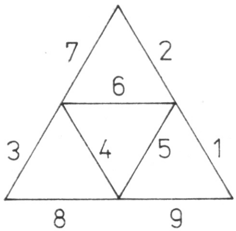
Protože v každém ze zápisů je zastoupeno jedno z čísel 4, 5, 6, musí být čísly 4, 5, 6 očíslován nutně trojúhelník *KLM*; kdyby to byl jeden z »rohových« trojúhelníků, nebylo by už zbývající dva »rohové« trojúhelníky čím očíslovat.

Předpokládejme nejprve, že úsečce *KM* je přiřazeno číslo 4, úsečce *KL* číslo 5 a úsečce *LM* číslo 6. Z tabulky I je vidět, že úsečky *AK* a *AM* potom musí být očíslované čísly 2 a 9 nebo čísly 3 a 8. Rozebereme první případ. Tabulka I říká, že pak úsečky *BK*, *BL* musí být očíslované čísly 3 a 7 a *CL*, *CM* čísly 1 a 8. Protože uvedenými čísly může být očíslovaná libovolná ze dvou úseček, dostáváme celkem 8 možností; jedna z nich je nakreslena na obr. 20. Podobně v případě,



Obr. 20

že úsečky AK a AM jsou očíslované čísly 3 a 8, dostáváme z tabulky I 8 dalších možností; jedna z nich je nakreslena na obr. 21. Jsou-li úsečkám KM, KL a LM po řadě přiřazená čísla 4, 5 a 6, pak již další možnosti, než ty, které jsme



Obr. 21

uvedli, nejsou. Úsečkám KM, KL a LM můžeme však přiřadit čísla 4, 5, 6 celkem šesti možnými způsoby; každý z nich dává 16 očíslování všech devíti úseček. Počet možných očíslování je tedy $16 \cdot 6 = 96$.

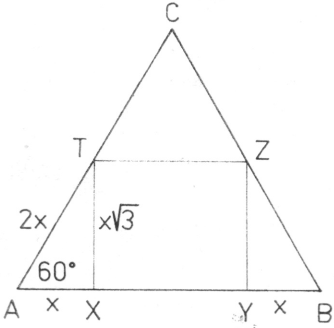
Existuje 96 možných očíslování úseček.

Z8 - I - 6

Do rovnostranného trojúhelníku ABC se stranou délky 8 cm je vepsán pravoúhelník $XYZT$ tak, že body X, Y leží na úsečce AB, bod Z na úsečce BC a bod T na úsečce AC.

a) Vypočítejte obsah pravoúhelníku v závislosti na velikosti úsečky AX a zjistěte, pro kterou její hodnotu $|AX_0|$ je největší.

b) Najděte vzdálenost $|AX|$, pro kterou se obsah pravoúhelníku $XYZT$ rovná $\frac{3}{8}$ obsahu trojúhelníku ABC.



Obr. 22

Řešení. a) Obsah pravoúhelníku $XYZT$ (obr. 22) je roven $(8 - 2x)\, x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,(4x - x^2) = 2\sqrt{3}\,(4 - 4 + 4x - x^2) = 2\sqrt{3}\,(4 - (x - 2)^2)$, a tedy největší je pro $x = 2$ cm.

b) $2\sqrt{3}\,(4 - (x - 2)^2) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\, 8 \,.\, 4\sqrt{3}\right)$,

$$4 - (x - 2)^2 = 3,$$
$$(x - 2)^2 = 1;$$

jestliže $x > 2$, dostáváme $x - 2 = 1$, $x = 3$,
jestliže $x < 2$, potom $2 - x = 1$, $x = 1$.
Tedy $|AX| = 3$ cm nebo 1 cm.

Z8 - II - 1

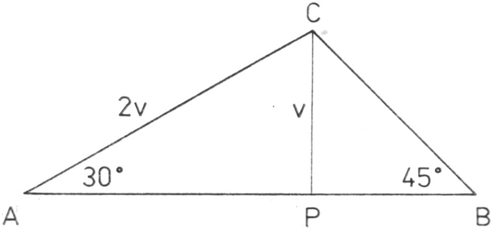
Napíšeme-li trojciferné číslo vedle sebe dvakrát, dostaneme šesticiferné číslo, které je dělitelné sedmi. Zdůvodněte.

Řešení. Napíšeme-li za nějaké číslo tři nuly, dostaneme číslo, které je 1000násobkem zvoleného čísla. Napíšeme-li trojciferné číslo vedle sebe dvakrát, dostaneme číslo, které je 1001násobkem zvoleného trojciferného čísla. Je to totiž totéž číslo, které dostaneme tak, že zvolené trojciferné číslo vynásobíme číslem 1000 a přičteme ještě zvolené číslo. Jelikož číslo 1001 je násobkem čísla sedm, je i obdržené šestimístné číslo násobkem sedmi, tedy dělitelné sedmi.

Z8 - II - 2

V trojúhelníku ABC je $|AB| = 12$ cm, úhel při vrcholu A má velikost 30°, úhel při vrcholu B je 45°. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC.

Řešení. Označme P patu výšky z bodu C na stranu AB (obr. 23). Je $v = |CP| = |PB|$, jelikož při vrcholu B je



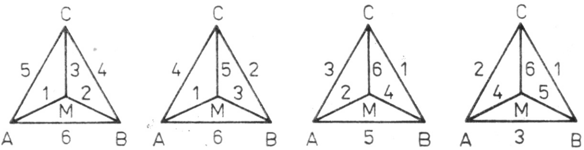
Obr. 23

úhel 45°. V pravoúhlém trojúhelníku APC je $|AC| = 2v$, tedy podle Pythagorovy věty je $|AP| = v\sqrt{3}$. Bod P je bodem úsečky AB, proto je $12 = v\sqrt{3} + v$, odkud vypočteme $v = 6(\sqrt{3} - 1)$, obsah trojúhelníku je $36(\sqrt{3} - 1) \doteq 26{,}354$.

Z8 - II - 3

Uvnitř trojúhelníku ABC je zvolen bod M. Úsečky AB, BC, CA, AM, BM, CM jsou očíslovány čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že součet tří čísel, kterými jsou očíslovány strany trojúhelníků ABM, BCM, CAM se rovná pro všechny tři trojúhelníky témuž číslu s. Určete všechny hodnoty, kterých může nabýt číslo s, ke každé udané hodnotě uveďte příklad očíslování.

Řešení. Číslo s může nabýt hodnot 9, 10, 11, 12, příklady očíslování jsou na obr. 24. Od žáků se nepožadovalo zdůvod-



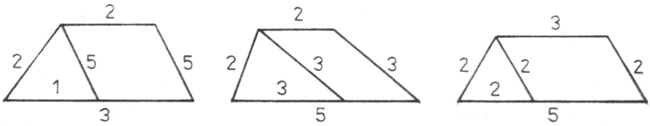
Obr. 24

nění, že jiných hodnot s nenabývá. Není to však těžké. Označíme-li a, b, c čísla přiřazená úsečkám AM, BM, CM, je $3s = 1 + 2 + \ldots + 6 + a + b + c = 21 + a + b + c$. Součet $a + b + c$ je aspoň $1 + 2 + 3$ a nejvýše $4 + 5 + 6$, proto je s aspoň 9 a nejvýše 12.

Z8 - II - 4

Může mít lichoběžník strany velikostí 2, 2, 3, 5? Které z těchto hodnot jsou pak délkami jeho základen? Uveďte všechna řešení.

Řešení. Základny lichoběžníku nemohou mít stejné délky, jsou tedy myslitelné tyto tři případy: Základny mají délky 3 a 2, ramena 5 a 2, nebo jsou základny 2 a 5 a ramena 2 a 3, nebo by musel být lichoběžník rovnoramenný s rameny délky 2 a základnami délek 5 a 3. První případ nemůže nastat, protože neexistuje trojúhelník o stranách 1, 2, 5, zbývající dva případy jsou možné, viz obr. 25.



Obr. 25

ÚLOHY III. KOLA V ČSR

Z8 - III - 1

Na číselné ose leží pět navzájem různých bodů. Označte je A, B, C, D, E tak, aby zároveň platilo:

a) bod A leží mezi body B a E,

b) bod C leží mezi body A a B,

c) bod D neleží mezi body B a E.

Najděte všechna řešení.

Řešení. Jelikož bod A leží mezi body B a E, je pořadí těchto tří bodů na číselné ose BAE nebo EAB. Protože bod C leží mezi body A, B, musí být pořadí bodů A, B, C, E buď $BCAE$ nebo $EACB$. Bod D neleží mezi body B, E, proto musí být buď na začátku celé pětice, nebo na konci.

Úloha má tudíž právě čtyři řešení: $DBCAE$, $BCAED$, $DEACB$, $EACBD$.

Z8 - III - 2

Jirka si chce nastříhat stejné obdélníkové kartičky s rozměry v celých centimetrech. Počet kartiček chce mít větší než 20, ale menší než 40, obsah jedné kartičky větší než 10 cm^2, ale menší než 20 cm^2. Ze všech kartiček chce složit obdélník tak, aby počet kartiček v řadě byl stejný jako počet řad. Obsah složeného obdélníku chce mít větší než 550 cm^2, ale menší než 580 cm^2. Určete všechny možné rozměry kartiček, které si může Jirka nastříhat.

Řešení. Jelikož Jirka chce kartičky složit do obdélníku tak, aby v každé řadě byl stejný počet kartiček jako je počet řad, je počet kartiček druhou mocninou přirozeného čísla. Má jich být aspoň 21 a méně než 40, přicházejí tedy v úvahu pouze čísla 25 a 36. Kdyby jich bylo 25, byl by celkový obsah všech kartiček menší než $25 \cdot 20$ cm^2 $=$ 500 cm^2, což by neodpovídalo dalšímu požadavku úlohy. Počet kartiček musí být 36. Aby byl obsah všech kartiček větší než 550 cm^2, musí být obsah jedné kartičky větší než $550 : 36$ cm^2, tedy větší než 15 cm^2. Podobně dostaneme, že obsah kartičky musí být menší než 17 cm^2. Proto je obsah jedné kartičky 16 cm^2, její rozměry jsou buď 1 cm a 16 cm, nebo 2 cm a 8 cm. Kartička o rozměrech 4 cm a 4 cm by byla totiž čtvercová, nebyla by obdélníková.

Z8 - III - 3

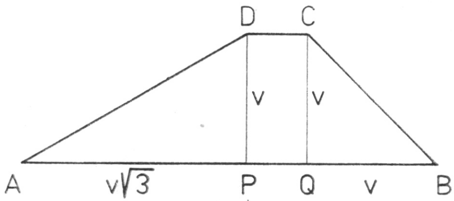
Určete všechna čtyřciferná čísla, která jsou dělitelná patnácti a jsou zapsána pouze ciframi z množiny $\{3, 4, 5\}$.

Řešení. Číslo je právě tehdy dělitelné číslem 15, je-li dělitelné číslem 5 a zároveň číslem 3. Číslo je dělitelné pěti, končí-li cifrou 0 nebo 5. Číslo je dělitelné právě tehdy třemi, je-li jeho ciferný součet dělitelný třemi. Čísla, která máme určit, musí tedy končit cifrou 5 a součet tří předcházejících cifer musí při dělení třemi dát zbytek 1. Můžeme ještě rozlišit, zda bude mezi těmito třemi ciframi jedna, dvě, tři pětky, nebo nebude na prvních třech místech žádná pětka. Při jedné pětce musí být obě dvě zbývající cifry 4, při dvou pětkách musí být zbývající cifra 3. Samé pětky nevyhovují a není-li mezi prvními třemi ciframi žádná pětka, musí to být cifry 3, 3, 4. Na pořadí prvních tří cifer nezáleží, úloze tudíž vyhovují právě čísla 5 445, 4 545, 4 455, 3 555, 5 355, 5 535, 3 345, 3 435, 4 335.

Z8 - III - 4

V lichoběžníku $ABCD$ je $AB \parallel CD$, $|AB| = 32{,}3$ cm, $|CD| = 5$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 30°$, $|\sphericalangle ABC| = 45°$. Vypočtěte jeho obsah.

Řešení. Označme P a Q paty kolmic vedených body D a C na přímku AB, obr. 26. Výšku lichoběžníku označíme v, je pak $|QB| = v$, $|AP| = v\sqrt{3}$, což je možné odvodit podobně



Obr. 26

jako v úloze Z-II-2. Dále je $|AB| = 32{,}3 = |AP| + |PQ| + |QB|$, $|PQ| = |DC|$, odkud plyne $v(1 + \sqrt{3}) = 27{,}3$, tedy $v \doteq 10$, obsah pak je 186,5 cm^2.

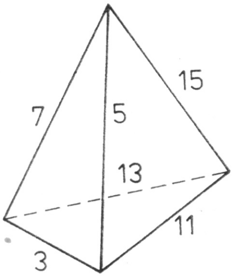
ÚLOHY III. KOLA V SSR

Z8 - III - 1

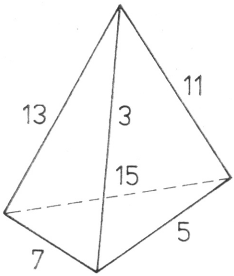
a) Očíslujte hrany štvorstena piatimi najmenšími nepárnymi prvočíslami a číslom 15 tak, aby súčet čísel prislúchajúcich hranám podstavy se rovnal súčtu čísel prislúchajúcich zvyšným hranám (nepatriacim podstave) a zároveň, aby sa rovnali súčty čísel prislúchajúcich každej dvojici mimobežných hrán. Riešenie načrtnite.

b) Nech číslo pripísané ku hrane určuje dĺžku hrany. Dá sa potom každý štvorsten vyhovujúci podmienkam z časti a) vymodelovať? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešenie. a) Hrany budeme číslovať číslami 3, 5, 7, 11, 13, 15. Pretože $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 15 = 54$ a $54 : 2 = 27$, hrany podstavy môžeme očíslovať číslami 3, 11, 13 alebo číslami 5, 7, 15. Pretože $54 : 3 = 18$, jednu dvojicu mimobežných hrán môžeme očíslovať číslami 3, 15, druhú číslami 7, 11 a tretiu číslami 5, 13. Existujú teda dve riešenia (obr. 27a, b).



Obr. 27a

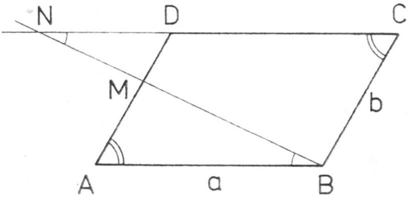


27b

b) Nedá. V 2. riešení by jedna stena musela byť trojuholník s rozmermi 3, 5, 11 a tie nevyhovujú trojuholníkovej nerovnosti.

Z8 - III - 2

Vo vnútri strany AD rovnobežníka $ABCD$ zvoľte bod M. Priamka BM pretne priamku CD v bode N. Dokážte, že súčin dĺžok $d(AM)$. $d(CN)$ nezávisí od voľby bodu M.



Obr. 28

Riešenie. V rovnobežníku $ABCD$ (obr. 28) označme

$$d(AB) = a, d(BC) = b.$$

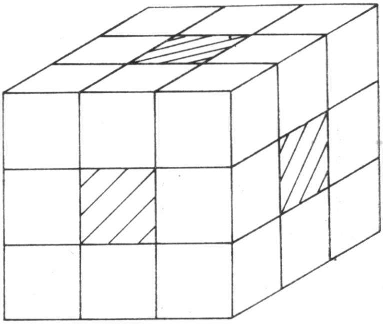
Pretože $|\sphericalangle BNC| = |\sphericalangle MBA|$ a $|\sphericalangle NCB| = |\sphericalangle BAM|$, platí, že $\triangle BCN \sim \triangle MAB$. Potom

$$\frac{d(CN)}{d(BC)} = \frac{d(AB)}{d(MA)}, \text{ t.j. } \frac{d(CN)}{b} = \frac{a}{d(MA)}.$$

Z toho dostávame, $d(CN) \,.\, d(MA) = a \,.\, b$.

Z8 - III - 3

Kocka s dĺžkou hrany 3 cm je poskladaná z 27 rovnakých malých kociek. Odstránime z nej tri »stĺpčeky« kociek tak, ako je na (obr. 29) vyznačené šrafovaním. Vznikne teleso zložené z 20 kociek. Zistite súčet dĺžok hrán a súčet plôch stien takto vzniknutého telesa.



Obr. 29

Riešenie

Súčet dĺžok hrán pôvodnej kocky ... 12 . 3 cm = 36 cm
súčet dĺžok »vnútorných« hrán ..... 12 . 3 cm = 36 cm
súčet dĺžok hrán, ktoré vzniknú na stenách 6 . 4 . 1 cm = 24 cm

---

celkový súčet .... 96 cm

súčet plôch »vonkajších« stien 6 . 9 cm^2 − 6 cm^2 = 48 cm^2
súčet plôch »vnútorných« stien ... 6 . 4 . 1 cm^2 = 24 cm^2

---

celkový súčet .... 72 cm^2

Z8 - III - 4

Dané je 3-ciferné číslo. K nemu vytvoríme 6-ciferné číslo nasledujúcim spôsobom. Za spomínané 3-ciferné číslo napíšeme ďalšie 3-ciferné číslo, ktoré dostaneme z pôvodného tak, že každú z jeho cifier zmeníme na tzv. »komplementárnu«. (Dve cifry nazveme komplementárne, ak ich súčet je rovný 9. Napr. k číslu 296 by sme vytvorili číslo 296 703.) Zistite, pre ktoré 3-ciferné čísla platí, že k nim vytvorené 6-ciferné čísla sú deliteľné 90-imi.

Riešenie 1. Nech pôvodné 3-ciferné číslo má v desiatkovej sústave zápis abc. K nemu vytvorené 6-ciferné číslo má zápis $abc(9-a)(9-b)(9-c)$.

$$abc(9-a)(9-b)(9-c) = a \,.\, 10^5 + b \,.\, 10^4 + c \,.\, 10^3 +$$

$$+ (9-a) \,.\, 10^2 + (9-b) \,.\, 10 + (9-c) =$$

$$= 99\,900a + 9\,990b + 999c + 999 =$$

$$= 90 \,.\, (1\,110a + 111b + 11c + 11) + 9c + 9$$

Z toho vidíme, že číslo 90 delí »naše« 6-ciferné číslo práve vtedy, keď $90|(9c + 9)$, t.j. práve vtedy, keď $c = 9$. Hľadané 3-ciferné čísla sú tie, ktoré majú na mieste jednotiek číslo 9.

Riešenie 2. Celé číslo je deliteľné 90-imi práve vtedy, keď je deliteľné 9-imi a 10-imi. Pretože ciferný súčet vytvoreného 6-ciferného čísla je 27 a $9|27$ je toto číslo deliteľné 90-imi práve vtedy, keď je deliteľné 10-imi, t.j. keď $9 - c = 0$. Z toho dostávame $c = 9$.