35. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Hvorecký (editor); Branislav Rovan (editor): 35. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1985/86. 27. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. pp. 60–75.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404812

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

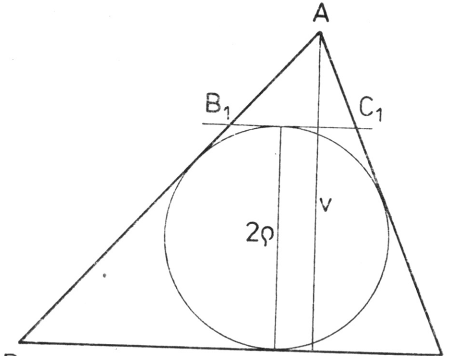
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Kategorie B

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

B - I - 1

Do trojúhelníku ABC se stranami a, b, c vepišme kružnici a sestrojme k ní další tečny rovnoběžné se stranami trojúhelníku. Každá z těchto tečen utíná od trojúhelníku ABC po jednom trojúhelníku. Do každého z těchto tří trojúhelníků vepišme kružnici. Vyjádřete pomocí a, b, c součet obsahů všech čtyř kruhů ohraničených uvažovanými kružnicemi.



Obr. 17

Řešení. Tečna kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC, která je rovnoběžná se stranou BC, protíná strany AB, AC v bodech B_1, C_1 (obr. 17). Trojúhelník AB_1C_1 je s trojúhelníkem ABC podobný, koeficient podobnosti je $\frac{v - 2\varrho}{v} =$ $= 1 - \frac{2\varrho}{v}$, kde je ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC a v je výška ke straně BC. Označme P obsah trojúhelníku ABC a s jeho poloviční obvod. Je $s.\varrho = P = \frac{1}{2}av$, odkud plyne $1 - \frac{2\varrho}{v} = 1 - \frac{a}{s}$. Obsah kruhu vepsaného trojúhelníku AB_1C_1 je tedy $Q\left(1 - \frac{a}{s}\right)^2$, kde Q je obsah kruhu vepsaného trojúhelníku ABC, tj. $Q = \pi\varrho^2$. Hledaný součet obsahů všech čtyř kruhů se tudíž rovná výrazu

$$Q + Q\left(1 - \frac{a}{s}\right)^2 + Q\left(1 - \frac{b}{s}\right)^2 + Q\left(1 - \frac{c}{s}\right)^2 =$$

$$= \pi \frac{P^2}{s^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2} =$$

$$= \pi \frac{(s - a)(s - b)(s - c)(a^2 + b^2 + c^2)}{s^3} =$$

$$= \pi \frac{(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^3}.$$

Přitom jsme použili Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku, podle kterého je $P^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$.

B - I - 2

Nechť F je zobrazení množiny všech přirozených čísel na množinu $\{-1, 1\}$, pro které platí $F(1) = -1$, $F(2k + 1) =$ $= -F(2k - 1)$, $F(2k) = F(k)$ pro každé přirozené číslo k.

Dokažte, že platí

a) $F(3k) = -F(k)$ pro všechna přirozená čísla k,

b) je-li $r \geqq 0$ a $1 \leqq s \leqq 2^r$, $s \neq 2^{r-1}$, pak je $F(s + 2^r) = F(s)$.

Řešení. Vztahy $F(1) = -1$, $F(2k + 1) = -F(2k - 1)$ je zobrazení F definováno na posloupnosti všech lichých přirozených čísel, a to tak, že střídavě nabývá hodnot -1 a 1, tedy $F(2k + 1) = (-1)^{k+1}$. Každé přirozené číslo se dá právě jedním způsobem napsat ve tvaru $n = 2^p(2q + 1)$, kde p, q jsou celá nezáporná čísla. Ze vztahu $F(2k) = F(k)$ pak plyne $F(n) = F(2q + 1) = (-1)^{q+1}$. Dále je $3n = 2^p(6q + 3) = 2^p[2(3q + 1) + 1]$, takže $F(3n) = (-1)^{3q+2} = (-1)^q = -F(n)$. Tím jsme dokázali první část tvrzení úlohy.

V druhé části úlohy rozlišíme tři případy:

1. $s = 2^r$, pak je $F(s + 2^r) = F(2^{r+1}) = -1 = F(s)$.
2. $s = 2^p$ a $p < r$. Pak je $F(s) = -1$, $F(s + 2^r) = F(2^p(2^{r-p} + 1)) = F(2^{r-p} + 1) = F(2.2^{r-p-1} + 1) = -(-1)^{2^{r-p-1}}$. Je-li $p = r - 1$, rovná se poslední výraz jedné, jinak hodnotě $-1 = F(s)$.
3. $s = 2^p(2q + 1)$, $q > 0$. Protože je $s < 2^r$, je $p < r - 1$. Je $F(s) = (-1)^{q+1}$, $F(s + 2^r) = F(2^p(2q + 1 + 2^{r-p})) = F(2(q + 2^{r-p-1}) + 1) = (-1)^{q+1+2^{r-p-1}} = (-1)^{q+1} = F(s)$.

Tím jsme dokázali i druhou část úlohy.

B - I - 3

Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran (tzv. pythagorejské trojúhelníky) s obvodem 990.

Řešení. Označme a, b délky odvěsen a c délku přepony trojúhelníku daných vlastností. Má tedy platit

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a + b + c = 990.$$

Dosadíme-li do první rovnice $c = 990 - a - b$, dostaneme po úpravě

$$(990 - a)(990 - b) = 990 . 495.$$

Zřejmě je $a < 495$, jinak by bylo $c > 495$ a $a + b + c > 990$. Stejně tak je $b < 495$. Proto je $495 < 990 - a < 990$, $495 < 990 - b < 990$. Máme tudíž součin $990 . 495 = 2 . 3^4 . 5^2 . 11^2$ rozložit v součin dvou přirozených čísel, z nichž je každé větší než 495 a menší než 990. Takové rozklady jsou pouze čtyři: $594 . 825$, $550 . 891$, $605 . 810$ a $675 . 726$. Přitom nepřihlížíme k pořadí činitelů. Buď je totiž jeden z činitelů dělitelný číslem 121, pak přicházejí v úvahu pouze čísla 605 a 726, nebo je každý z činitelů dělitelný číslem 11. Pak je zase buď jeden z činitelů dělitelný ještě číslem 25, tedy číslem 275, přicházejí v úvahu čísla 550 a 825, nebo je každý z činitelů dělitelný číslem $5 . 11 = 55$. V posledním případě nedostaneme žádné řešení.

Je-li $990 - a = 594$, $990 - b = 825$, je

$$a = 396,\ b = 165,\ c = 429.$$

Z dalších tří rozkladů dostaneme další tři řešení úlohy:

$$a = 440,\ b = 99,\ c = 451$$

$$a = 385,\ b = 180,\ c = 425$$

$$a = 315,\ b = 264,\ c = 411$$

B - I - 4

Nechť n je dané přirozené číslo. Určete počet všech po dvou neshodných trojúhelníků, jejichž všechny strany mají celočíselnou délku nejvýše rovnou n. Kolik je mezi nimi rovnoramenných trojúhelníků?

Řešení. Nejdříve určíme počet $s(n)$ trojúhelníků uvedených vlastností, jejichž největší strana má délku právě n. Označme strany takového trojúhelníku a, b, c tak, aby bylo $a \leqq b \leqq c = n$. Je-li n sudé, nabývá b hodnot $\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \ldots, n$. Pro a máme pak nutnou a postačující podmínku $a + b > n$, tj. $n + 1 - b \leqq a \leqq b$. Takže máme tyto možnosti:

$$c = n,\ b = \frac{n}{2} + 1,\ a = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \qquad \text{2 možnosti}$$

$$b = \frac{n}{2} + 2,\ a = \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2$$

4 možnosti

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$b = n,\ a = 1, 2, \ldots, n \qquad n \text{ možností}$$

Celkem jsme dostali $s(n) = 2 + 4 + \ldots + n = \dfrac{n(n+2)}{4}$ trojúhelníků. Z nich jsou rovnoramenné ty, pro které je $a = b$, těch je $\dfrac{n}{2}$, a pak ještě ty, pro které je $b = n$, těch je n. Přitom rovnostranný trojúhelník o stranách n, n, n je zahrnut v obou případech. Je tedy rovnoramenných trojúhelníků $r(n) = \dfrac{3n}{2} - 1$.

Je-li n liché, je $\dfrac{n+1}{2} \leqq b \leqq n$ a dostaneme tyto možnosti:

$c = n,\ b = \dfrac{n+1}{2},\ a = \dfrac{n+1}{2}$ 1 možnost

$b = \dfrac{n+3}{2},\ a = \dfrac{n-1}{2}, \dfrac{n+1}{2}, \dfrac{n+3}{2}$ 3 možnosti

... ...

$b = n,\ a = 1, 2, \ldots, n$ n možností

Celkem dostaneme při n lichém $s(n) = 1 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)^2}{4}$ trojúhelníků. Z nich je $r(n) = \dfrac{n+1}{2} + n - 1 = \dfrac{3n-1}{2}$ rovnoramenných. Naším úkolem je určit počet

$S(n)$ všech trojúhelníků s celočíselnými délkami stran nejvýše rovnými číslu n. Je tedy $S(n) = s(1) + s(2) + \ldots + s(n)$, mezi nimi je $R(n) = r(1) + \ldots + r(n)$ rovnoramenných. Je proto

$$S(n) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 2k) + \frac{1}{4}m,$$

kde m je počet lichých čísel v množině $\{1, 2, \ldots, n\}$, takže $m = \frac{n}{2}$ pro n sudé, $m = \frac{n+1}{2}$ pro n liché. Použitím vzorce

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

dostaneme:

$$n \text{ je sudé, pak je } S(n) = \frac{n(n+2)(2n+5)}{24},$$

$$n \text{ je liché, pak je } S(n) = \frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}.$$

Podobně dostaneme $R(n) = \frac{3n^2}{4}$ pro n sudé, $R(n) = \frac{3n^2+1}{4}$ pro n liché.

B - I - 5

Dokažte, že funkce

$$f(x) = \cos x \cos 2x + \cos Ax \cos 3Ax,$$

kde A je iracionální číslo, není periodická.

Řešení. Daná funkce f nabývá v bodě 0 hodnoty 2. Dokážeme, že v žádném jiném bodě hodnoty 2 nenabývá. Kdyby pro některé $x \neq 0$ platilo $2 = \cos x \cos 2x + \cos Ax \cos 3Ax$, muselo by platit $\cos x \cos 2x = 1$ a zároveň $\cos Ax \cos 3Ax = 1$, protože $\cos \alpha \cos \beta \leqq 1$ pro každé α, β. Pak by ale platilo $\cos x = \cos 2x = 1$ a současně $\cos Ax = \cos 3Ax = \pm 1$, tedy $x = 2k\pi$, pro k celé nenulové a zároveň $Ax = \pi m$, m celé, takže $A = \frac{m}{2k}$. To je však spor s předpokladem iracionality čísla A.

B - I - 6

Dokažte, že pro přirozená čísla $k < m < n$ platí nerovnost

$$\frac{m(m-1)\dots(m-k)}{n(n-1)\dots(n-k)} < \left(\frac{2m-k}{2n-k}\right)^{k+1}.$$

Řešení. Položíme-li $p = m - \frac{k}{2}$, $q = n - \frac{k}{2}$, můžeme dokazovanou nerovnost psát ve tvaru

$$\frac{\left(p+\frac{k}{2}\right)\left(p+\frac{k}{2}-1\right)\cdots\left(p-\frac{k}{2}+1\right)\left(p-\frac{k}{2}\right)}{\left(q+\frac{k}{2}\right)\left(q+\frac{k}{2}-1\right)\cdots\left(q-\frac{k}{2}+1\right)\left(q-\frac{k}{2}\right)} <$$

$$< \left(\frac{p}{q}\right)^{k+1}.$$

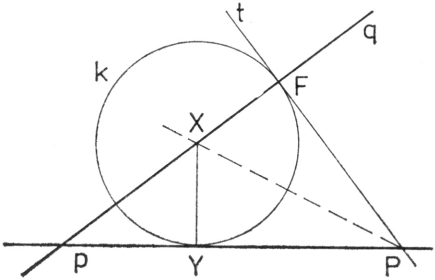
Výraz na levé straně nerovnosti je součinem $k+1$ činitelů tvaru $\frac{p-x}{q-x}$, kde $x = \frac{k}{2}, \frac{k}{2}-1, \ldots, -\frac{k}{2}$. Je-li k sudé, rovná se jeden z těchto činitelů zlomku $\frac{p}{q}$, ostatní sdružíme do dvojic $\frac{p-x}{q-x}, \frac{p+x}{q+x}$, kde $x = 1, \ldots, \frac{k}{2}$. Součin $\frac{p^2-x^2}{q^2-x^2}$ každých dvou činitelů v dvojici je kladný a menší než $\frac{p^2}{q^2}$; proto je výraz na levé straně menší než $\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{p^2}{q^2}\right)^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{k+1}$.

Je-li k liché, je levá strana dokazované nerovnosti součinem $\frac{k+1}{2}$ výrazů tvaru $\frac{p-x}{q-x} \cdot \frac{p+x}{q+x} = \frac{p^2-x^2}{q^2-x^2}$, $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{k}{2}$, každý z nich je kladný a menší než $\frac{p^2}{q^2}$. Tím je nerovnost dokázána i v případě lichého k.

B - S - 1

V rovině jsou dány přímky p, q a bod F, který leží na přímce q a neleží na přímce p. Sestrojte všechny body X na přímce q, pro které se kružnice se středem X a poloměrem $|XF|$ dotýká přímky p.

Řešení. Splňuje-li bod X podmínky úlohy (obr. 18), je tečna t kružnice $k(X, |XF|)$ v bodě F kolmá na přímku q. Nejsou-li přímky p, q kolmé, označíme P průsečík přímek p, t. Kružnice k se pak dotýká přímky p v bodě Y, pro který platí $|PY| = |PF|$. Takové body Y jsou na přímce p právě dva, ke každému z nich dostaneme právě jeden bod X, který je řešením úlohy. Je $X \in q$, $XY \perp p$. Je-li $p \perp q$, má úloha právě jedno řešení, je to střed úsečky FQ, kde $Q = p \cap q$.



Obr. 18

B - S - 2

Reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m$ splňují nerovnosti $0 < x_j < y_j \leqq 1$ pro $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Dokažte, že platí

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{x_j}{y_j} \leqq m - \sum_{j=1}^{m} (y_j - x_j).$$

Řešení. Podle předpokladu je $1 - y_j \geqq 0$, $1 - \frac{x_j}{y_j} > 0$, vynásobením dostaneme nerovnost $1 - \frac{x_j}{y_j} - y_j + x_j \geqq 0$, tedy $\frac{x_j}{y_j} \leqq 1 - (y_j - x_j)$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$. Sečteme-li všechny tyto nerovnosti, dostaneme nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

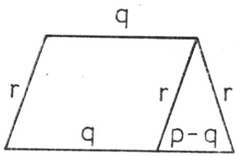
B - S - 3a

Číslo 8! (osm faktoriál) napište jako součin přirozených čísel x, y, z tak, aby platilo $x \leqq y \leqq z$ a číslo x bylo co největší.

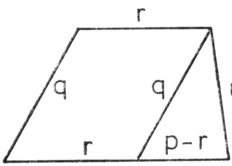
Řešení. Je $8! = 2^7 . 3^2 . 5 . 7$. Podle podmínek úlohy je $x^3 \leqq xyz = 8!$, tedy $x \leqq \sqrt[3]{8!} = 4 . \sqrt[3]{630} < 35$. Nemůže být $x = 34$ nebo $x = 33$, protože tato čísla nedělí číslo 8!. Položíme-li $x = 32$, je $yz = 1\,260$ a nutně $y = 35$, $z = 36$. Jediné řešení úlohy je $8! = 32 . 35 . 36$.

Jsou dána reálná čísla p, q, r, pro která platí $p > q > r > 0$. Najděte všechny lichoběžníky, jejichž právě jedna strana má délku p, právě jedna strana délku q a právě dvě strany mají délku r. Proveďte diskusi.

Řešení. Buď mají obě ramena lichoběžníku délku r, nebo má menší základna a jedno rameno délku r. V druhém případě má delší základna délku p a druhé rameno délku q, obráceně to není možné, neboť neexistuje trojúhelník o délkách stran r, $q - r$, p. V obou případech (obr. 19, 20) je nutnou a postačující podmínkou existence lichoběžníku podmínka $2r > p - q$. Je-li tato podmínka splněna, můžeme sestrojit trojúhelník o délkách stran r, $p - q$, r nebo r, $p - r$, q, oba tyto trojúhelníky doplníme rovnoběžníkem na lichoběžník s požadovanými délkami základen a ramen.



Obr. 19



Obr. 20

B - II - 1

Najděte všechny funkce g definované na množině všech bodů roviny, které mají tuto vlastnost: Jsou-li A, B, C vrcholy trojúhelníku v dané rovině, je $g(A) + g(B) + g(C) = 1$.

Řešení. Zvolme v uvažované rovině dva různé body X, Y. K nim můžeme vždy zvolit dva různé body A, B tak, že přímka AB neprochází žádným z bodů X, Y, takže body A, B, X jsou vrcholy trojúhelníku, rovněž tak body A, B, Y. Podle předpokladu pro každou hledanou funkci platí $g(A) + g(B) + g(X) = g(A) + g(B) + g(Y) = 1$, tedy $g(X) = g(Y)$. Z toho vyplývá, že každá funkce vyhovující úloze je konstantní. Protože $g(A) + g(B) + g(C) = 1$, vyhovuje úloze pouze funkce přiřazující každému bodu X hodnotu $\frac{1}{3}$, tj. $g(X) = \frac{1}{3}$ pro každý bod X roviny.

B - II - 2

Funkce f je definována na množině všech přirozených čísel, přičemž pro všechna přirozená čísla n platí

$$f(n+1) = \frac{(f(n))^2 + 4}{2f(n)}.$$

Jaká je nutná a postačující podmínka pro číslo $f(1)$, aby pro všechna $n \geqq 2$ platilo $f(n) > 2$?

Řešení. Je-li $f(n) > 0$, je podmínka $f(n+1) > 2$ ekvivalentní podmínce $(f(n)-2)^2 > 0$, tedy podmínce $f(n) \neq 2$. Je-li $f(n) < 0$, je $f(k) < 0$ pro všechna přirozená čísla k. Hledanou podmínkou pro $f(1)$ je tudíž podmínka $f(1) > 0 \wedge \wedge f(1) \neq 2$.

B - II - 3a

Dokažte, že neexistují celá kladná čísla x, y, z tak, aby platilo $x^x + y^y = z^z$.

Řešení (podle L. Kábrta, 2. roč. G Chrudim). Předpokládejme, že pro celá kladná čísla x, y, z platí $x^x + y^y = z^z$. Pak je zřejmě $x < z, y < z$ a

$$1 = \left(\frac{x}{z}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{z-x} + \left(\frac{y}{z}\right)^y \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{z-y},$$

tedy

$$z = \left(\frac{x}{z}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{z-x-1} + \left(\frac{y}{z}\right)^y \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{z-y-1}.$$

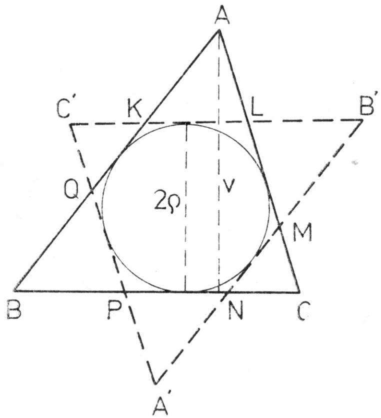
Avšak $z - x - 1 \geqq 0$, $z - y - 1 \geqq 0$, $x \geqq 1$, $y \geqq 1$, $\frac{x}{z} < 1$, $\frac{y}{z} < 1$, tedy je $\left(\frac{x}{z}\right)^x < 1$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{z-y-1} \leqq 1$, $\left(\frac{y}{z}\right)^y < 1, \left(\frac{1}{z}\right)^{z-y-1} \leqq 1$. Odtud plyne $z < 1 + 1 = 2$, tedy $z = 1$. Pak však neexistují celá kladná čísla x, y menší než z. To je spor, tím je tvrzení úlohy dokázáno.

B - II - 3b

K danému trojúhelníku T o délkách stran a, b, c sestrojíme trojúhelník T' souměrně sdružený podle středu kružnice vepsané trojúhelníku T. Dokažte, že obvod p šestiúhelníku, který je průnikem trojúhelníků T, T', splňuje nerovnost

$$p \leqq \frac{2(ab + bc + ca)}{a + b + c}.$$

Řešení. Označme A, B, C vrcholy trojúhelníku T, v jeho výšku ke straně BC a ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníkům T, T' (obr. 21). Průsečíky stran AB, AC s obrazem $C'B'$ strany CB v uvažované středové souměrnosti označíme K, L, podobně dostaneme body M, N a P, Q. Z podobnosti trojúhelníků AKL, ABC dostaneme obdobně jako v úloze



Obr. 21

B-I-1 vztah $|KL| = |BC|\left(1 - \frac{2\varrho}{v}\right) = |BC|\left(1 - \frac{a}{s}\right) =$

$= \frac{a(b + c - a)}{a + b + c}$, podobně pro $|MN|$, $|PQ|$. Pro obvod p šestiúhelníku $KLMNPQ$ je $p = 2|KL| + 2|MN| + 2|PQ|$, protože $|KL| = |PN|$, $|MN| = |KQ|$, $|QP| = |LM|$, tedy

$$p = 2 \cdot \frac{a(b + c - a) + b(a + c - b) + c(a + b - c)}{a + b + c} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2}{a + b + c}.$$

Máme tudíž dokázat nerovnost

$$2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2 \leqq ab + bc + ca,$$

která je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \leqq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a^2),$$

jež zřejmě platí. Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když je $a = b = c$, tedy když je trojúhelník T rovnostranný.