34. ročník matematické olympiády

Korespondenční seminář ÚV MO

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Milan Koman (editor); Karol Križalkovič (editor): 34. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1984/85. 26. mezinárodní matematická olympiáda (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987. pp. 147–156.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404801

Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář ÚV MO je jednou z forem péče o talentované žáky, zvláště pak o ty, kteří nemají možnost navštěvovat speciální školy se zaměřením na matematiku a pracovat v tamních seminářích. Zásadně však nejsou přijímáni studenti pražských škol, ti mají dostatek možností seznámit se s vybranými okruhy úloh na seminářích řešitelů MO.

K účasti v korespondenčním semináři pozvalo předsednictvo ÚV MO na základě návrhů KV MO a individuálního zájmu téměř 50 žáků, z nichž se přihlásilo 28 řešitelů z celé republiky:

Kraj	Stč	Jč	Zč	Sč	Vč	Jm	Sm	Bva	Zsl	Ssl	Vsl
Počet řešitelů	—	5	3	3	4	2	1	1	1	2	6

V průběhu 34. ročníku MO jim bylo zasláno pět sérií poměrně náročných úloh. Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Korespondenční seminář je řízen tajemníkem

ÚV MO RNDr. Karlem Horákem, který se stará o výběr a přípravu úloh a obvykle provádí i redakci komentářů. Opravu pak zajišťuje několik pracovníků Matematického ústavu ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK v Praze (všichni jsou bývalí olympionici).

Pouze 14 účastníků semináře se nedalo odradit nejobtížnějším 4. kolem. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli *Radek Adamec* (G Kroměříž), *Igor Melicherčík* (G Banská Bystrica), *Vladimír Kordula* (G M. Koperníka Bílovec), *Vladan Majerech* (G Pardubice) a *Richard Seďa* (G Blansko). Uvádíme znění všech zadaných úloh.

1. Kombinatorika

1.1 Permutací čísel $1, 2, \ldots, n$ nazveme každé vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ do sebe. Permutací inverzní k π nazýváme permutaci π^{-1} takovou, že $\pi^{-1}(\pi(i)) = i$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Inverzí permutace π nazýváme každou dvojici $i < j$ takovou, že $\pi(i) > \pi(j)$. Dokažte, že pro každou permutaci π množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ platí: π a π^{-1} mají stejný počet inverzí.

1.2 Zjištěte, kolik permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ má právě 1, resp. 2, resp. 3 inverze.

1.3 Nechť Q je množina všech uspořádaných čtveřic utvořených z nul a jedniček. Ukažte, že čtveřice z Q nelze obarvit třemi barvami (tj. přiřadit každé čtveřici některou ze tří barev) tak, aby čtveřice, které se liší právě v jedné složce, měly různou barvu, a také čtveřice, které se liší ve všech složkách, měly různou barvu.

1.4 Body roviny jsou obarveny třemi barvami. Ukažte, že pro každé $d > 0$ existují dva body se vzdáleností d stejné barvy.

1.5 Množina X má 1 983 prvků. Předpokládejme, že existuje takový systém jejích podmnožin $S_1, S_2, \ldots, S_m$, že
a) sjednocení kterékoli trojice těchto množin je celá množina X,
b) sjednocení libovolné dvojice má nejvýše 1 979 prvků.
Jaká je největší možná hodnota m?

1.6 Každému z vrcholů $A_1, A_2, \ldots, A_{1983}$ pravidelného 1 983-úhelníku je přiřazena jedna z hodnot ± 1. Bod A_i nazveme dobrým, jestliže součet ohodnocení vrcholů ležících na libovolné cestě (po obvodu 1 983-úhelníku) vycházející z bodu A_i je kladný (přitom ohodnocení bodu A_i se do součtu nezapočítává). Dokažte, že má-li aspoň 1 789 bodů ohodnocení $+1$, nejméně 1 207 bodů je dobrých.

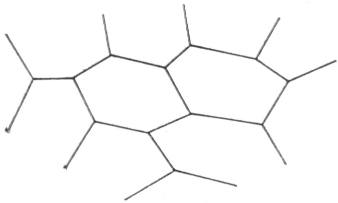
1.7 Je dán konvexní mnohostěn. Je známo, že sečteme-li úhly při všech vrcholech daného mnohostěnu až na jeden, dostaneme $5\,160°$. Najděte součet úhlů při zbývajícím vrcholu.

1.8 Nechť n je liché a X konečná množina s více než n prvky, A, B podmnožiny X. Dokažte, že je-li pro každou n-prvkovou podmnožinu $Y \subset X$

$$|A \cap Y| \equiv |B \cap Y| \pmod 2,$$

je $A = B$.

2.1 Jeden z nejjednodušších mnohobuněčných organismů váleč koulivý se skládá z jednotlivých buněk uspořádaných na kulové ploše, takže připomínají mnohostěn. Tyto buňky mají v podstatě tvar pěti-, šesti- a sedmiúhelníků, přičemž v každém »vrcholu« se dotýkají právě tři buňky (obr. 61). Vyskytují se také jedinci se čtyřúhelníkovými a osmiúhelníkovými buňkami, biologové však zjistili, že pokud váleč tyto nestandardní buňky nemá, pak je vždy pětiúhelníkových buněk o 12 více než sedmiúhelníkových (počet všech buněk dosahuje několika set, ba i tisíce). Umíte matematicky objasnit tento experimentální výsledek biologů?



Obr. 61

2.2 Pět hran čtyřstěnu má délku menší než 1. Dokažte, že objem takového čtyřstěnu je menší než $\frac{1}{8}$.

2.3 Ke čtyřstěnu $ABCD$ existuje pět kulových ploch, z nichž každá se dotýká šesti přímek AB, BC, CA, AD, BD, CD, právě když je to pravidelný čtyřstěn. Dokažte.

2.4 Dokažte, že řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou procházející jejím středem a kolmou k tělesové úhlopříčce AG je pravidelný šestiúhelník.

2.5 Určete poloměr největší kružnice, kterou lze celou umístit uvnitř dané krychle o hraně délky 1.

2.6 Na kulové ploše je dána kružnice k, mimo kulovou plochu je dán bod P. Spojnice bodu P s body kružnice k protnou danou kulovou plochu zpravidla ještě v dalším bodě. Dokažte, že tyto body leží rovněž na kružnici.

2.7 Jsou-li E, F, G, H libovolné čtyři body v prostoru, označme p_{EFGH} součet délek $|EF| + |EG| + |EH| + |FH| + |FG| + |GH|$, obvod trojúhelníku KLM budeme značit p_{KLM} a délku lomené čáry g označíme p_g. Dokažte, že pak platí:

a) Není-li obvod stěny KLM čtyřstěnu $KLMN$ menší než obvod každé jiné stěny, pak $p_{KLMN} \leqq 2\, p_{KLM}$.

b) Leží-li trojúhelník KLM uvnitř uzavřené lomené čáry g, pak $p_{KLM} \leqq p_g$.

c) Jsou-li A_1, B_1, C_1, D_1 pravoúhlé průměty vrcholů čtyřstěnu $ABCD$ do roviny σ, pak pro obvod p konvexního obalu bodů A_1, B_1, C_1, D_1 platí $p < \frac{2}{3}\, p_{ABCD}$.

d) Leží-li čtyřstěn $KLMN$ uvnitř čtyřstěnu $ABCD$, pak $p_{KLMN} < \frac{4}{3}\, p_{ABCD}$.

Ukažte, že poslední nerovnost nelze zlepšit.

3. Rovnice a funkce

3.1 Nechť n je přirozené číslo. Pro libovolnou n-tici reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $0 \leqq x_i \leqq 1$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, uvažujme součet

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} |x_i - x_j| =$$

$$\begin{aligned} = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \ldots + |x_1 - x_{n-1}| + |x_1 - x_n| + \\ + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_2 - x_{n-1}| + |x_2 - x_n| + \\ + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + |x_{n-2} - x_{n-1}| + |x_{n-2} - x_n| + \\ + |x_{n-1} - x_n|. \end{aligned}$$

Najděte největší hodnotu tohoto součtu.

3.2 Určete největší reálné číslo z tak, aby existovala reálná čísla x, y taková, že

$$x + y + z = 5,$$

$$xy + yz + zx = 3.$$

3.3 Najděte všechna reálná čísla b, pro něž existují nezáporná reálná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 taková, že platí

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = b, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = b^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = b^3.$$

3.4 Uvažujme funkci

$$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x,$$

kde a, b, A, B jsou daná reálná čísla. Je-li $f(x) \geqq 0$ pro každé reálné x, potom

$$a^2 + b^2 \leqq 2, A^2 + B^2 \leqq 1.$$

Dokažte.

3.5 Určete největší hodnotu, kterou může nabýt součin několika přirozených čísel, jejichž součet je 1 984.

3.6 Nechť $P_1(x) = x^2 - 2$ a pro $j \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ je

$$P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x)).$$

Dokažte, že pro každé přirozené n jsou všechny kořeny rovnice $P_n(x) = x$ reálné a různé.

3.7 Určete všechny kvadratické trojčleny $f(x) = ax^2 + bx + c$, které splňují následující dvě podmínky:

a) $|f(x)| \leqq 1$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$,

b) $a^2 + b^2 + c^2 = 5$.

4. Teorie čísel

4.1 Dokažte, že každý zlomek $\dfrac{m}{n}$, $0 < \dfrac{m}{n} < 1$, je možno vyjádřit ve tvaru

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_r},$$

kde $0 < q_1 < q_2 < \ldots < q_r$ jsou celá čísla a q_k dělí q_{k+1} pro $k \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$.

4.2 Pro každé přirozené číslo k existuje nekonečně mnoho přirozených čísel N takových, že v jejich dekadickém zápisu není žádná nula a přitom čísla N a kN mají stejný ciferný součet. Dokažte.

4.3 Je-li přirozené číslo dělitelné číslem 10 101 010 101, pak má jeho dekadický zápis aspoň šest nenulových číslic. Dokažte.

4.4 Je dáno sedmnácticiferné číslo. Zapišme jeho číslice v obráceném pořadí a vzniklé číslo přičtěme k číslu danému. Dokažte, že aspoň jedna z číslic uvedeného součtu bude sudá.

4.5 Je dáno přirozené číslo n. Všechna přirozená čísla, jejichž dekadický zápis má nejvýše n číslic, rozdělíme do dvou skupin podle toho, je-li jejich ciferný součet lichý nebo sudý. Je-li $1 \leqq k < n$, dokažte, že součet k-tých mocnin všech čísel první skupiny se rovná součtu k-tých mocnin všech čísel druhé skupiny.

4.6 Dokažte, že mezi libovolnými 200 celými čísly najdeme 100 čísel tak, že jejich součet bude dělitelný stem.

4.7 Je dáno přirozené číslo $n > 1\,000$. Označme a_k zbytek čísla 2^n při dělení číslem k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 2n$.

5. Kombinatorika

5.1 V jednom městě několik lidí nastydlo, a tak vypukla chřipková epidemie (v následujících dnech již nikdo nenastydl, chřipka se šířila kapénkovou nákazou). Nemoc vypukne druhý den po nákaze a trvá vždy jeden den, následující den je člověk imunní. Přitom každý zdravý občan navštíví každý den všechny své nemocné přátele, přestože se od nich nakazí, pokud není ten den imunní. Dokažte, že pokud první den epidemie nikdo nebyl imunní, pak epidemie jednoho krásného dne skončí. Zůstává tvrzení v platnosti, pokud připustíme, že první den epidemie mohl být někdo imunní následkem očkování?

5.2 Ve skupině několika lidí má každý nejvýše tři nepřátele. Dokažte, že skupinu lze rozdělit do dvou částí tak, aby každý člověk měl ve své části nejvýše jednoho nepřítele.

5.3 Turnaje v nohejbalu se zúčastnilo $n > 2$ družstev, přitom pro každá dvě mužstva se najde třetí, které nad oběma vyhrálo. Pro jaké n mohla taková situace nastat?

5.4 Na stole je n knih složených v několika hromádkách. Knihovník je každý den přerovnává - z každé hromádky odebere jednu knihu a z těchto vytvoří novou hromádku. Přitom do sešitu zapíše počty knih v jednotlivých hromádkách (seřazené podle velikosti). Dokažte, že platí:

a) Po nějakém čase se zápisy v sešitu začnou pravidelně opakovat.

b) Jestliže po nějakém čase budou zápisy každý den stejné, pak $n = \binom{k}{2}$ pro vhodné k.

Platí tvrzení b) i obráceně?

5.5 Ve skupině několika lidí má každý právě tři přátele. Rozhodněte, zda každou takovou skupinu je možno rozdělit do dvojic tak, aby lidé v každé dvojici byli přáteli.

5.6 V rovině je dáno n bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Kolik nejvýše úseček lze vytvořit spojováním daných bodů, aby přitom nevznikl žádný trojúhelník (s vrcholy v daných bodech)?

5.7 V rovině je dáno několik bodů, přitom žádné tři neleží na jedné přímce. Některé dvojice bodů jsou spojeny úsečkami tak, že z každého bodu vycházejí nejvýše tři úsečky. Dokažte, že body je možno obarvit dvěma barvami tak, že každý bod je úsečkou spojen nejvýše s jedním bodem téže barvy.