34. ročník matematické olympiády

Kategorie C

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Milan Koman (editor); Karol Križalkovič (editor): 34. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1984/85. 26. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987. pp. 83–96.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/404798`

Kategorie C

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

C - I - 1

Dokažte, že pro každý rozklad množiny $M = \{1, 2, \ldots, 15\}$ na dvě disjunktní podmnožiny A, B platí: v alespoň jedné z množin A, B lze nalézt tři navzájem různá čísla x, y, z tak, že x je největší společný dělitel čísel y, z.

Řešení. Mohli bychom se pokusit vypsat všechny možné rozklady množiny M na dvě disjunktní podmnožiny A, B a ukázat přímo, že v každém rozkladu obsahuje aspoň jedna z množin A, B trojici čísel s popsanou vlastností. Vzhledem k tomu, že je těch rozkladů přes 16 tisíc, není tento postup prakticky možný. Zkusíme proto důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje rozklad množiny M na dvě disjunktní podmnožiny A, B tak, že v žádné z množin A, B neleží tři navzájem různá čísla x, y, z, pro která je číslo x největším společným dělitelem čísel y, z. Víme, že jedna z množin A, B obsahuje číslo 1, nechť je to množina A. V ní pak neleží žádná dvojice nesoudělných čísel z množiny M, různých od 1, protože největším společným dělitelem dvou nesoudělných čísel je číslo 1. Do množiny B nepatří současně čísla 3, 9, 15, rovněž tak nepatří do množiny B současně čísla 2, 4, 14. Musí tedy do A patřit aspoň jedno z čísel 2, 4, 14 a aspoň jedno z čísel 3, 9, 15. To je však spor, neboť v množině A neleží žádná dvě nesoudělná čísla větší než 1. Místo trojice 2, 4, 14 jsme mohli vzít též trojici 2, 8, 14.

C - I - 2

Určete rozměry pravidelných čtyřbokých hranolů těchto vlastností:

(1) délky jeho hran jsou vyjádřeny celými čísly,

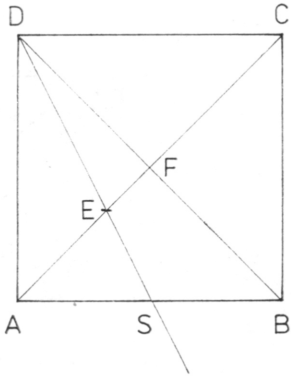
(2) velikost objemu hranolu a velikost povrchu hranolu jsou vyjádřeny týmž číslem.

Řešení. Velikost strany čtvercové podstavy hranolu označíme a, výšku hranolu označíme b. Pak se objem hranolu rovná a^2b, jeho povrch je $2a^2 + 4ab$. Máme tedy najít přirozená čísla a, b tak, aby splňovala rovnici $a^2b = 2a^2 + 4ab$, tj. $ab = 2a + 4b$. Poslední rovnici upravíme na tvar $(a - 4)(b - 2) = 8$. Uvážíme-li všechny možné rozklady čísla 8 na součin dvou přirozených čísel, dostaneme pro a, b tyto čtyři možnosti:

$$\begin{array}{lll} a - 4 = 1, & b - 2 = 8, \text{ tj. } & a = 5, b = 10, \\ a - 4 = 2, & b - 2 = 4, & a = b = 6, \\ a - 4 = 4, & b - 2 = 2, & a = 8, b = 4, \\ a - 4 = 8, & b - 2 = 1, & a = 12, b = 3. \end{array}$$

Úloha má čtyři řešení.

Na úhlopříčce AC daného čtverce $ABCD$ zvolme bod E tak, aby $|AE| = \frac{1}{3}|AC|$. Dokažte, že přímka DE protíná stranu AB v jejím středu.



Obr. 30

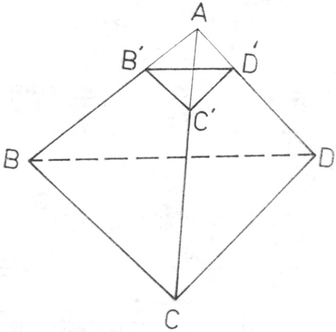
Řešení. Označme S průsečík přímek DE a AB (obr. 30). Z podobnosti trojúhelníků ASE, CDE ihned plyne $|AS| : |CD| = |AE| : |CE| = \frac{1}{2}$, takže $|AS| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|AB|$. Tím je dokázáno, že S je střed úsečky AB.

Jiný postup důkazu: Označme F střed čtverce. Bod E leží na úsečce AF a platí $|AE| = \frac{2}{3}|AF|$, $|BF| = |DF|$. Proto je bod E těžištěm trojúhelníku ABD a přímka DE jeho těžnice. Ta protíná stranu AB trojúhelníku v jejím středu.

C - I - 4

Od pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ o hraně $|AB| = 6$ cm oddělíme pravidelný čtyřstěn $AB'C'D'$ o hraně $|AB'| = 2$ cm, kde $B' \in AB$, $C' \in AC$, $D' \in AD$. Vypočtěte povrch tělesa $BCDB'C'D'$. Oč je tento povrch menší než povrch původního čtyřstěnu $ABCD$?

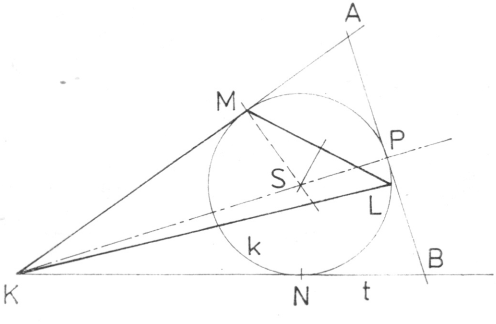
Řešení. Povrch čtyřstěnu $ABCD$ se rovná čtyřnásobku obsahu rovnostranného trojúhelníku o straně 6 cm, tj. $36\sqrt{3}$ cm^2. Povrch tělesa $BCDB'C'D'$ dostaneme z povrchu čtyřstěnu $ABCD$ tak, že odečteme obsahy trojúhelníků $AB'C'$, $AC'D'$, $AD'B'$ (obr. 31) a přičteme obsah trojúhelníku $B'C'D'$. Jsou to vesměs rovnostranné trojúhelníky o straně 2 cm, takže povrch tělesa $BCDB'C'D'$ je $34\sqrt{3}$ cm^2 a je o $2\sqrt{3}$ cm^2 menší než povrch čtyřstěnu $ABCD$.



Obr. 31

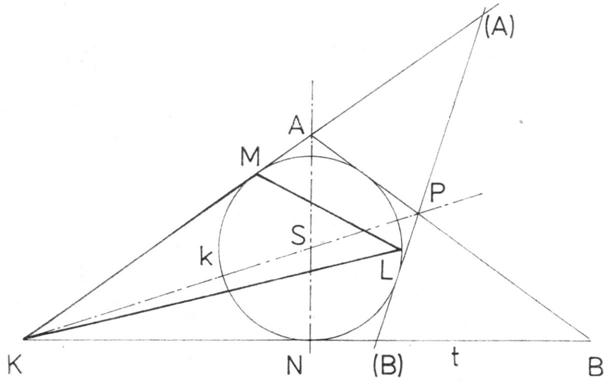
Je dán trojúhelník *KLM*. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník *KAB* tak, aby kružnice mu vepsaná procházela bodem *L* a dotýkala se přímky *KM* v bodě *M*.

Řešení. Sestrojíme nejdříve kružnici *k* vepsanou hledanému trojúhelníku *KAB*. Její střed *S* leží na ose úsečky *ML* a na kolmici k přímce *KM* vedenou bodem *M*. Tyto dvě přímky nejsou rovnoběžné, takže jsou bod *S* a kružnice *k* jednoznačně určeny. Jedna strana trojúhelníku *KAB* je přímka *KM*, další strana je druhá tečna *t* vedená bodem *K* ke kružnici *k*, její bod dotyku označíme *N* (obr. 32). Hledaný troj-



Obr. 32

úhelník *KAB* má být rovnoramenný, proto musí být jedna z přímek *KS*, *MS*, *NS* jeho osou souměrnosti. Je-li to přímka *KS*, najdeme ten její průsečík *P* s kružnicí *k*, který leží mimo úsečku *KS*. Tečna kružnice *k* v bodě *P* je třetí strana hledaného trojúhelníku, její průsečíky s přímkami *KM*, *KN* jsou jeho vrcholy *A*, *B*. Má-li být přímka *NS* osou hledaného trojúhelníku (obr. 33), je jeho vrchol A průsečíkem přímky NS a polopřímky KM, bod B je souměrně sdružený k bodu K podle středu N. Polopřímka KM však protne přímku NS



Obr. 33

jen tehdy, je-li $|\sphericalangle MKN| < 90°$. V tom případě dostaneme další řešení z řešení právě sestrojeného souměrností podle přímky KS. V něm bude osou přímka MS. Je-li však $|\sphericalangle MKN| = 60°$, všechna tři řešení splynou. Můžeme shrnout: Je-li $|\sphericalangle MKN| \geqq 90°$ nebo $|\sphericalangle MKN| = 60°$, má úloha právě jedno řešení. V ostatních případech má úloha tři řešení, z nichž dvě jsou souměrně sdružená podle přímky KS.

C - I - 6

Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou vyjádřeny celými čísly, jedno z těchto čísel je 20. Jaké mohou být délky ostatních stran trojúhelníku?

Řešení. Nechť je 20 délka přepony, pro odvěsny a, b pak platí $b^2 = 20^2 - a^2 = (20 - a)(20 + a)$. Dosadíme-li za a postupně $1, 2, 3, \ldots, 19$, dostaneme pro b^2 hodnoty 19.21, 18.22, $17.23, \ldots, 1.39$. Z těchto čísel jsou však druhou mocninou přirozeného čísla pouze čísla 8.32 a 4.36. První dostaneme pro $a = 12$, je pak $b = 16$, druhé dostaneme pro $a = 16$, $b = 12$. Je-li 20 délka jedné odvěsny, platí pro druhou odvěsnu b a přeponu c vztah $400 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$. Čísla $c - b$, $c + b$ jsou buď obě lichá, nebo obě sudá, neboť jejich rozdíl je sudý, rovná se $2b$. Kdyby byla obě lichá, nemohl by se jejich součin rovnat číslu 400, musí být tedy obě sudá. Rozklady čísla 400 na součin dvou sudých čísel jsou 2.200, 4.100, 8.50, 10.40, 20.20, k nim dostaneme postupně tyto možnosti pro dvojice (c, b): $(101, 99)$, $(52, 48)$, $(29, 21)$, $(25, 15)$, $(20, 0)$. Poslední dvojice úloze nevyhovuje, délka odvěsny nemůže být nulová. S výše obdrženou dvojicí $(12, 16)$ má úloha pět řešení.

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

C - S - 1

Najděte všechny dvojice přirozených čísel p, q, pro které platí

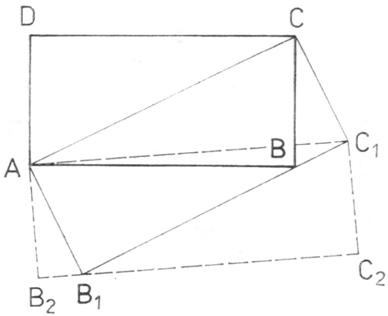
$$p^2 + 4p = q^2 + q$$

a p je prvočíslo.

Řešení. Protože $p(p + 4) = q(q + 1)$, musí být číslo p sudé, neboť číslo $q(q + 1)$ je vždy sudé. Jediné sudé prvočíslo je $p = 2$, pak je $q(q + 1) = 12$, tedy $q = 3$. Dvojice $p = 2$, $q = 3$ je jediné řešení úlohy.

C - S - 2

Je dán obdélník $ABCD$ o stranách $|AB| = a$, $|BC| = b$. Obdélník AB_1C_1C je sestrojen tak, že jeho strana B_1C_1 prochází bodem B. Obdobně sestrojíme obdélník $AB_2C_2C_1$ tak, aby jeho strana B_2C_2 procházela bodem B_1. Vypočtěte délky stran obdélníku $AB_2C_2C_1$.



Obr. 34

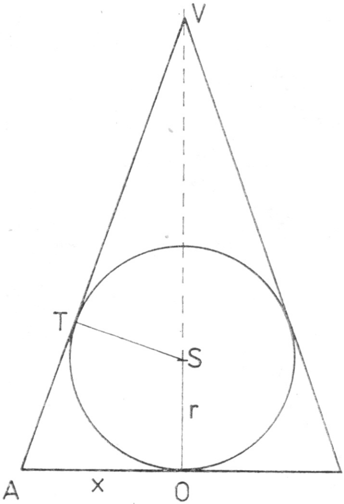
Řešení. Obdélníky $ABCD$ a AB_1C_1C mají stejné obsahy, jelikož trojúhelníky ABC a AB_1C mají stejné obsahy. Délka strany AC je $\sqrt{a^2 + b^2}$, proto je $|AB_1| = ab/\sqrt{a^2 + b^2}$. Pokračujeme-li v tomto postupu (obr. 34), dostaneme

$$|AC_1| = \sqrt{a^4 + 3a^2b^2 + b^4} / \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$|AB_2| = ab\sqrt{a^2 + b^2} / \sqrt{a^4 + 3a^2b^2 + b^4}.$$

Vypočtěte poměr objemů rotačního kužele a koule jemu vepsané, jestliže je výška kužele dvakrát větší než průměr koule.

Řešení. Označme poloměr vepsané koule r, výška kužele e pak $v = 4r$. Označme ještě x poloměr kružnice, jež je

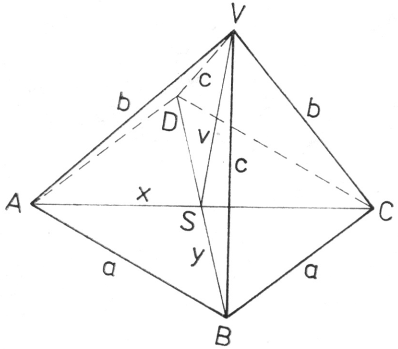


Obr. 35

podstavou kužele (obr. 35). Z pravoúhlého trojúhelníku TSV plyne $|TV| = 2r\sqrt{2}$, z pravoúhlého trojúhelníku AOV pak $(x + 2r\sqrt{2})^2 = x^2 + 16r^2$, tedy $x = r\sqrt{2}$. Proto je objem kužele $\frac{1}{3}\pi x^2 v = \frac{8}{3}\pi r^3$, hledaný poměr je 2.

Podstavou čtyřbokého jehlanu je kosočtverec o straně a, bočními stěnami jsou čtyři shodné trojúhelníky o stranách a, b, c. Vypočítejte jeho objem, je-li $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$.

Řešení. Podstavou jehlanu je kosočtverec $ABCD$, označme S jeho střed a V hlavní vrchol jehlanu. Je-li označení vrcholů kosočtverce zvoleno tak, že $|AV| = b$, je $|BV| = c$, a tedy



Obr. 36

$|CV| = b$, $|DV| = c$. Protože $|DV| = |BV|$, $|AV| = |CV|$, je pravoúhlým průmětem bodu V do roviny ABC bod S, VS je výškou jehlanu. Označme $|VS| = v$, $|AS| = x$, $|BS| = y$. Je $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + v^2 = b^2$, $y^2 + v^2 = c^2$ (obr. 36).

Objem jehlanu je $\frac{1}{3} \cdot 2xyv$. Z předchozích rovností plyne

$2x^2 = a^2 + b^2 - c^2$, $2y^2 = a^2 + c^2 - b^2$, $2v^2 = b^2 + c^2 - a^2$, takže se objem jehlanu rovná

$$\frac{1}{6}\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}\sqrt{2},$$

po dosazení daných hodnot a, b, c vyjde $4\sqrt{95}$.

ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Najděte všechny trojice kladných čísel a, b, c, pro které platí současně rovnice

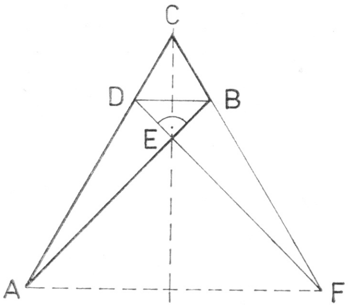
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = c^2\,, \quad \frac{a}{c} = \frac{c}{b}\,.$$

Řešení. Z první rovnice plyne $a^3 + b^3 = (a + b)\,c^2$. Dosadíme-li z druhé rovnice $c^2 = ab$, dostaneme $a^3 + b^3 = (a + b)\,ab$, po úpravě $(a - b)^2\,(a + b) = 0$. Protože a, b, c mají být kladná, mohou být řešením dané soustavy rovnic pouze trojice $a = b = c > 0$. Zkouškou se přesvědčíme, že tyto trojice jsou opravdu řešením.

C - II - 2

Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby uvnitř strany AC ležel bod D a uvnitř strany AB bod E s těmito vlastnostmi: Trojúhelník BCD je rovnostranný, trojúhelník BED je rovnoramenný a pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu E. Určete poměr $|AC| : |AE|$.

Řešení. Protože trojúhelník BCD má být rovnostranný, musí se velikost jeho úhlu při vrcholu C rovnat $60°$. Sestrojíme tedy libovolný rovnostranný trojúhelník BCD, dále pravoúhlý a rovnoramenný trojúhelník BDE s pravým úhlem při vrcholu E tak, aby body E, C ležely v opačných polorovinách s hraniční přímkou BD. Průsečík přímek CD a BE je bod A. Bod A existuje, protože přímky CD, BE nejsou rovnoběžné, bod D leží mezi body A, C, a trojúhelník ABC má požadované vlastnosti (obr. 37). Sestrojíme-li k bodu A



Obr. 37

bod F souměrně sdružený podle přímky CE, dostaneme rovnostranný trojúhelník CAF. Je pak $|AC| = |AF| = |AE|\sqrt{2}$, tedy $|AC| : |AE| = \sqrt{2}$.

C - II - 3a

Určete všechny dvojice prvočísel p, q, která splňují rovnici

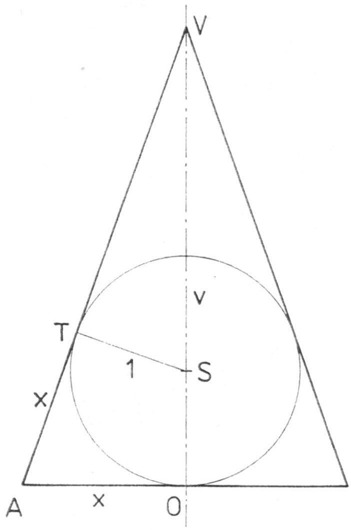
$$3p^2 + p = q^2 + 3q.$$

Řešení. Pro prvočísla p, q má platit $p(3p + 1) = q(q + 3)$. Pak musí existovat přirozené číslo k tak, že $3p + 1 = kq$, $q + 3 = kp$, tedy $3p + 1 = k(kp - 3)$, po úpravě $(k^2 - 3)p = 3k + 1$. Pro $k > 4$ je $k^2 - 3 > 3k + 1$ a nemůže existovat p splňující poslední rovnici. Z ostatních hodnot k vyhovuje pouze $k = 2$, je tedy $p = 7$, $q = 11$ jediné řešení úlohy.

C - II - 3b

Mezi všemi kuželi opsanými kouli o poloměru $r = 1$ najděte ty, jejichž objem je dvakrát větší než objem dané koule. Které kužele opsané této kouli mají objem menší, než je dvojnásobek objemu koule?

Řešení. Označme x poloměr podstavy a v výšku kužele opsaného kouli o poloměru $r = 1$ (obr. 38). Z pravoúhlých trojúhelníků AOV, STV plyne podle Pythagorovy věty $x^2 + v^2 = (x + \sqrt{(v - 1)^2 - 1})^2$, takže $x = v / \sqrt{v^2 - 2v}$, objem kužele je $V = \dfrac{1}{3} \dfrac{\pi v^2}{v - 2}$. Tato hodnota se rovná dvojnásobku objemu jednotkové koule právě tehdy, když v splňuje rovnici $v^2 = 8v - 16$, tj. $(v - 4)^2 = 0$. Z uvažovaných kuželů pouze kužel o výšce $v = 4$ má objem rovný dvojnásob-



Obr. 38

nému objemu jednotkové koule. Pro $v \neq 4$ je vždy číslo $(v - 4)^2$ kladné, objem kužele je pak větší $\frac{8}{3}\pi$. Žádný kužel opsaný kouli o poloměru 1 nemá objem menší, než je dvojnásobek objemu této koule.