35. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Hvorecký (editor); Branislav Rovan (editor): 35. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1985/86. 27. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. pp. 41–59.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404811

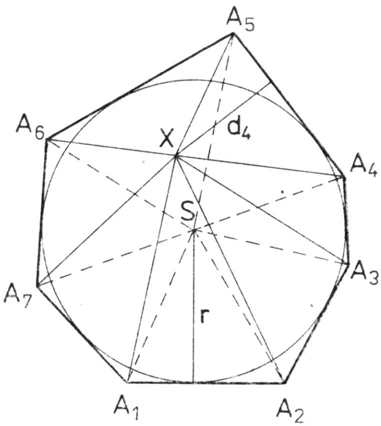
Kategorie C

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

C - I - 1

Uvnitř konvexního sedmiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ opsaného kružnici o poloměru r je dán bod X. Vyjádřete r pomocí délek stran sedmiúhelníku a vzdáleností bodu X od přímek A_1A_2, A_2A_3, ..., A_6A_7, A_7A_1.

Řešení. Označme d_i vzdálenost bodu X od přímky A_iA_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, 6$) a d_7 vzdálenost bodu X od přímky A_7A_1. Celý sedmiúhelník se skládá ze sedmi nepřekrývajících se trojúhelníků XA_1A_2, XA_2A_3, ..., XA_6A_7, XA_7A_1 (obr. 1).



Obr. 1

Jeho obsah se tedy rovná součtu obsahů těchto trojúhelníků, tj. hodnotě

$$\frac{1}{2}(|A_1A_2| . d_1 + \ldots + |A_6A_7| . d_6 + |A_7A_1| . d_7).$$

Daný sedmiúhelník je také složen z nepřekrývajících se trojúhelníků SA_1A_2, SA_2A_3, $\ldots$, SA_6A_7, SA_7A_1, kde jsme označili S střed kružnice sedmiúhelníku vepsané. Všechny tyto trojúhelníky mají stejně velkou výšku r ke straně A_iA_{i+1} (A_7A_1), obsah sedmiúhelníku se tudíž rovná také hodnotě

$$\frac{1}{2}(|A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots + |A_6A_7| + |A_7A_1|)r.$$

Porovnáním obou výrazů pro obsah sedmiúhelníku dostaneme

$$r = \frac{|A_1A_2| . d_1 + \ldots + |A_6A_7| . d_6 + |A_7A_1| . d_7}{|A_1A_2| + \ldots + |A_6A_7| + |A_7A_1|}.$$

C - I - 2

Určete všechna přirozená čísla n, která se nedají napsat ve tvaru $n = 3x + 5y$, kde x, y jsou přirozená čísla.

Řešení. Jsou-li x, y přirozená čísla (tj. celá kladná), je číslo $3x + 5y$ větší než 7. Tím je zřejmé, že čísla 1, 2, 3, $\ldots$, 6, 7 nejdou napsat ve tvaru $3x + 5y$, kde x, y jsou přirozená čísla. Čísla 8, 11, 13 a 14 lze napsat v požadovaném tvaru: $8 = 3.1 + 5.1$, $11 = 3.2 + 5.1$, $13 = 3.1 + 5.2$ a $14 = 3.3 + 5.1$. Čísla 9, 10, 12 a 15 není možné napsat požadovaným způsobem. Kdyby například platilo $15 = 3x + 5y$, x, y přirozená čísla, bylo by číslo $5y = 15 - 3x$ dělitelné třemi. Pak by však muselo být $y \geqq 3$ a číslo $x = \frac{15 - 5y}{3}$ by nebylo přirozené, protože by nebylo kladné. Snadno si ověříte, že čísla 16, 17, 18, 19 a 20 lze vyjádřit ve tvaru $3x + 5y$, kde x, y jsou přirozená čísla, například $18 = 3.1 + 5.3$. Každé číslo větší než 20 lze napsat ve tvaru $5k + q$, kde $k \geqq 3$ a q se rovná některému z čísel 1, 2, 3, 4, 5. Pak je $5k + q = 5(k - 3) + 15 + q = 5(k - 3) + r$, $r \in \{16, 17, 18, 19, 20\}$. Víme již, že se číslo r dá napsat ve tvaru $3x + 5y$, kde x, y jsou přirozená čísla, proto to platí i pro číslo $5k + q = 3x + 5(y + k - 3)$. Hledanou množinou přirozených čísel je tedy množina

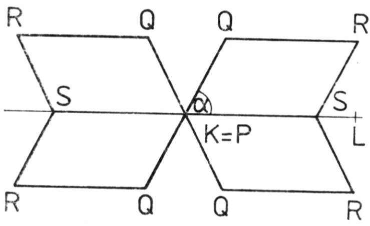
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 15\}.$$

To ovšem za předpokladu, že přirozeným číslem rozumíme číslo celé a kladné. Zahrneme-li mezi přirozená čísla také nulu, dostaneme jen množinu $\{1, 2, 4, 7\}$.

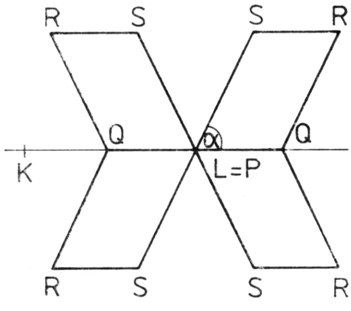
C - I - 3

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a v jeho rovině dva body K, L. Uvažujme všechny rovnoběžníky $PQRS$ shodné s rovnoběžníkem $ABCD$, které leží v téže rovině, přímka PQ prochází bodem K a přímka PS bodem L. Určete množinu všech vrcholů P takových rovnoběžníků a dokažte, že existují dva body takové, že úhlopříčka PR každého uvažovaného rovnoběžníku $PQRS$ prochází aspoň jedním z nich.

Řešení. Označme $\alpha = |\sphericalangle\ DAB|$. Do hledané množiny patří zřejmě bod K. Existují totiž čtyři rovnoběžníky $PQRS$ shodné s rovnoběžníkem $ABCD$, pro které splývá bod P s bodem K a bod S leží na přímce KL (obr. 2). Podobně to platí pro bod L (obr. 3). Žádný další bod přímky KL nemůže do hledané množiny patřit, protože by přímky PK, PL splynuly, na přímce PK leží bod Q, na přímce PL bod S, avšak body Q, P, S neleží na přímce. Hledejme ty body P, které

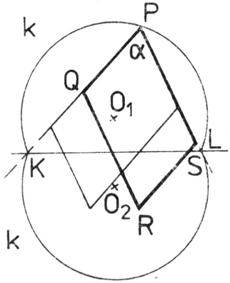


Obr. 2

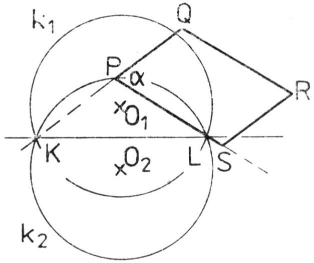


Obr. 3

neleží na přímce KL. Předpokládejme tedy, že $PQRS$ je rovnoběžník požadovaných vlastností a že bod P neleží na přímce KL. Protože $|\sphericalangle SPQ| = \alpha$ a bod K leží na přímce PQ a bod L na přímce PS, je $|\sphericalangle KPL| = \alpha$ (obr. 4) nebo je $|\sphericalangle KPL| = 180° - \alpha$ (obr. 5). Podle věty o obvodovém a stře-

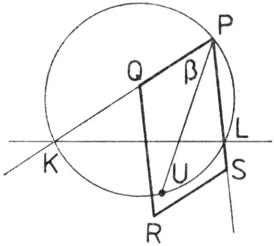


Obr. 4

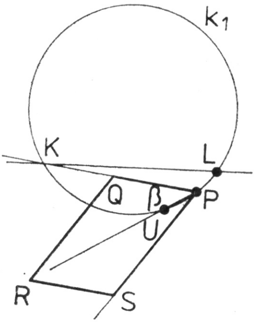


Obr. 5

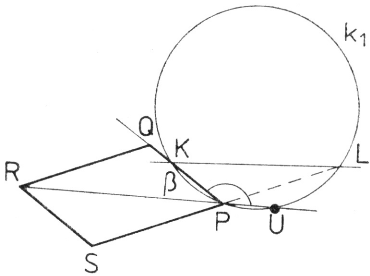
dovém úhlu je množinou všech bodů P v rovině, pro které je $|\sphericalangle KPL| = \alpha$, množina všech bodů dvou kruhových oblouků s krajními body K, L. Totéž platí pro ty body P, pro které je $|\sphericalangle KPL| = 180° - \alpha$. Všechny tyto čtyři kruhové oblouky tvoří spolu s body K, L dvě kružnice procházející body K, L a souměrně sdružené podle přímky KL. Tyto dvě kružnice splývají, je-li $\alpha = 90°$ (rovnoběžník $ABCD$ je pravoúhelník). Je-li obráceně P bod některé z těchto dvou kružnic a různý od bodů K, L, je $|\sphericalangle KPL| = \alpha$ nebo je $|\sphericalangle KPL| = 180° - \alpha$. V prvním případě můžeme na polopřímkách PK a PL (nebo na polopřímkách opačných) zvolit body Q a S tak, že lze body P, Q, S doplnit na rovnoběžník $PQRS$ shodný s rovnoběžníkem $ABCD$. V druhém případě můžeme se stejným výsledkem zvolit bod Q na polopřímce PK a bod S na polopřímce opačné k polopřímce PL, nebo bod S na polopřímce PL a bod Q na polopřímce opačné k polopřímce PK. Protože do hledané množiny patří též body K, L, můžeme shrnout výsledek: Hledanou množinou je množina všech bodů kružnic k_1, k_2 procházejících body K, L, pro jejichž středy O_1, O_2 platí (pro $i = 1, 2$) $|\sphericalangle KO_iL| = 2\alpha$, jestliže je $\alpha = |\sphericalangle DAB| \leqq 90°$, nebo platí $|\sphericalangle KO_iL| = 2(180° - \alpha)$ v případě $\alpha > 90°$. Je-li $\alpha = 90°$, kružnice k_1, k_2 splývají. Zvolme na kružnici k_1 bod U tak, aby pro každý její bod P, pro který je $|\sphericalangle KPL| = \alpha$, platilo $|\sphericalangle KPU| = \beta$, kde $\beta = |\sphericalangle BAC|$. Je-li $PQRS$ rovnoběžník požadovaných vlastností a bod P leží na kružnici k_1, prochází jeho úhlopříčka PR bodem U, neboť $|\sphericalangle QPR| = \beta$ a $|\sphericalangle KPU| = \beta$ nebo $|\sphericalangle KPU| = 180° - \beta$ (obr. 6, 7, 8), podle toho, na kterém oblouku kružnice k_1 s krajními body K, U bod P leží. V každém případě pak leží body R, U, P na jedné přímce. Leží-li bod P na kružnici k_2, prochází přímka PR bodem V souměrně sdruženým k bodu U podle přímky KL. Tím jsme dokázali druhou část tvrzení úlohy, že přímka PR prochází buď bodem U, nebo bodem V.



Obr. 6



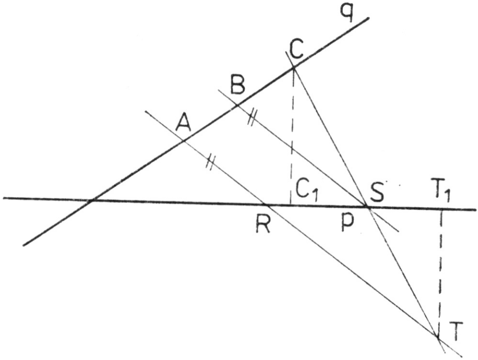
Obr. 7



Obr. 8

C - I - 4

Jsou dány různoběžky p, q a na přímce q tři navzájem různé body A, B, C, $A \notin p$. Je-li $R \notin q$ libovolný bod přímky p, označme S průsečík přímky p s přímkou rovnoběžnou s přímkou AR a procházející bodem B. Nechť je T průsečík přímek AR a CS. Dokažte, že vzdálenost bodu T od přímky p nezávisí na volbě bodu R.

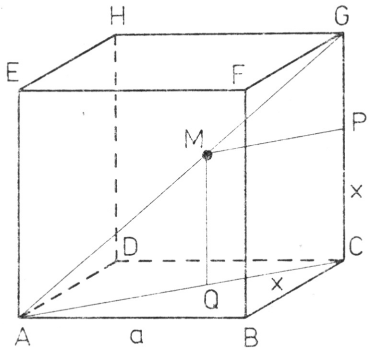


Obr. 9

Řešení. Označme C_1, T_1 paty kolmic vedených body C, T k přímce p (obr. 9). Je pak $|TT_1| : |CC_1| = |TS| : |CS|$. Z podobnosti trojúhelníků ATC, BSC plyne $|TS| : |CS| = |AB| : |CB|$, takže $|TT_1| = |AB| . |CC_1| : |CB|$. Poslední výraz nezávisí na R, což jsme měli dokázat. Mlčky jsme předpokládali, že $C \notin p$. Je-li bod C průsečíkem přímek p, q, je $T = R$ a tvrzení platí také.

Uvnitř krychle určete středy všech kulových ploch, které se dotýkají jejích tří sousedních stěn se společným vrcholem a tří sousedních hran krychle, které v těchto stěnách neleží.

Řešení. Označme danou krychli $ABCDEFGH$ (obr. 10). Je-li bod M středem kulové plochy, jež se dotýká stěn ABC, ADH, ABF, leží bod M na tělesové úhlopříčce AG krychle. Každý bod úhlopříčky AG má od přímek GF, GH, GC stejné vzdálenosti. Máme tedy najít ty body M úhlopříčky AG, které



Obr. 10

mají stejnou vzdálenost od stěny ABC jako od hrany GC. Označme $|AB| = a$, $|MQ| = |MP| = x$, kde je Q pata kolmice vedené bodem M k stěně ABC, P je pata kolmice vedené bodem M k přímce GC. Z podobnosti trojúhelníků GPM, GCA plyne

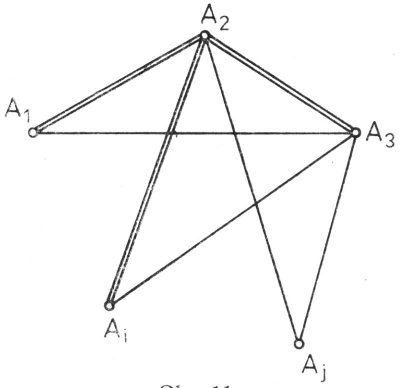
$$x : (a - x) = a\sqrt{2} : a = \sqrt{2}.$$

Protože $|GM| : |AM| = |GP| : |MQ| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dělí bod M úhlopříčku AG v poměru $\sqrt{2} : 1$. Na každé tělesové úhlopříčce krychle existují dva body s touto vlastností. Celkem existuje pro danou krychli osm bodů, jež jsou středy kulových ploch požadované vlastnosti.

C - I - 6

Je dán mnohoúhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$. Každou ze stran a úhlopříček daného mnohoúhelníku obarvíme červeně nebo modře tak, že strany A_1A_2 a A_2A_3 budou červené a strana A_3A_4 a všechny úhlopříčky vedoucí z vrcholu A_3 budou modré. Určete n, platí-li navíc: Při každém takovém obarvení existuje aspoň 49 dvojbarevných trojúhelníků, přičemž existuje obarvení, ve kterém jich je právě 49.

Řešení. Předpokládejme, že je n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ obarven podle podmínek úlohy. Nechť je ze spojnic $A_2A_4, \ldots, A_2A_n$ obarveno k modře a zbývajících $n - 3 - k$ červeně. Dvoubarevné budou určitě trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a $A_1A_2A_j$ ($j \geqq 4$), kde je A_2A_j obarveno modře (obr. 11, červená úsečka je vyznačena dvojitě, modrá jednoduše). Dále jsou dvoubarevné všechny trojúhelníky $A_2A_3A_r$, $r \geqq 4$, a všechny trojúhelníky $A_2A_iA_j$ ($i, j \geqq 4$), pro které je úsečka A_2A_j modrá a úsečka A_2A_i červená. Je-li úsečka A_2A_i červená ($4 \leqq i \leqq n$), je právě jeden z trojúhelníků $A_1A_2A_i$, $A_1A_3A_i$ dvoubarevný. To je dalších $n - 3 - k$ dvoubarevných trojúhelníků. Celkem máme aspoň m dvoubarevných trojúhelníků, $m = 1 + k + (n - 3) + (n - 3 - k) + (n - 3 - k)k = 2n - 5 + k(n - 3 - k)$. Protože $0 \leqq k \leqq n - 3$, je $m \geqq 2n - 5$,



Obr. 11

přičemž pro $k = 0$ nebo $k = n - 3$ je $m = 2n - 5$. Zvolíme-li obarvení tak, že červené budou pouze úsečky A_1A_2 a A_2A_3, jsou podmínky úlohy splněny a v mnohoúhelníku je právě $2n - 5$ dvoubarevných trojúhelníků. Jsou to trojúhelníky $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_i$, $A_2A_3A_i$ $(i = 4, \ldots, n)$. Vidíme, že při každém obarvení n-úhelníku podle požadavků úlohy existuje aspoň $2n - 5$ dvoubarevných trojúhelníků a existuje obarvení, při kterém jich je právě $2n - 5$. Je tedy $2n - 5 = 49$, odkud plyne $n = 27$.

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

C - S - 1

Nechť je Z množina všech celých čísel a nechť a, b, c, d jsou daná přirozená čísla (celá kladná). Jestliže

$$\{a + bt;\ t \in Z\} \cap \{c + ds;\ s \in Z\} \neq 0,$$

pak největší společný dělitel čísel b, d dělí rozdíl $a - c$. Dokažte.

Řešení. Je-li splněn předpoklad úlohy, existují celá čísla t, s tak, že $a + bt = c + ds$, tedy $ds - bt = a - c$. Největší společný dělitel čísel b, d dělí i číslo $ds - bt$, tedy číslo $a - c$.

C - S - 2

Vypočtěte poloměr kulové plochy, která je částí krychle o délce hrany $a = 10$ cm, dotýká se tří sousedních stěn této krychle a prochází jejím středem.

Řešení. Střed S kulové plochy, která se dotýká tří sousedních stěn krychle, leží na tělesové úhlopříčce krychle. Jeho vzdálenosti od stěn, jichž se kulová plocha dotýká, se rovnají poloměru r kulové plochy, jeho vzdálenost od společného bodu A všech tří stěn je $r\sqrt{3}$. Vzdálenost bodu S od středu krychle je r, protože kulová plocha má středem krychle procházet. Proto je

$$r\sqrt{3} + r = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}, \qquad r = \frac{5}{2}(3 - \sqrt{3}).$$

Případ, kdy je střed krychle bodem úsečky AS, a tedy $r(\sqrt{3} - 1) = 5\sqrt{3}$, nevyhovuje, protože by příslušná kulová plocha nebyla částí krychle.

C - S - 3a

Kolem Měsíce obíhá 25 spojových družic. Každá z nich je spojena s 30 výzkumnými stanicemi na povrchu Měsíce, přičemž libovolné dvě stanice jsou přímo spojeny nejvýše s jednou společnou družicí. Dokažte, že na Měsíci pracuje alespoň 150 stanic, které mají spojení právě s jednou družicí.

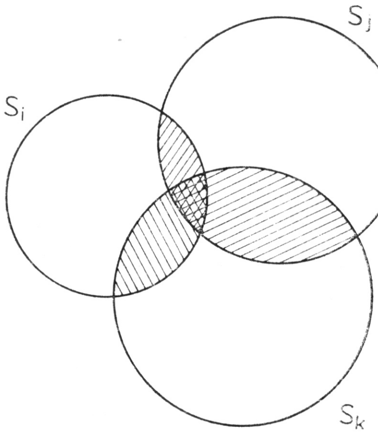
Řešení. Označme S_i množinu všech těch stanic, které jsou přímo spojeny s i-tou spojovou družicí, $i = 1, 2, \ldots, 25$. Každá z množin S_i má podle předpokladu právě 30 prvků. Pro $i \neq j$ mají množiny S_i, S_j nejvýše jeden společný prvek, v opačném případě by měly dvě stanice přímé spojení s i-tou i s j-tou družicí. Označme n počet prvků množiny N, která je sjednocením všech množin S_i, $i = 1, 2, \ldots, 25$, tj. množiny všech stanic, které mají spojení aspoň s jednou družicí. Zřejmě platí

$$n \geqq \sum_{i=1}^{25} |S_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{25} |S_i \cap S_j|,$$

přičemž znaménko rovnosti platí právě tehdy, když každé tři množiny S_i, S_j, S_k, $i \neq j \neq k \neq i$ mají prázdný průnik (obr. 12). Zde jsme $|X|$ označili počet prvků množiny X. Jelikož je $|S_i| = 30$ a $|S_i \cap S_j| \leqq 1$ pro $i \neq j$, je $n \geqq 25.30 - \binom{25}{2} . 1 = 450$. Kdyby nejvýše 149 stanic mělo spojení právě s jednou družicí, měly by ostatní stanice množiny N spojení aspoň s dvěma a platilo by

$$149.1 + (n - 149).2 \leqq 25.30,$$

protože 25.30 je počet všech spojení. To by pak platilo $n \leqq 449{,}5$, což je spor s odvozeným vztahem $n \geqq 450$.



Obr. 12

C - S - 3b

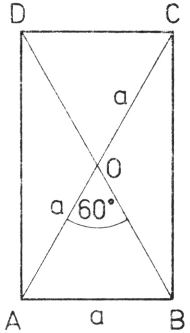
Sestrojte všechny obdélníky, jejichž úhlopříčky svírají úhel $60°$ a součet délek jedné strany a úhlopříčky je 12 cm.

Řešení. Rozlišíme dva případy:

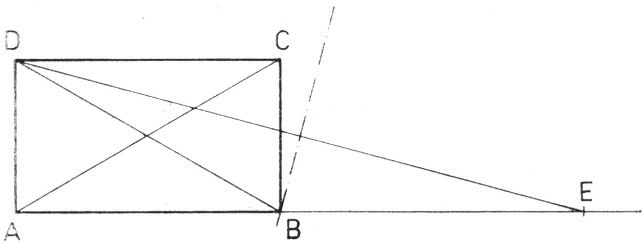
a) Nechť je součet délek ~~kratší~~ strany a obdélníku a jeho úhlopříčky roven 12 cm. Pak je délka úhlopříčky $u = 2a$, takže $a = 4$ cm, $u = 8$ cm, neboť trojúhelník ABO je rovnostranný (O je střed obdélníku, A, B jsou krajní body jeho kratší strany, obr. 13). Sestrojíme tedy pravoúhlý trojúhelník ABC o délce odvěsny $|AB| = 4$ cm a délce přepony $|AC| = 8$ cm a ten doplníme na obdélník $ABCD$.

b) Nechť je v obdélníku $ABCD$ součet délek delší strany AB a úhlopříčky roven 12 cm (obr. 14). Pak je $|\sphericalangle DBE| = 150°$, kde je E bod na polopřímce AB, pro který je $|BE| = |BD|$.

Trojúhelník DBE je rovnoramenný, tedy $|\sphericalangle BED| = 15°$. Sestrojíme tedy pravoúhlý trojúhelník DAE, v němž je $|AE| = 12$ cm, $|\sphericalangle AED| = 15°$ a pravý úhel při vrcholu A. Osa úsečky DE protne stranu AE v bodě B, body A, B, D doplníme na obdélník $ABCD$.



Obr. 13



Obr. 14

C - II - 1

Najděte nejmenší přirozené, tj. celé kladné číslo, jehož polovina je druhou mocninou přirozeného čísla a jehož třetina je třetí mocninou přirozeného čísla.

Řešení. Nechť má hledané číslo tvar $m = 2^p . 3^q . c$, kde jsou p, q čísla celá nezáporná a číslo c je přirozené a není dělitelné ani dvěma, ani třemi. Každé přirozené číslo se dá zřejmě právě jedním způsobem takto napsat. V našem případě jsou čísla p, q dokonce kladná, protože $\frac{m}{2} = 2^{p-1} . 3^q . c$, $\frac{m}{3} = 2^p . 3^{q-1} . c$ jsou přirozená. Protože $\frac{m}{2}$ je druhou mocninou přirozeného čísla, musí být čísla $p - 1$ a q sudá. Jelikož $\frac{m}{3}$ je třetí mocninou přirozeného čísla, musí být čísla p a $q - 1$ dělitelná třemi. Číslo c musí být z uvedených důvodů druhou i třetí mocninou. Aby bylo číslo m za těchto podmínek nejmenší, musí být $p = 3$, $q = 4$, $c = 1$, tedy $m = 2^3 . 3^4 = 648$.

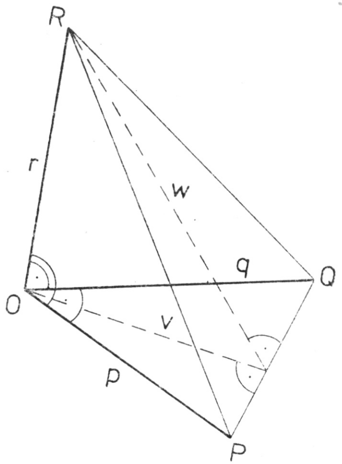
C - II - 2

Bodem S prochází pět rovin, z nichž žádné tři neprocházejí jednou přímkou. Na kolik částí rozdělí tyto roviny celý prostor? (Předpokládáme, že rovina dělí prostor na dvě části, dvě různoběžné roviny na čtyři části apod.)

Řešení. Tři roviny dělí prostor na osm částí, tzv. oktantů. Čtvrtá rovina protne každou z těchto tří rovin v přímce procházející bodem S. Tyto tři přímky rozdělí tuto čtvrtou rovinu na šest úhlů. Každý z nich rozdělí jeden z osmi oktantů na dvě části, přibude tedy šest částí. Proto dělí čtyři roviny daných vlastností celý prostor na 14 částí. Pátá rovina protne každou z předcházejících čtyř rovin v přímce, tyto čtyři přímky dělí pátou rovinu na osm částí. Proto dělí pět rovin prostor na $14 + 8 = 22$ částí.

C - II - 3a

Jsou dány navzájem různé body O, P, Q, R tak, že každé dvě z přímek OP, OQ, OR jsou navzájem kolmé. Délky úseček OP, OQ, OR označme p, q, r. Vyjádřete obsah trojúhelníku PQR pomocí p, q, r.

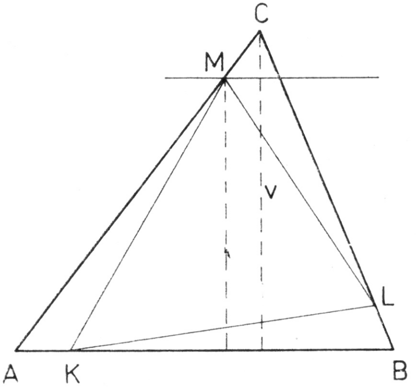


Obr. 15

Řešení. Obsah trojúhelníku OPQ je $\frac{1}{2}pq$ (obr. 15), proto se výška ke straně PQ rovná $\frac{pq}{\sqrt{p^2 + q^2}}$. Výška w v trojúhelníku PQR se proto rovná výrazu $w = \sqrt{r^2 + \frac{p^2q^2}{p^2 + q^2}}$, hledaný obsah je $\frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2}$. Mohli jsme též použít Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí délek jeho stran.

C - II - 3b

Je dán trojúhelník ABC a na jeho stranách AB, BC, CA jsou po řadě zvoleny body K, L, M tak, že $|AK| = \frac{1}{7}|AB|$,



Obr. 16

$|BL| = \frac{1}{7}|BC|$, $|CM| = \frac{1}{7}|CA|$. Vypočtěte poměr obsahů trojúhelníků KLM a ABC.

Řešení. Výška ke straně AK v trojúhelníku AKM se rovná $\frac{6}{7}v$, kde je v výška ke straně AB v trojúhelníku ABC (obr. 16). Označíme-li P obsah trojúhelníku ABC, rovná se obsah trojúhelníku AKM hodnotě $\frac{6P}{49}$. Tentýž výsledek dostaneme pro obsahy trojúhelníků BLK, CML. Obsah trojúhelníku KLM dostaneme z obsahu trojúhelníku ABC odečtením obsahů trojúhelníků AKM, BLK, CML, je tedy hledaný poměr $1 - 3 \cdot \frac{6}{49} = \frac{31}{49}$.