34. ročník matematické olympiády

Kategorie B

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Milan Koman (editor); Karol Križalkovič (editor): 34. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1984/85. 26. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987. pp. 97–109.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404799

Kategorie B

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

B - I - 1

Zobrazení f roviny do sebe zobrazuje bod $[x, y]$ na bod $[ax + by + m, cx + dy + n]$, přičemž se body $[3, 0]$, $[1, 2]$ a $[-1, -1]$ zobrazí po řadě na body $[1, 4]$, $[-1, 2]$ a $[2, 0]$. Určete koeficienty a, b, c, d, m, n. Ukažte, že f je shodnost s jediným samodružným bodem, tedy otočení. Vypočtěte úhel otočení.

Řešení. Bod $[3, 0]$ se zobrazí na bod $[1, 4]$, musí tudíž platit $1 = 3a + m$, $4 = 3c + n$. Pro další dva body a jejich obrazy dostaneme analogicky další čtyři rovnice. Z obdržených šesti rovnic vypočteme $a = d = 0$, $b = -1$, $c = 1$, $m = n = 1$. Zobrazení f zobrazuje tudíž bod $[x, y]$ na bod $[-y + 1, x + 1]$, bod $[u, v]$ se zobrazí na bod $[-v + 1, u + 1]$. Protože $[(-y + 1) - (-v + 1)]^2 + [(x + 1) - (u + 1)]^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2$, rovná se vzdálenost libovolných dvou bodů vzdálenosti jejich obrazů, zobrazení f je shodné. Bod $[x, y]$ je právě tehdy samodružný, platí-li rovnice $x = -y + 1$, $y = x + 1$, proto má zobrazení f

jediný samodružný bod, je to bod $[0, 1]$. Bod $[1, 1]$ se zobrazí na bod $[0, 2]$, jde tedy o otočení o úhel $90°$.

B - I - 2

Nechť jsou a, b nesoudělná přirozená čísla. Určete nejmenší přirozené číslo m tak, aby pro všechna přirozená čísla c, $c \geqq m$, měly rovnice $ax + by = c$ řešení v oboru přirozených, tj. celých kladných čísel.

Řešení. Nejdříve si zkusíme určit číslo m pro některou volbu čísel a, b, například zvolíme $a = 2$, $b = 3$ nebo $a = 5$, $b = 3$. To nás vede k domněnce, že $m = ab + 1$. Ukážeme nejdříve, že rovnice

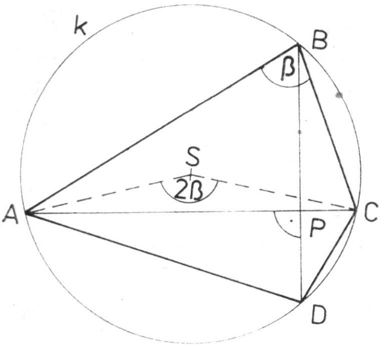
$$ax + by = ab$$

není řešitelná v oboru přirozených čísel. V opačném případě by se ax rovnalo $b(a - y)$, tedy číslo b by dělilo číslo ax. Protože čísla a, b jsou nesoudělná, muselo by být číslo x násobkem čísla b. To by ale bylo $ax \geqq ab$ a nemohlo by platit $ax + by = ab$ pro přirozené číslo y. Nechť je nyní $c \geqq ab + 1$. Jelikož a, b jsou nesoudělná, existují celá čísla u, v tak, že $au + bv = 1$. Položíme-li $x = cu$, $y = cv$, je $ax + by = c$. Jsou-li čísla x, y kladná, je řešitelnost rovnice $ax + by = c$ v oboru přirozených čísel dokázána. Je-li například $x \leqq 0$, plyne z rovnosti $ax + by = c$ nerovnost $y > a$ a platí $a(x + b) + b(y - a) = c$. Je-li $x + b$ kladné, jsme hotovi, v opačném případě je $y - a > a$ a platí $a(x + 2b) + b(y - 2a) = c$. Je-li číslo $x + 2b$ přirozené, dokázali jsme řešitelnost rovnice $ax + by = c$ v oboru přirozených čísel, jinak musíme pokračovat obdobným způsobem. Po konečném počtu zvětšení čísla x o b a současném zmenšení čísla y o a dosáhneme toho, že obě čísla budou kladná, přirozená. Tím je důkaz dokončen.

B - I - 3

Je dána kružnice k. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s kolmými úhlopříčkami AC, BD a vepsaný kružnici k, znáte-li velikosti α, β, γ, δ jeho vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C, D. Určete podmínky řešitelnosti.

Řešení. Předpokládejme, že čtyřúhelník $ABCD$ vyhovuje podmínkám úlohy (obr. 39). Protože je to čtyřúhelník tětivový, je $\alpha + \gamma = \pi$ a zároveň $\beta + \delta = \pi$. Označme P průsečík úhlopříček čtyřúhelníku. Z pravoúhlého trojúhelníku



Obr. 39

ABP plyne $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, analogicky pro součet každých dvou sousedních vnitřních úhlů čtyřúhelníku. Jsou tudíž $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$, $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, $\beta + \gamma > \frac{\pi}{2}$, $\gamma + \delta > \frac{\pi}{2}$ a $\delta + \alpha > \frac{\pi}{2}$ nutné podmínky pro existenci čtyřúhelníku požadovaných vlastností. Ukážeme, že to jsou i podmínky postačující. Předpokládejme, že jsou splněny. Aspoň jedna z hodnot α, γ je nejvýše rovna $\frac{\pi}{2}$, nechť je třeba $\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ (jinak by bylo $\gamma < \frac{\pi}{2}$ a další postup by byl obdobný). Stejně tak můžeme předpokládat $\beta \leqq \frac{\pi}{2}$. Označme ještě S střed kružnice k a r její poloměr. Protože $|\sphericalangle ABC| = \beta$, je podle věty o obvodovém a středovém úhlu $|\sphericalangle ASC| = 2\beta$. Sestrojíme tedy libovolnou tětivu AC kružnice k, ke které přísluší středový úhel 2β. Pak sestrojíme tětivu BD kolmou na AC tak, aby jí příslušel středový úhel 2α. Musíme ještě dokázat, že se tyto dvě tětivy protnou v bodě vnitřní oblasti kružnice k. Označme P průsečík přímek AC, BD. Vzdálenost přímky AC od středu S je $r \cos\beta$, vzdálenost bodu S od přímky BD je $r \cos\alpha$. Proto je $|SP|^2 = r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)$. Jelikož je $\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$, je $\cos\beta < \sin\alpha$ a tedy $|SP| < r$, takže je bod P bodem vnitřní oblasti kružnice k. Protože $|\sphericalangle ASC| = 2\beta$, je $|\sphericalangle ABC| = \beta$ nebo $|\sphericalangle ABC| = \pi - \beta$. V druhém případě zaměníme označení bodů B, D. Stejně tak zvolíme označení bodů C, A tak, aby $|\sphericalangle BAD| = \alpha$. Body A, B, C, D

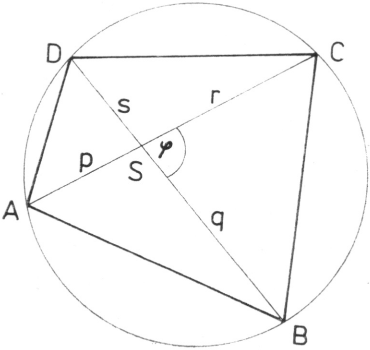
pak tvoří čtyřúhelník podle zadání úlohy. Až na shodnost má úloha právě jedno řešení.

B - I - 4

Najděte všechna přirozená čísla n taková, že čísla $1, 2, \ldots$ $\ldots, n$ je možno opatřit znaménky $+$ a $-$ tak, aby se pak jejich součet rovnal nule.

Řešení. Je $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Je-li toto číslo liché, není možné opatřit čísla $1, 2, \ldots, n$ znaménky podle podmínky úlohy. Součet čísel opatřených znaménkem $+$ by se musel rovnat součtu čísel opatřených znaménkem $-$ a součet obou těchto součtů by se rovnal lichému číslu, což nemůže být splněno. Aby bylo číslo $\dfrac{n(n+1)}{2}$ sudé, musí být $n = 4k$ nebo $n = 4k - 1$, kde k je přirozené číslo. Je-li $n = 4k$, můžeme čísla $1, 2, \ldots, k, 3k + 1, 3k + 2, \ldots, 4k$ opatřit znaménkem $+$, ostatní znaménkem $-$, pak je součet všech čísel opatřených takto znaménky nulový. Nebo jsme mohli čísla $1, 2, \ldots, 4k$ rozdělit do k čtveřic za sebou jdoucích čísel a v každé čtveřici opatřit první a poslední číslo znaménkem $+$, prostřední dvě čísla znaménkem $-$. V případě $n = 4k - 1$ opatříme čísla 1, 2 znaménkem $+$, číslo 3 znaménkem $-$, zbývajících $4k - 4$ čísel rozdělíme do $k - 1$ čtveřic za sebou jdoucích čísel, v každé čtveřici opatříme čísla znaménky výše uvedeným způsobem. Pak bude opět součet všech takto znaménky opatřených čísel nulový. Úloze tedy vyhovují právě všechna čísla dělitelná čtyřmi a všechna čísla, která dávají při dělení čtyřmi zbytek 3.

Najděte všechny tětivové čtyřúhelníky $ABCD$ o obsahu 8 cm², pro které platí $|AB| = |BC|$ a součet délek úhlopříček je 8 cm.



Obr. 40

Řešení. Označme S průsečík úhlopříček a p, q, r, s délky úseček SA, SB, SC, SD (obr. 40). Úhel úhlopříček označíme φ. Pak se obsah čtyřúhelníku rovná $\frac{1}{2}(pq + qr + rs + sp)\sin\varphi$, takže má platit $8 = \frac{1}{2}(p + r)(q + s)\sin\varphi$. Současně platí $p + r + q + s = 8$. Pro každá dvě nezáporná čísla a, b platí $ab \leqq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$, dosadíme-li za a, b čísla $p + r$, $q + s$, dostaneme $8 = \frac{1}{2}(p + r)(q + s)\sin\varphi \leqq \frac{1}{8} \cdot (p + r + q + s)^2 \sin\varphi = 8 \sin\varphi \leqq 8$. Protože první hodnota se rovná poslední, musí v předcházejícím řádku platit všude znaménko rovnosti, tedy $\sin \varphi = 1$ a zároveň $a = b$, tj. $p + r = q + s = 4$. Čtyřúhelník $ABCD$ musí mít na sebe kolmé úhlopříčky stejných délek. Jelikož $|AB| = |BC|$, musí to být deltoid. A jelikož to má být čtyřúhelník tětivový se stejně dlouhými úhlopříčkami, musí to být čtverec. Jediný čtyřúhelník, který splňuje podmínky úlohy, je čtverec o straně $2\sqrt{2}$.

B - I - 6

K, M, N jsou konečné množiny reálných čísel s počtem prvků po řadě k, m, n. Označme L množinu všech čísel tvaru $x + y + z$, kde $x \in \mathrm{K}$, $y \in \mathrm{M}$, $z \in \mathrm{N}$. Ukažte, že množina L má aspoň $k + m + n - 2$ prvků.

Řešení. Prvky množiny K označíme $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Můžeme předpokládat, že jsme je uspořádali tak, že platí $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Podobně můžeme předpokládat, že

$$\mathrm{M} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\},\ y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m,$$
$$\mathrm{N} = \{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n\},\ z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1} < z_n.$$

Pak jsou součty

$$x_1 + y_1 + z_1,\ x_2 + y_1 + z_1,\ \ldots,\ x_k + y_1 + z_1,$$
$$x_k + y_2 + z_1,\ x_k + y_3 + z_1,\ \ldots,\ x_k + y_m + z_1,$$
$$x_k + y_m + z_2,\ x_k + y_m + z_3,\ \ldots,\ x_k + y_m + z_n$$

navzájem různé, každý z nich je větší než předcházející. V prvním řádku je jich k, v druhém $m - 1$ a v třetím $n - 1$. Tím jsme dokázali, že v množině L je aspoň $k + m + n - 2$ navzájem různých čísel. Je-li například $\mathrm{K} = \{1, 2, \ldots, k\}$, $\mathrm{M} = \{1, 2, \ldots, m - 1, m\}$, $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots, n - 1, n\}$, je $\mathsf{L} = \{3, 4, \ldots, k + m + n\}$, množina L má právě $k + m + n - 2$ prvků.

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

B - S - 1

Zobrazení f roviny do sebe přiřadí bodu $[x, y]$ bod $[ax + by + m, cx + dy + n]$, přičemž se body $[-1, 3]$ a $[8, 0]$ zobrazí po řadě na body $[1, -1]$ a $[4, 8]$ a bod $[4, 3]$ se zobrazí na sebe. Určete koeficienty a, b, c, d, m, n a ukažte, že samodružné body zobrazení f tvoří přímku. (Bod je samodružný, jestliže se zobrazí na sebe.)

Řešení. Postupujeme obdobně jako v úloze B-I-1, vyjde $a = \frac{3}{5}$, $b = c = \frac{4}{5}$, $d = -\frac{3}{5}$, $m = -\frac{4}{5}$, $n = \frac{8}{5}$. Bod $[x, y]$ je právě tehdy samodružný, platí-li $y = \frac{1}{2}x + 1$. Samodružné body tedy tvoří přímku.

B - S - 2

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n $(n > 1)$ je možné čísla $1, 3, 5, \ldots, 4n - 3, 4n - 1$ opatřit znaménky + a − tak, že se pak jejich součet rovná nule.

Řešení. Máme $2n$ za sebou jdoucích lichých čísel $1, 3, \ldots, 4n - 1$. Tato čísla rozdělíme odzadu do čtveřic. Je-li n sudé, nezbyde žádné číslo. V každé čtveřici za sebou jdoucích lichých čísel $(2k - 3, 2k - 1, 2k + 1, 2k + 3)$ můžeme k prvnímu a poslednímu dát znaménko +, k prostředním dvěma znaménko −, součet všech čísel v čtveřici a tudíž i součet všech uvažovaných čísel se pak rovná nule. Je-li n liché, postupujeme obdobně. Čísla rozdělíme odzadu do čtveřic až na prvních šest, které opatříme znaménky takto: $+1, +3, +5, -7, +9, -11$.

B - S - 3a

Ukažte, že neexistují přirozená čísla a, b tak, aby bylo číslo $a^3 + b^3 - 3$ dělitelné sedmi.

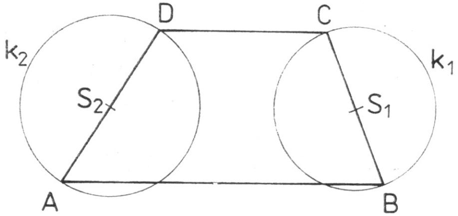
Řešení. Při dělení čísla a sedmi jsou možné zbytky 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, při dělení čísla a^3 sedmi jsou možné zbytky 0, 1, 6. Totéž platí pro číslo b^3, součet $a^3 + b^3$ může dát při dělení sedmi pouze zbytky 0, 1, 6, 2 nebo 5. Proto číslo $a^3 + b^3 - 3$ dává při dělení sedmi zbytek 4, 5, 3, 6 nebo 2, nikdy však zbytek 0, takže není dělitelné sedmi.

B - S - 3b

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD. Úsečka BC je průměrem kružnice k_1, úsečka AD je průměrem kružnice k_2. Dokažte, že lichoběžníku $ABCD$ lze vepsat kružnici právě tehdy, jestliže se kružnice k_1, k_2 vně dotýkají.

Řešení. Středy S_1, S_2 kružnic k_1, k_2 (obr. 41) splývají se středy ramen BC, AD, je tudíž $|S_1S_2| = \dfrac{|AB| + |CD|}{2}$.

Pro poloměry r_1, r_2 kružnic k_1, k_2 platí $2r_1 = |BC|$, $2r_2 = |AD|$. Kružnice k_1, k_2 se vně dotýkají právě tehdy, je-li $r_1 + r_2 = |S_1S_2|$, tedy $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$. To je



Obr. 41

však nutná a postačující podmínka pro to, aby byl čtyřúhelník $ABCD$ tečnový.

ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

Zobrazení h roviny na sebe zobrazuje bod $[x, y]$ na bod $[ax + by + m, cx + dy + n]$, kde a, b, c, d, m, n jsou reálná čísla. Určete je tak, aby se body $[0, 0]$, $[3, 0]$, $[0, 1]$ zobrazily po řadě na body $[6, 3]$, $[0, 3]$, $[6, 1]$. Najděte samodružné body zobrazení h a rozhodněte, zda h je shodnost, podobnost, středová souměrnost, stejnolehlost.

Řešení. Postupem stejným jako při řešení úloh B-I-1 a B-S-1 vypočteme $a = d = -2$, $b = c = 0$, $m = 6$, $n = 3$. Zobrazení h má jediný samodružný bod $S[2, 1]$. Zobrazení h není shodnost, tím spíše to není středová souměrnost. Zobrazení h je stejnolehlost a tedy i podobnost, neboť pro každý bod $X \neq S$ jsou polopřímky SX, $Sh(X)$ opačné a $|Sh(X)| = 2|SX|$.

B - II - 2

Najděte všechna řešení soustavy rovnic

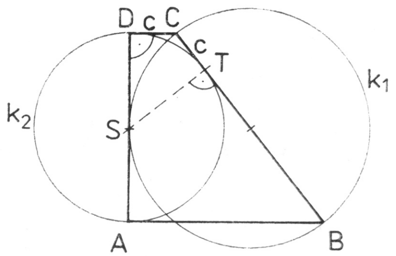
$$x + y + z = 3$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 27.$$

Řešení. Dosadíme-li $z = 3 - x - y$ do druhé rovnice, dostaneme po úpravě rovnici $(x + y)(x - 3)(y - 3) = 0$. Je-li $x + y = 0$, je $z = 3$. Je-li $x = 3$, je $z = -y$, podobně pro $y = 3$ je $z = -x$. Čísla x, y, z jsou řešením dané soustavy právě tehdy, je-li jedno z nich rovné 3 a zbývající dvě jsou libovolná dvě opačná čísla.

B - II - 3a

Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholu A, základnami lichoběžníku jsou strany AB, CD. Dokažte, že kružnice nad průměrem BC se dotýká ramene AD právě tehdy, když se kružnice nad průměrem AD dotýká ramene BC.



Obr. 42

Řešení. Kružnice k_1 nad průměrem BC se dotýká ramene AD (obr. 42) právě tehdy, když platí $b = a + c$, kde $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, neboť střední příčka lichoběžníku je $\frac{a+c}{2}$ a poloměr kružnice k_1 je $\frac{b}{2}$. Dotýká-li se kružnice k_2 nad průměrem AD ramene BC, je $b = a + c$, jak vyplývá z rovnosti úseků na tečnách vedených bodem B, případně C, ke kružnici k_2. Je-li obráceně $b = a + c$, můžeme na úsečce BC zvolit bod T tak, že $|CT| = c$, $|BT| = a$. Bodem T vedeme kolmici k přímce BC, její průsečík s přímkou AD označíme S. Ze shodnosti trojúhelníků SCD, SCT plyne $|SD| = |ST|$, stejně tak bychom dokázali, že $|SA| = |ST|$. Je tedy bod S střed kružnice k_2. Z rovnosti $|SD| = |ST|$ plyne, že se kružnice k_2 dotýká ramene BC. Tím jsme dokázali, že kružnice k_2 se dotýká ramene BC tehdy a jen tehdy, je-li $b = a + c$. Jelikož tato rovnost je též nutnou a postačující podmínkou pro dotyk kružnice k_1 a přímky AD, je tím tvrzení úlohy dokázáno.

B - II - 3b

Nechť m je dané přirozené číslo. Množinu

$$\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 2m - 1, 2m\}$$

rozložte na dvě disjunktní podmnožiny A, B tak, aby každá z množin A, B měla právě m prvků a číslo $c = \max(s(\mathsf{A}), s(\mathsf{B}))$ bylo co nejmenší. Přitom $s(\mathsf{A})$, resp. $s(\mathsf{B})$, značí součet všech čísel z množiny A, resp. z množiny B. Určete číslo c v závislosti na m.

Řešení. Je $s(\mathsf{A}) + s(\mathsf{B}) = 1 + 2 + \ldots + 2m = m(2m + 1)$. Můžeme předpokládat, že je $s(\mathsf{A}) \geqq s(\mathsf{B})$. Číslo c bude nejmenší, budou-li se čísla $s(\mathsf{A})$, $s(\mathsf{B})$ sobě rovnat nebo bude-li jejich rozdíl co nejmenší, neboť jejich součet je dán. Je-li m sudé, $m = 2k$, zkusíme najít takové rozdělení, aby platilo $s(\mathsf{A}) = s(\mathsf{B})$. Stačí položit $\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, k, 3k + 1, 3k + 2, \ldots, 4k\}$, $\mathsf{B} = \{k + 1, \ldots, 3k\}$, porovnej s úlohou B-I-4. Je pak $c = s(\mathsf{A}) = s(\mathsf{B}) = \frac{m}{2}(2m + 1) = m^2 + \frac{m}{2}$. Je-li m liché, je $s(\mathsf{A}) + s(\mathsf{B})$ číslo liché, nemůže být $s(\mathsf{A}) = s(\mathsf{B})$. Zkusíme najít takové rozdělení, aby $s(\mathsf{A}) = s(\mathsf{B}) + 1$. Nechť $m = 2k + 1$. Čísla $1, 2, \ldots, 4k$ rozdělíme do množin A, B jako v předcházejícím případě, do množiny A přidáme ještě číslo $4k + 2$, do množiny B přidáme číslo $4k + 1$. Je pak $c = s(\mathsf{A}) = k(4k + 1) + 4k + 2 = m^2 + \frac{m + 1}{2}$.