35. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Hvorecký (editor); Branislav Rovan (editor): 35. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1985/86. 27. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. pp. 76–123.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404813

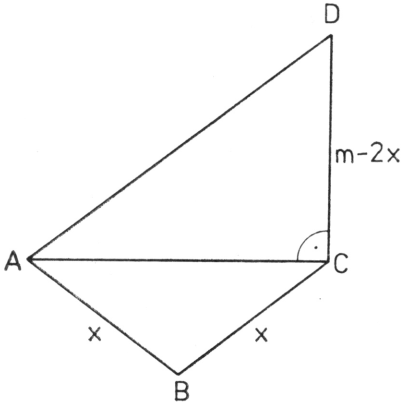
Kategorie A

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

A - I - 1

V rovině jsou dány dva různé body A, C. Pro reálné číslo $m > \dfrac{2|AC|}{\sqrt{3}}$ sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s maximálním obsahem, pro který platí $|AB| + |BC| + |CD| = m$.

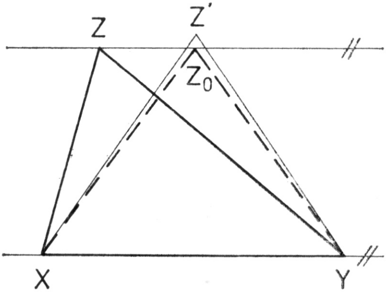
Řešení. Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný čtyřúhelník s největším obsahem. Pak je trojúhelník ACD pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C a trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AC (obr. 22). Jinak bychom mohli



Obr. 22

obsah trojúhelníku ACD, resp. obsah trojúhelníku ABC zvětšit, aniž bychom změnili délku strany CD, resp. součet $|AB| + |BC| = m - |CD|$.

První tvrzení je zřejmé; druhé dostaneme např. pomocí takovéto úvahy: Víme, že pro dané dva body X, Y mají všechny trojúhelníky XYZ, jejichž vrchol Z leží na rovnoběžce s přímkou XY, stejný obsah. Ze všech takových trojúhelníků má rovnoramenný trojúhelník XYZ_0 ($|XZ_0| = |YZ_0|$) nejmenší obvod (obr. 23). Sestrojíme-li tedy k danému nerovnoramennému trojúhelníku XYZ rovnoramenný trojúhelník XYZ_0 se stejným obsahem a k němu trojúhelník XYZ', jehož obvod je stejný jako obvod daného trojúhelníku XYZ (obr. 23), je obsah trojúhelníku XYZ' větší než obsah trojúhelníku XYZ.



Obr. 23

Najdeme nyní mezi čtyřúhelníky $ABCD$, pro něž platí $|AB| + |BC| + |CD| = m$, $|AB| = |BC| = x$ a $AC \perp CD$, takový, jehož obsah $P(x)$ je největší.

Označme $|AC| = 2u$, pak je

$$P(x) = u(m - 2x) + u\sqrt{x^2 - u^2} =$$
$$= um + u\left(\sqrt{x^2 - u^2} - 2x\right).$$

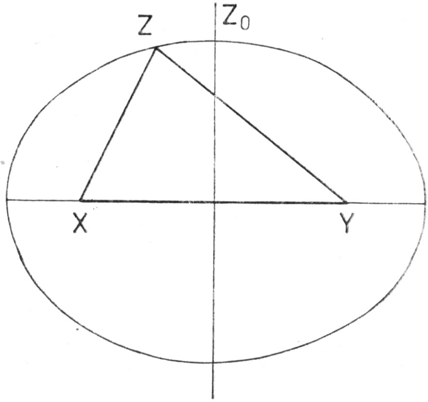
Protože

$$P'(x) = u\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - u^2}} - 2\right),$$

vidíme, že pro $x > 2\sqrt{x^2 - u^2}$, tj. pro $x < \frac{2}{\sqrt{3}}\,u = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$ funkce P roste a pro $x > \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$ klesá. Čtyřúhelník $ABCD$ bude mít tedy největší obsah, právě když $|AB| = |BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$, $|CD| = m - \frac{2}{\sqrt{3}}|AC|$. Odtud již snadno plyne konstrukce.

Poznámky. Tvrzení, že rovnoramenný trojúhelník má ze všech trojúhelníků XYZ s danou stranou XY a stejným obvodem největší obsah, plyne také ze základní vlastnosti elipsy: Body, které mají od bodů X, Y daný součet vzdáleností, leží na elipse s ohnisky X a Y (obr. 24). Přitom největší vzdálenost od hlavní osy elipsy má právě její vedlejší vrchol Z_0.

Uvedené tvrzení lze dokázat i algebraicky, použijeme-li Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku. Má-li trojúhelník XYZ délky stran x, y, z, kde z je pevné a $x + y = k$, platí pro jeho obsah P



Obr. 24

$$\begin{aligned}16P^2 &= (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) = \\ &= ((x+y)^2 - z^2)(z^2 - (x-y)^2) = \\ &= (k^2 - z^2)(z^2 - (x-y)^2) \leqq \\ &\leqq (k^2 - z^2)z^2\end{aligned}$$

s rovností, právě když $x = y$.

Maximum funkce P můžeme najít i bez derivování. Protože pro každé x je $\sqrt{x^2 - u^2} - 2x < 0$, hledáme nejmenší kladné číslo A takové, aby pro každé $x \in \left(u, \frac{m}{2}\right)$ platilo

$$\frac{P(x) - um}{u} = \sqrt{x^2 - u^2} - 2x \leqq -A$$

a přitom pro nějaké $x \in \left(u, \frac{m}{2}\right)$ nastala rovnost. Uvedená nerovnost je ekvivalentní kvadratické nerovnosti

$$3x^2 - 4Ax + A^2 + u^2 \geqq 0,$$

která má diskriminant $D = 16A^2 - 12(A^2 + u^2) = 4(A^2 - - 3u^2)$. Vidíme, že uvedené požadavky splňuje číslo $A = = \sqrt{3}\,u$ a rovnost nastane právě pro $x = \dfrac{2A}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,u = \dfrac{|AC|}{\sqrt{3}}$.

Podmínka $m > 2\dfrac{|AC|}{\sqrt{3}}$ je nutná: funkce P je v intervalu $\left(0, \dfrac{|AC|}{\sqrt{3}}\right)$ rostoucí, takže pro $\dfrac{m}{2} < \dfrac{|AC|}{\sqrt{3}}$ nemá v intervalu $\left(0, \dfrac{m}{2}\right)$ maximum.

A - I - 2

Je dáno přirozené číslo n. Určete počet všech množin $\mathsf{M} \subset \{1, 2, \ldots, n\} \times \{-1, 1\}$, pro něž existuje taková n-tice reálných čísel $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, že

$$[i, j] \in \mathsf{M} \Leftrightarrow ja_i > 0$$

platí pro všechny dvojice $[i, j] \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{-1, 1\}$.

Řešení. Označme $\boxed{\mathsf{M}}$ množinu všech množin M vyhovujících podmínce úlohy. Je-li $\mathsf{M} \in \boxed{\mathsf{M}}$ a $[a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathsf{R}^n$ odpovídající n-tice, pak pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nastane právě jedna ze tří možností:

$$a_i > 0 \Leftrightarrow [i, 1] \in \mathsf{M} \text{ a } [i, -1] \notin \mathsf{M}$$

$$a_i < 0 \Leftrightarrow [i, 1] \notin \mathsf{M} \text{ a } [i, -1] \in \mathsf{M}$$

$$a_i = 0 \Leftrightarrow [i, 1] \notin \mathsf{M} \text{ a } [i, -1] \notin \mathsf{M}$$

Přiřaďme každé množině $\mathsf{M} \in \boxed{\mathsf{M}}$ n-tici

$$z(\mathsf{M}) = [\text{sign } a_1, \text{sign } a_2, \ldots, \text{sing } a_n] \in \{-1, 0, 1\}^n,$$

kde

$$\text{sign } a = \begin{cases} -1 & \text{pro } a < 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ 1 & \text{pro } a > 0. \end{cases}$$

Zobrazení z je zřejmě prosté a obrazem množiny $\boxed{\mathsf{M}}$ je množina všech uspořádaných n-tic z množiny $\{-1, 0, 1\}$: Je-li $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \{-1, 0, 1\}^n$, je

$$\mathsf{M} = \{[i, x_i]\colon i \in \{1, 2, \ldots, n\}, x_i \neq 0\} \in \boxed{\mathsf{M}}.$$

Zobrazení $z\colon \boxed{\mathsf{M}} \to \{-1, 0, 1\}^n$ je tedy vzájemně jednoznačné. A protože množina $\{-1, 0, 1\}^n$ má 3^n prvků, je počet všech množin M, jež splňují podmínku úlohy, 3^n.

A - I - 3

Je dáno číslo $\alpha \in (0, \pi)$. Najděte reálné číslo r s touto vlastností: Je-li A množina bodů libovolného rovinného úhlu velikosti α s vrcholem v počátku kartézské soustavy souřadnic, pak pro každý bod $X \in \mathsf{A}$ existuje bod $M \in \mathsf{A}$ s celočíselnými souřadnicemi, který má od bodu X vzdálenost nejvýše r.

Řešení. Každý bod roviny má od nejbližšího mřížového bodu vzdálenost nejvýše $\frac{\sqrt{2}}{2}$, protože množina všech kruhů se středy v mřížových bodech a poloměrem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pokrývá rovinu. Je-li $X \in \mathsf{A}$, nemusí ovšem tento mřížový bod ležet v úhlu A.

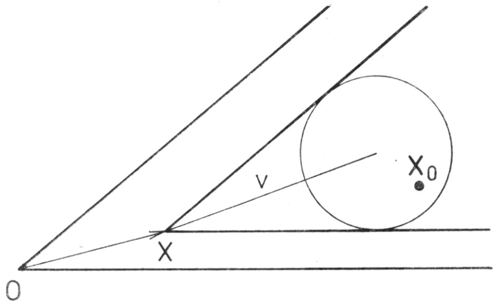
Označme K ten kruh o poloměru $\frac{\sqrt{2}}{2}$, který leží celý v množině A a je nejblíže počátku soustavy souřadnic. Pro vzdálenost v jeho středu S od počátku platí

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2v},$$

takže

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos\alpha}}.$$

Je-li nyní X libovolný bod množiny A, označme A_X množinu bodů, která vznikne z úhlu A posunutím o vektor OX (obr. 25). V kruhu K_X o poloměru $\frac{\sqrt{2}}{2}$ vepsaném úhlu A_X leží aspoň jeden mřížový bod X_0, pro který platí



Obr. 25

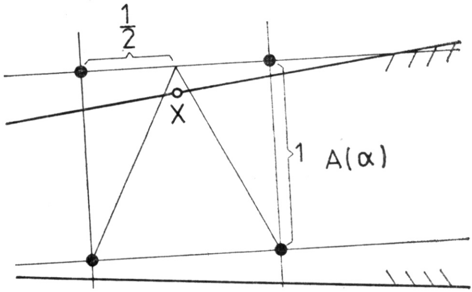
$$|XX_0| \leqq v + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stačí tedy položit $r = v + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos\alpha}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Úlohu najít nejmenší takové r v závislosti na daném čísle α vyřešil student 4. ročníku gymnázia v Kroměříži Radek Adamec. Jeho řešení se všemi důkazy zabíralo ovšem 23 strany čistopisu. Uvádíme ho proto v zestručněné a poněkud upravené formě.

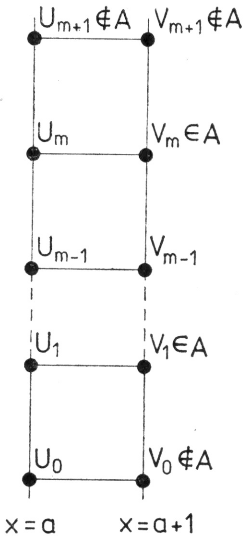
Jiné řešení (podle R. Adamce). Pro dané $\alpha \in (0, \pi)$ najdeme nejmenší číslo r takové, že libovolný rovinný úhel A velikosti α s vrcholem v počátku O je pokryt kruhy o poloměru r se středy v mřížových bodech ležících v A. Zřejmě se můžeme omezit jen na úhly, *jejichž osa leží v 1. oktantu* (tj. v té části roviny, kde platí $x \geqq y \geqq 0$).

Zřejmě pro žádné α nemůže být $r < \frac{\sqrt{5}}{2}$, protože vždycky najdeme úhel $\mathsf{A}(\alpha)$ s vrcholem v počátku tak, aby existoval bod $X \in \mathsf{A}(\alpha)$, jehož vzdálenost od nejbližšího mřížového bodu v $\mathsf{A}(\alpha)$ je libovolně blízká $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (obr. 26). Zároveň si uvědomme, že v každém úhlu A pro dostatečně velké x_0 najdeme mřížové body na všech pořadnicích $x = a$, kde $a \geqq x_0$ je celé



Obr. 26

(stačí vzít x_0 takové, aby délka úsečky $\{(x, y) \in \mathsf{A}\colon x = x_0\}$ byla aspoň 1). *Pro tuto část úhlu* A *pak platí, že ji lze pokrýt kruhy o poloměru* $\frac{\sqrt{5}}{2}$ *se středy v mřížových bodech ležících v* A. Skutečně, vezměme tu část úhlu A, která je omezena dvěma takovými sousedními celočíselnými pořadnicemi (obr. 27), přičemž $V_1, V_2, \ldots, V_m$ $(m \geqq 1)$ jsou všechny mřížové body pořadnice $x = a + 1$ ležící v A. Čtverce $U_i V_i V_{i+1} U_{i+1}$ pro $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ pokryjeme kruhy se středy $V_1, \ldots, V_m$. Vzhledem k předpokladu, že osa



Obr. 27

úhlu A leží v 1. oktantu, vidíme, že tu část čtverce $U_m V_m V_{m+1} U_{m+1}$, která leží v A, pokryjeme buď z bodů U_m, V_m (pokud $U_m \in$ A), nebo z bodu V_m (když $U_m \notin$ A). Tu část čtverce $U_0 V_0 V_1 U_1$, která může ležet v A, vyšetříme podobně: Pokud příslušné rameno úhlu A svírá s osou x záporný (orientovaný) úhel, je situace stejná jako v předchozím případě; v případě kladného úhlu pokryjeme čtverec $U_0 V_0 V_1 U_1$ z bodů U_0, V_1 (pokud $U_0 \in$ A), anebo z bodů U_1, V_1 (když $U_0 \notin$ A — protože osa úhlu A leží v 1. oktantu, musí být $U_1 \in$ A).

Z právě dokázaného tvrzení plyne, že pro úhly $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$

je hledané číslo $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Budeme teď hledat poloměr r pro taková čísla $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, jejichž kotangens je přirozené číslo, $\cotg \alpha = n > 1$. Svírá-li jedno z ramen takového úhlu A s osou x dostatečně malý kladný úhel, je $(n, 1)$ mřížový bod, který je v A nejblíže počátku. Je to jediný mřížový bod $(\neq O)$, který leží v A ve vzdálenosti nejvýše $\sqrt{n^2 + 1}$ od počátku. Ukážeme, že takovýto případ je jaksi nejméně příznivý, tj. že *v libovolném úhlu* $\mathsf{A}(\alpha)$ *s vrcholem v počátku, kde* $\alpha = \operatorname{arccotg} n$, *leží aspoň jeden mřížový bod* $(\neq O)$ *ve vzdálenosti nejvýše* $s = \sqrt{n^2 + 1}$ *od počátku.* K tomu nám stačí dokázat, že mezi všemi polopřímkami v 1. oktantu s počátkem O a procházejícími nějakým dalším mřížovým bodem v kruhu $\mathsf{K} = (O, s)$ nejsou dvě sousední, jež by svíraly úhel větší než α.

Pro malá n skutečně snadno najdeme systém polopřímek takový, že libovolné dvě sousední polopřímky svírají úhel nejvýše α. Uvažujme např. polopřímky se směrnicemi

$$0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1, \qquad (1)$$

kde $(k, k-1) \in \mathsf{K}$, $(k+1, k) \notin \mathsf{K}$. Pro tangenty úhlů sousedních polopřímek pak platí

$$a_i = \frac{\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}}{1 + \frac{1}{i(i+1)}} = \frac{1}{i(i+1) + 1},$$

$$b_i = \frac{\dfrac{i}{i+1} - \dfrac{i-1}{i}}{1 + \dfrac{i-1}{i+1}} = \frac{1}{2i^2}$$

a je

$$a_i \leqq \frac{1}{7} \text{ pro } 2 \leqq i \leqq n - 1, \quad b_i \leqq \frac{1}{8} \text{ pro } 2 \leqq i \leqq k - 1.$$

Dále stačí uvažovat k takové, že současně platí

$$\frac{1 - \dfrac{k-1}{k}}{1 + \dfrac{k-1}{k}} = \frac{1}{2k-1} \leqq \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{n}$$

a přitom $(k, k-1) \in \mathrm{K}$, tj.

$$(k-1)^2 + k^2 \leqq n^2 + 1 = s^2.$$

Obě nerovnosti jsou ekvivalentní nerovnostem

$$n^2 \leqq (2k-1)^2 \leqq 2n^2 + 1,$$

stačí proto vzít $k = \dfrac{n+1}{2}$ pro liché n a $k = \dfrac{n}{2} + 1$ pro sudé $n \geqq 2$.

Směrnice (1) dávají tedy hledaný systém polopřímek pro $n \leqq 7$. Přidáme-li k nim ještě směrnice $\frac{2}{5}$ a $\frac{3}{5}$ $\left(\frac{1}{3} < \frac{2}{5} <\right.$

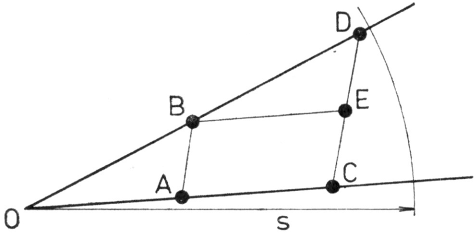
$< \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}\Big)$, zjistíme, že takovýto systém polopřímek vyhovuje pro $6 \leqq n \leqq 12$ (to se nám bude ještě hodit).

Obecný důkaz uvedeného tvrzení, který teď následuje, je klíčem k řešení celé úlohy. Připomeňme zde ještě jedno tvrzení (známé jako Pickův vzorec), které budeme v důkazu potřebovat:

Obsahuje-li mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech h mřížových bodů na hranici a u mřížových bodů uvnitř, je jeho obsah

$$S = \frac{h}{2} + u - 1.$$

Uvažujme tedy dvě polopřímky OA, OB v 1. oktantu, které procházejí mřížovými body A, B v kruhu K, přičemž uvnitř úhlu AOB žádný mřížový bod z kruhu K neleží. Předpokládejme rovnou, že uvnitř úseček OA, OB již žádné mřížové body neleží. Kdyby navíc v kruhu K ležely i oba mřížové body C, D, které dostaneme z bodů A, B stejnolehlostí se středem O a koeficientem 2 (obr. 28), ležel by v kruhu K



Obr. 28

a uvnitř úhlu AOB také střed E úsečky CD, který je rovněž mřížovým bodem. Můžeme tedy předpokládat, že např. polopřímka OA obsahuje v kruhu K kromě počátku právě jeden mřížový bod A a polopřímka OB právě m mřížových bodů (obr. 29), takže pro délky $d = |OB|$ a $|OA|$ platí

$$md \leqq s < (m + 1)d, \quad 2|OA| > s. \tag{2}$$

Nyní máme dokázat, že je $\varphi = |\sphericalangle AOB| \leqq \alpha$, neboli

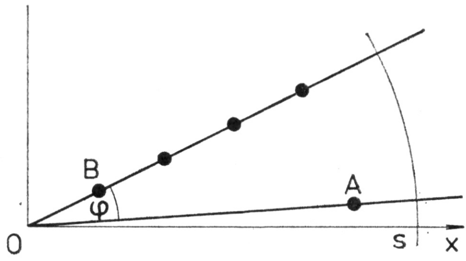
$$\sin \varphi \leqq \sin \alpha = \frac{1}{s} \, .$$

Pro obsah trojúhelníku AOB z Pickova vzorce plyne

$$S(AOB) = \frac{1}{2} d|OA| \sin \varphi = \frac{1}{2} \, ,$$

takže

$$\sin \varphi = \frac{1}{d|OA|} \, .$$



Obr. 29

Použijeme-li odhadů (2), dostaneme nerovnost

$$\sin \varphi < \frac{2(m+1)}{s^2},$$

takže stačí dokázat, že $2(m+1) \leqq s$, neboli

$$m \leqq \frac{s}{2} - 1. \tag{3}$$

Z první nerovnosti v (2) máme pro m odhad $m \leqq \frac{s}{d}$, přičemž d jako vzdálenost dvou mřížových bodů může nabývat jen diskrétních hodnot $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \ldots$ Hodnoty $d = 1$, $d = \sqrt{2}$, které odpovídají ose x a ose 1. kvadrantu, nás už nemusejí zajímat, protože pro ně jsme našli směrnice $\frac{1}{n}$ a $\frac{k-1}{k}$ polopřímek, které s nimi svírají úhel nejvýše α.

Můžeme tedy dále předpokládat, že $d \geqq \sqrt{5}$, takže $m \leqq \frac{s}{\sqrt{5}}$, a pro platnost (3) nám stačí ověřit, zda je

$$\left[\frac{s}{\sqrt{5}}\right] \leqq \frac{s}{2} - 1. \tag{4}$$

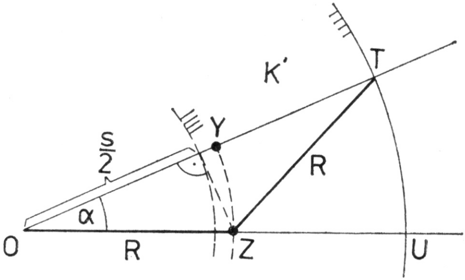
Nerovnost

$$\frac{s}{\sqrt{5}} \leqq \frac{s}{2} - 1$$

platí, právě když $n^2 + 1 \geqq 20(9 + 4\sqrt{5})$, tj. pro $n \geqq 19$. Nicméně nerovnost (4) platí i pro menší hodnoty n, jak zjistíme výpočtem.

n	$\left[\frac{s}{\sqrt{5}}\right] = \left[\sqrt{\frac{n^2+1}{5}}\right] \leqq$	$\frac{n}{2} - 1 <$	$\frac{s}{2} - 1$
18	$[\sqrt{65}] = 8$	8	
17	$[\sqrt{58}] = 7$	7,5	
16	$[\sqrt{51{,}4}] = 7$	7	
15	$[\sqrt{45{,}2}] = 6$	6,5	
14	$[\sqrt{39{,}4}] = 6$	6	
13	$[\sqrt{34}] = 5$	5,5	

Vzhledem k tomu, že pro $n \leqq 12$ jsme tvrzení již dokázali, ukončili jsme tabulku hodnot. Snadno zjistíte, že nerovnost (4) je splněna i pro hodnoty $n \in \{4, 6, 8, 10, 11, 12\}$. Nikoli však pro $n = 9$. Systém polopřímek nalezený pro $6 \leqq n \leqq 12$ je tedy důležitý zejména pro $n = 9$. Z dokázaného tvrzení navíc plyne, že v každém úhlu A velikosti α existuje mřížový bod ležící zároveň v mezikruží $\mathrm{K}' = \left\{X \in \mathrm{R}^2 : \frac{s}{2} < |OX| \leqq s\right\}$ (protože stejnolehlost se středem v počátku a celočíselným koeficientem zachovává mřížové body). Vidíme tedy, že prakticky celou část úhlu A, která leží v kruhu K, můžeme pokrýt dvěma kruhy se středy v počátku a v nalezeném mřížovém bodě ležícím v K′, přičemž pro jejich poloměr R platí (obr. 30):



Obr. 30

$$R = \frac{s}{2\cos\alpha} = \frac{s}{2\dfrac{n}{s}} = \frac{n^2+1}{2n}.$$

Vše bude v pořádku, bude-li uvedený mřížový bod ležet v útvaru $UTYZ \subset K'$, který má průměr R*). To ale plyne z toho, že v mezikruží $\{X \in \mathrm{R}^2 : \frac{s}{2} < |OX| < R\}$ žádný mřížový bod neleží. Kdyby tam totiž nějaký mřížový bod (p, q) ležel, bylo by pro p, q celá

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{n^2+1}{4} < p^2 + q^2 < R^2 = \frac{(n^2+1)^2}{4n^2} =$$
$$= \frac{n^2+1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2}.$$

*) *Průměr* rovinného útvaru je nejmenší číslo d takové, že vzdálenost libovolných dvou jeho bodů je nejvýše d. Z trojúhelníkové nerovnosti snadno plyne, že je-li d průměr dané uzavřené množiny, pak na její hranici existují dva body ve vzdálenosti d a v nich opěrné přímky kolmé na spojnici obou bodů.

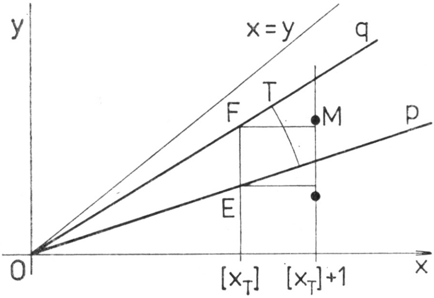
Pro každé n je však $n^2 \equiv 0$ nebo $n^2 \equiv 1 \pmod 4$ a $\frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2} \leqq \frac{1}{2}$, takže mezi čísly $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ a R^2 žádné celé číslo ležet nemůže.

Spojením obou dosavadních výsledků teď už snadno dostaneme, že *každý úhel* A *s vrcholem v počátku a velikosti* α, *kde* $\operatorname{cotg} \alpha = n \geqq 2$, *můžeme pokrýt kruhy o poloměru* $R = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right)$ *se středy v mřížových bodech ležících v* A.

Při důkazu se omezíme jen na úhly A, které leží celé v 1. oktantu, protože úhel A, který obsahuje přímku $x = y$ nebo osu x, umíme podle prvního tvrzení pokrýt kruhy o poloměru $\frac{\sqrt{5}}{2} < R$.

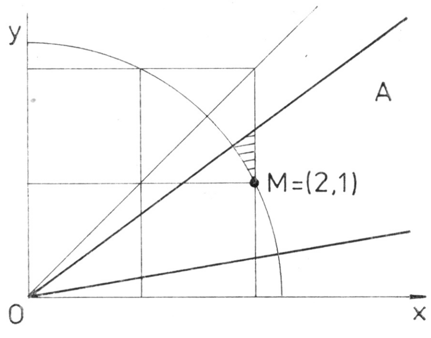
Nechť T je ten z bodů úhlu A, který leží na kružnici (O, s) a má od osy x největší vzdálenost. Jeho vzdálenost od druhého ramene úhlu A je aspoň 1. Leží-li T na celočíselné pořadnici, není již co dokazovat (jak A $\cap$ K, tak i A $\cap$ $\{(x, y): x \geqq x_T\}$ pokryjeme kruhy o poloměru $R > \frac{\sqrt{5}}{2}$). Není-li x_T celé číslo, označme E, F průsečíky pořadnice $x = [x_T]$ s rameny p, q úhlu A (obr. 31). Pokud $|EF| \geqq 1$, jsme hotovi, protože úsečka EF obsahuje mřížový bod. Pokud EF neobsahuje žádný mřížový bod, leží v úhlu A mřížový bod M se souřadnicí $x_M = [x_T] + 1$, přičemž

$$y_M - 1 < y_E < y_F < y_M.$$



Obr. 31

Část úhlu $\{(x, y) \in \mathsf{A}\colon [x_T] \leqq x \leqq [x_T] + 1\}$ můžeme tedy pokrýt kruhem se středem M a poloměrem $\sqrt{2}$. Poslední úvaha nevyhovuje pro $n = 2$, protože v tomto případě je $R = \dfrac{5}{4} < \sqrt{2}$. Mřížový bod $M = (2, 1)$ je však obsažen v libovolném úhlu A velikosti $\alpha = \operatorname{arccotg} 2$ ležícím v 1. oktantu (obr. 32). V tomto případě tu část úhlu A, která zůstala zatím

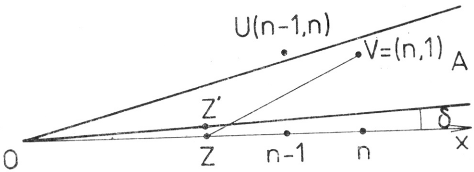


Obr. 32

nepokryta, pokryjeme kruhem se středem M a poloměrem

$$1 < R = \frac{5}{4}.$$

Naše úloha bude vyřešena, jakmile ukážeme, že nalezené R je pro dané α ($\operatorname{cotg} \alpha = n$) skutečně nejmenší. To však plyne z obr. 33, kde úhel A vznikne otočením úhlu, jehož ramena tvoří osa x a polopřímka OV, o dostatečně malý úhel δ. Je-li Z bod na ose x takový, že $|OZ| = |ZV| = R = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right)$, vidíme, že pro dané $\alpha = \operatorname{arccotg} n$ umíme sestrojit takový úhel A a v něm bod Z', jehož vzdálenost od nejbližšího mřížového bodu V bude libovolně blízká číslu R.



Obr. 33

Je-li konečně $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ takové, že $n - 1 < \operatorname{cotg} \alpha \leqq n$, tj. $\operatorname{arccotg} n \leqq \alpha < \operatorname{arccotg} (n - 1)$, vidíme, že každý úhel A velikosti α s vrcholem v počátku můžeme pokrýt kruhy o poloměru $R = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right)$ a se středy v mřížových bodech ležících v A. Je-li totiž $X \in$ A, sestrojíme libovolný úhel A′ $\subset$ A velikosti $\operatorname{arccotg} n$ s vrcholem v počátku takový, že $X \in$ A′. V něm (a tedy i v A) existuje mřížový bod, jehož vzdálenost od X je nejvýše R.

Z obr. 33 je zároveň patrné, že pro takové α je uvedené $r = R$ nejmenší: Je-li A úhel velikosti α s ramenem x a $V \in$ A, pak není $U \in$ A; stačí tedy volit úhel δ tak malý, aby bod V byl mřížovým bodem s nejmenší vzdáleností od počátku.

Závěr. Pro každý bod X rovinného úhlu A velikosti α s vrcholem v počátku existuje mřížový bod $M \in$ A takový, že $|MX| \leqq r(\alpha)$, kde

$$r(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ pro } \alpha \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \pi \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left([\operatorname{cotg} \alpha] + \frac{1}{[\operatorname{cotg} \alpha]}\right) \text{ pro } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right);$$

přitom pro každé $r < r(\alpha)$ existuje úhel A velikosti α s vrcholem v počátku a bod $X \in$ A tak, že pro každý mřížový bod $M \in$ A je $|MX| > r$.

Poznámka. Zřejmě je $r(\alpha) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ i pro $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, $r(2\pi) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Funkce $[x]$ je tzv. horní celá část čísla x, tj. nejmenší celé číslo větší nebo rovné x.

A - I - 4

Najděte nejmenší přirozené n takové, že existují dva neshodné pythagorejské trojúhelníky s přeponou délky n. (Trojúhelník se nazývá pythagorejský, je-li pravoúhlý a délky jeho stran jsou vyjádřeny celými čísly.)

Řešení. Najdeme nejdříve všechny trojice přirozených čísel x, y, z takové, že

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

To je klasická úloha, jejíž podrobné řešení najdete např. v ročence XXVI. MO, úloha A-P-1.

Všechna řešení rovnice (1) mají tvar

$$x = k(a^2 - b^2), y = 2kab, z = k(a^2 + b^2), \tag{2}$$

kde a, b jsou nesoudělná přirozená čísla taková, že $a > b$, $2|ab$, a k je libovolné přirozené číslo. Každé číslo z, pro něž má rovnice (1) dvě různá řešení (řešení lišící se pořadím x a y nepovažujeme za různá), se dá vyjádřit dvěma způsoby ve tvaru (2),

$$z = k(a^2 + b^2) = l(c^2 + d^2),$$

a je tedy společným násobkem čísel $a^2 + b^2$, $c^2 + d^2$, kde čísla a, b i c, d jsou nesoudělná a součiny ab, cd sudé. Nejmenší přirozené číslo n splňující podmínky úlohy tak najdeme mezi nejmenšími společnými násobky čísel $1^2 + 2^2 = 5$, $2^2 + 3^2 = 13$, $1^2 + 4^2 = 17$, $3^2 + 4^2 = 25$, $2^2 + 5^2 = 29$, ... Vidíme, že $n = 25$ a příslušné pythagorejské trojúhelníky mají délky stran 15, 20, 25 a 7, 24, 25.

A - I - 5

Je dán mnohočlen

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

který nabývá jen nezáporných hodnot. Označme

$$Q(x) = a_0x^n + 2a_1x^{n-1} + \ldots + na_{n-1}x + (n + 1)a_n.$$

Je-li $P(1) = 0$, pak je také $Q(1) = 0$. Dokažte.

Řešení. Je-li $P(1) = 0$, má nezáporný mnohočlen P v bodě 1 lokální minimum, takže $P'(1) = 0$, tj.

$$na_0 + (n - 1)a_1 + \ldots + a_{n-1} = 0.$$

Je tedy

$$Q(1) = a_0 + 2a_1 + \ldots + na_{n-1} + (n + 1)a_n =$$

$$= (n + 1)(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) -$$

$$- (na_0 + (n - 1)a_1 + \ldots + a_{n-1}) =$$

$$= (n + 1)\, P(1) - P'(1) = 0.$$

Poznámka. Řešení s použitím derivace je elegantní a krátké. Můžeme ale uvažovat i takto: Je-li $P(1) = 0$, tj.

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0,$$

je

$$P(x) = P(x) - P(1) =$$

$$= a_0(x^n - 1) + a_1(x^{n-1} - 1) + \ldots + a_{n-1}(x - 1) =$$

$$= (x - 1)(a_0(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) +$$

$$+ a_1(x^{n-2} + \ldots + 1) + \ldots + a_{n-1}) =$$

$$= (x - 1)\, R(x).$$

Protože $P(x) \geqq 0$ pro všechna x, je $R(x) \geqq 0$ pro $x > 1$ a $R(x) \leqq 0$ pro $x < 1$. Je tudíž $R(1) = 0$, tj.

$$na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + a_{n-1} = 0.$$

A - I - 6

Pro vnitřní úhly trojúhelníku ABC platí

$$\sin\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Určete vztah mezi stranami a, b, c takového trojúhelníku.

Řešení. Ze vztahu $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ a z kosinové věty dostáváme rovnost

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4\,bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

a podobně (cyklickou záměnou)

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{(s-a)(s-c)}{ac},\ \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab},$$

kde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Z dané rovnosti pak tedy plyne

$$c^2 = 4(s-c)^2$$

neboli

$$2c = a + b.$$

A - S - 1

Pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ existuje n navzájem neshodných pythagorejských trojúhelníků se stejným obvodem. Dokažte.

Řešení. Využijeme toho, že existuje nekonečně mnoho navzájem nepodobných pythagorejských trojúhelníků (všechny primitivní pythagorejské trojúhelníky jsou navzájem nepodobné). Pro dané číslo n označme $s_k = a_k + b_k + c_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ obvody n takových trojúhelníků. Je-li $s = s_1 s_2 \dots s_n$, jsou trojúhelníky se stranami

$$a'_k = a_k \frac{s}{s_k}, \quad b'_k = b_k \frac{s}{s_k}, \quad c'_k = c_k \frac{s}{s_k}$$

rovněž navzájem nepodobné (tedy neshodné) pythagorejské trojúhelníky, jejichž obvod je s.

Jiné řešení. Jsou-li u, v, k přirozená čísla, jsou čísla

$$a = k(u^2 - v^2), \; b = 2kuv, \; c = k(u^2 + v^2)$$

strany pythagorejského trojúhelníku, jehož poloviční obvod je $s = ku(u + v)$. Abychom našli dostatečné množství pythagorejských trojúhelníků se stejným obvodem, stačí zvolit za s číslo, které má dostatečně velký počet dělitelů.

Pro dané n položme např. $s = (n + 3)!$ a $v = 1$, takže je

$$k = \frac{(n + 3)!}{u(u + 1)}.$$

Pro $u \in \{2, 3, \ldots, n + 2\}$ dostaneme pythagorejské trojúhelníky s odvěsnami

$$\frac{u-1}{u}(n+3)! \text{ a } \frac{2(n+3)!}{u+1}.$$

Dva takovéto trojúhelníky mohou být shodné, jen když pro nějaká $i, j \in \{2, 3, \ldots, n + 2\}$ platí

$$2i = (i-1)(j+1)$$

neboli

$$ij = i + j + 1.$$

Pro $2 \leqq i < j$ dostaneme rovnost jen pro $i = 2$, $j = 3$. Našli jsme tedy n neshodných pythagorejských trojúhelníků s obvodem $2(n + 3)!$.

A - S - 2

Najděte všechna reálná čísla p, pro něž jsou všechny kořeny x_1, x_2, x_3 rovnice $x^3 - 12x^2 + px - 64 = 0$ reálné a nezáporné.

Řešení. Pro kořeny x_1, x_2, x_3 dané kubické rovnice platí (Viètovy vztahy)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p,$$

$$x_1x_2x_3 = 64,$$

jak plyne z rovnosti koeficientů v rozkladu na kořenové činitele. Protože

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = 4,$$

nastává ve známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem tří nezáporných čísel x_1, x_2, x_3 rovnost. Je tedy $x_1 = x_2 = x_3 = 4$ a $p = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 48$.

A - S - 3a

Zjistěte, zda existují čtyři celá čísla x_1, x_2, x_3, x_4, pro něž je číslo

$$|(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)|$$

mocninou čísla 2 s celým nezáporným mocnitelem.

Řešení. Taková čísla neexistují. Kdyby existovala, byl by každý z činitelů $|x_i - x_j|$ $(i \neq j)$ nezápornou mocninou čísla 2, takže bychom pro vhodná celá nezáporná čísla a, b, c dostali rovnosti

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2^a, \\ x_2 - x_3 &= 2^b, \qquad (1) \\ x_3 - x_4 &= 2^c, \end{aligned}$$

čili

$$x_1 - x_3 = 2^a + 2^b, \; x_2 - x_4 = 2^b + 2^c.$$

Čísla $2^a + 2^b$, $2^b + 2^c$ jsou ovšem celou mocninou čísla 2 jen pro $a = b = c$. Pak ale sečtením vztahů (1) dostaneme

$$x_1 - x_4 = 3.2^a,$$

což není celočíselná mocnina čísla 2 pro žádné a.

Jiné řešení (podle V. Veselého, 3. roč., G J. Hronca, Bratislava). Mezi libovolnými čtyřmi celými čísly x_1, x_2, x_3, x_4 existují dvě, která dávají při dělení třemi stejný zbytek. Jejich rozdíl, a tedy i uvedený součin je dělitelný třemi, proto nemůže být nezápornou mocninou čísla 2. Žádná taková celá čísla tedy neexistují.

A - S - 3b

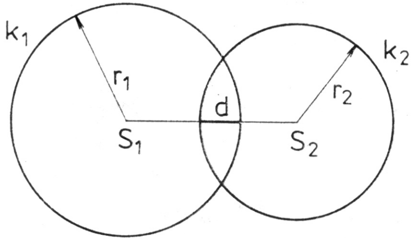
V rovině s kartézskou soustavou souřadnic jsou dány kruhy $k_1 = (S_1, r_1)$, $k_2 = (S_2, r_2)$, pro jejichž vzdálenost středů s platí

$$\max(r_1, r_2) \leqq s \leqq r_1 + r_2 - 2.$$

Dokažte, že průnik těchto kruhů obsahuje aspoň dva body s celočíselnými souřadnicemi.

Řešení. Protože $s < r_1 + r_2$, je průnik obou kruhů neprázdný, a protože $\max(r_1, r_2) \leqq s$, není jeden z kruhů částí druhého. Označme d délku té části úsečky S_1S_2, která leží v průniku $k_1 \cap k_2$ (obr. 34). Protože $r_1 + r_2 = s + d$, je podle předpokladu

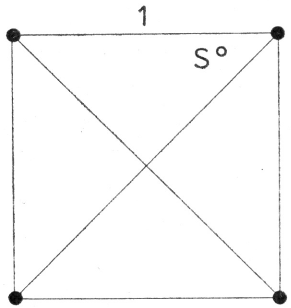
$$d = r_1 + r_2 - s \geqq 2,$$



Obr. 34

takže do průniku $k_1 \cap k_2$ lze umístit kruh o poloměru 1. Každý takový kruh však obsahuje aspoň dva mřížové body, neboť množina všech jednotkových kruhů se středy v mřížových bodech pokrývá každý bod roviny aspoň dvakrát.

Jiný argument: Střed S libovolného jednotkového kruhu leží v jednom ze čtyř pravoúhlých trojúhelníků, na které úhlopříčky rozdělí příslušný jednotkový čtverec s vrcholy v mřížových bodech (obr. 35). Vzdálenost bodu S od obou vrcholů příslušného trojúhelníku je nejvýše 1.



Obr. 35

A - II - 1

Najděte všechny pythagorejské trojúhelníky s přeponou menší než 1 986 a s jednou odvěsnou o 675 menší než přepona.

Řešení. Máme řešit v přirozených číslech soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$z = y + d,$$

kde $d = 675$, $z < 1\,986$. Dosazením za z z druhé rovnice dostáváme

$$y = \frac{x^2 - d^2}{2d},$$

takže musíme najít všechna $x > d$ celá, pro něž je y celé a zároveň

$$z = \frac{x^2 + d^2}{2d} < 1\,986.$$

Sečtením posledních dvou rovností dostaneme

$$y + z = \frac{x^2}{d},$$

pro o musí d dělit x^2. Protože $z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{d} + d\right)$ a d je liché, musí být $\frac{x^2}{d}$ liché. Číslo $d = 675 = 3^3 . 5^2$ dělí x^2, právě když $3^2 . 5 = 45$ dělí x, takže musí být $x = 45k$, kde k je liché. Z podmínek úlohy plyne jednak

$$675 < 45k, \text{ tj. } k > 15,$$

jednak

$$\frac{45^2k^2 + d^2}{2d} = \frac{1}{2}(3k^2 + 675) < 1\,986,$$

neboli

$$k \leqq [\sqrt{1\,099}] = 33.$$

Pro $k \in \{17, 19, \ldots, 33\}$ dostáváme tedy devět řešení tvaru

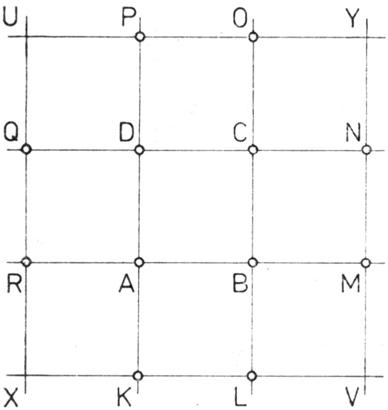
$$x = 45k,\ y = \frac{1}{2}(3k^2 - 675),\ \ z = \frac{1}{2}(3k^2 + 675).$$

A - II - 2

V rovině s kartézskou soustavou souřadnic umístěme dva útvary A a B. Útvar A je kruh o poloměru $\sqrt{5}$, útvar B je sjednocením čtyř kruhů průměru 1 se středy ve vrcholech čtverce o délce strany $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dokažte, že při každém umístění útvarů A, B existuje aspoň 10 bodů s celočíselnými souřadnicemi, které leží v A a neleží uvnitř B.

Řešení. Uvažujme množinu všech kruhů se středy v mřížových bodech a poloměrem $\sqrt{5}$. Každý bod roviny leží aspoň ve 14 takových kruzích: Leží-li totiž bod ve čtverci s vrcholy v mřížových bodech A, B, C, D (obr. 36), pokrývají ho kruhy se středy v mřížových bodech K, L, M, N, O, P, Q, R a čtyři kruhy se středy ve vrcholech čtverce $ABCD$, dále aspoň jeden z kruhů se středy U, V a aspoň jeden z kruhů se středy X, Y.

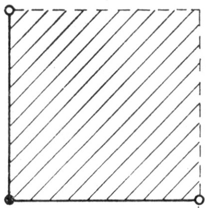
Útvar B je sjednocením čtyř kruhů o průměru 1. Kdyby uvnitř B ležely více než čtyři mřížové body, ležely by aspoň



Obr. 36

v jednom z těchto kruhů dva mřížové body. Ty by musely být krajními body průměru uvažovaného kruhu, neboť jejich vzdálenost je aspoň 1. Pak však nemohou být oba vnitřními body útvaru B. Do kruhu A tedy patří alespoň $14 - 4 = 10$ mřížových bodů, které neleží uvnitř B.

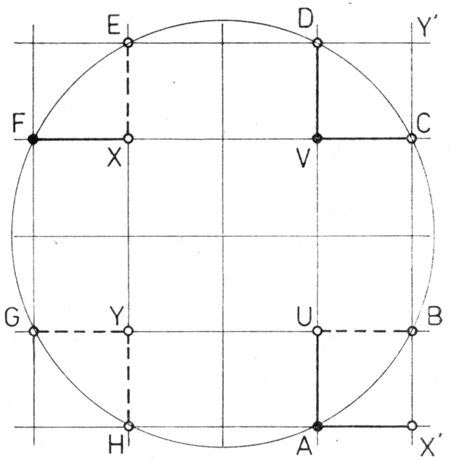
Jiné řešení. Uvažujme vnitřek jednotkového čtverce spolu s vnitřkem dvou sousedních stran a jejich společným vrcholem (obr. 37). Každý takový »čtverec«, jehož strany jsou



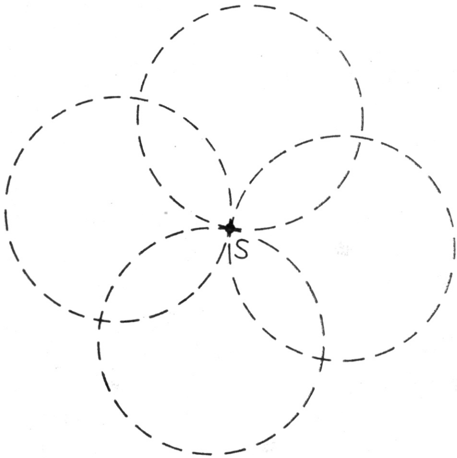
Obr. 37

rovnoběžné s osami souřadnic, zřejmě obsahuje právě jeden mřížový bod. Kruh o poloměru $\sqrt{5}$ obsahuje 12 takových »čtverců« (obr. 38); kromě toho jeden z »trojúhelníků« ABU, EFX (a podobně i jeden z »trojúhelníků« CDV, GHY) obsahuje mřížový bod, právě když ho obsahuje »čtverec« $AX'BU$ (resp. $CY'DV$). Libovolný kruh o poloměru $\sqrt{5}$ tedy obsahuje aspoň 14 mřížových bodů.

Útvar B je sjednocením čtyř otevřených kruhů o průměru 1 doplněných bodem S (obr. 39). Protože každý takový »kruh« může obsahovat nejvýše jeden mřížový bod (vzdálenost dvou mřížových bodů je alespoň 1), leží uvnitř útvaru B nejvýše čtyři mřížové body. Tím je důkaz hotov.



Obr. 38



Obr. 39

Jsou dána celá čísla p, q. Určete nejmenší přirozené číslo n, pro které existuje mnohočlen f stupně n s reálnými koeficienty takový, že současně platí

a) $f(p) = f(q) = 0$,

b) $f(m) > 0$ pro všechna celá čísla m, $p \neq m \neq q$.

Řešení. Uvažujme mnohočlen

$$f(x) = (x - p)^2(x - q)^2.$$

Zřejmě f vyhovuje podmínkám úlohy, takže hledané nejmenší přirozené n existuje a je $n \leqq 4$. Mějme mnohočlen g třetího stupně,

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0).$$

Je-li $ax < -(|a| + |b| + |c| + |d|)$, $1 \leqq |x|$, je

$$g(x) \leqq ax^3 + |b|\,|x|^2 + |c|\,|x| + |d| \leqq$$

$$\leqq ax^3 + x^2(|b| + |c| + |d|) <$$

$$< x^2(ax + |a| + |b| + |c| + |d|) < 0,$$

takže $n \neq 3$. Dále je zřejmé, že $n \neq 1$. Zbývá tedy zjistit, kdy může být $n = 2$.

Je-li $p = q$, vyhovuje podmínkám úlohy mnohočlen $(x - p)^2$, takže $n = 2$. Podobně pro $|p - q| = 1$ vyhovuje mnohočlen $(x - p)(x - q)$, takže je rovněž $n = 2$. Nakonec nechť $|p - q| \geqq 2$. Ukážeme, že podmínkám úlohy nevyhovuje žádná kvadratická funkce. Vzhledem k a) by takový kvadratický trojčlen musel mít tvar $f(x) = a(x - p)(x - q)$, kde $a \neq 0$. Přitom ale je pro $p < q$

$$f(q - 1) = -a(q - 1 - p) < 0 \text{ pro } a > 0,$$

$$f(q + 1) = a(q + 1 - p) < 0 \text{ pro } a < 0.$$

A podobně i pro $p > q$. V případě $|p - q| \geqq 2$ je tedy $n = 4$.

A - II - 3b

Pro n přirozené označme M_n množinu všech jednoprvkových a dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Je-li $n \geqq 3$, lze ke každé $(n - 2)$-prvkové podmnožině P množiny M_n najít dvouprvkovou podmnožinu $\{i, j\}$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, pro kterou je

$$\{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} \cap \mathsf{P} = \emptyset.$$

Dokažte.

Řešení. Nechť P obsahuje k $(0 \leqq k \leqq n - 2)$ dvouprvkových a $n - 2 - k$ jednoprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$; v množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ tedy zbývá $k + 2$ čísel i takových, že $\{i\} \notin \mathsf{P}$. Z nich můžeme utvořit $\binom{k+2}{2}$

dvouprvkových podmnožin, stačí tedy ověřit, že vždy platí

$$\binom{k+2}{2} > k,$$

neboli

$$(k+2)(k+1) > 2k.$$

Tato nerovnost zřejmě platí pro každé $k \geqq 0$.

Jiné řešení. Předpokládejme, že tvrzení úlohy neplatí, tj. že existuje taková $(n-2)$-prvková podmnožina $\mathsf{P} \subset \mathsf{M}_n$, že

$$\mathsf{P} \cap \{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} \neq \emptyset$$

pro každou $\{i, j\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Kdyby pro nějaké $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nebylo $\{m\} \in \mathsf{P}$, pak by pro každé $j \neq m$ muselo být $\{j\} \in \mathsf{P}$ nebo $\{j, m\} \in \mathsf{P}$, takže by P obsahovala více než $n-2$ prvků. Je tedy $\{m\} \in \mathsf{P}$ pro libovolné $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, což je opět spor s předpokládaným počtem prvků množiny P.

Jiné řešení (podle T. Ledvinky, 4. roč. SPŠE, Praha 2, Ječná a M. Wittnera, 4. roč. G Karlovy Vary). Zapišme všechny prvky množiny M_n do trojúhelníkové tabulky

$$\begin{array}{ccccc}
\{1\} & \{2\} & \{3\} & \ldots & \{n\} \\
 & \{1, 2\} & \{1, 3\} & \ldots & \{1, n\} \\
 & & \{2, 3\} & \ldots & \{2, n\} \\
 & & & \ldots & \\
 & & & & \{n-1, n\}
\end{array}$$

Protože P má $n - 2$ prvků, existují aspoň dva sloupce, které neobsahují žádný prvek z P ($i < j$):

$$\begin{array}{cc} \{i\} & \{j\} \\ \{1, i\} & \{1, j\} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \{i-1, i\} & \{i-1, j\} \\ & \{i, j\} \\ & \vdots \end{array}$$

takže $P \cap \{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} = \emptyset$.

ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

Nechť n je přirozené číslo a $\boxed{S}$ množina podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ s touto vlastností: Pro každé dvě množiny $M_1 \in \boxed{S}$, $M_2 \in \boxed{S}$ má množina $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$ sudý počet prvků. Určete největší možný počet prvků množiny $\boxed{S}$.

Řešení. Protože

$$|(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)| = |M_1| + |M_2| - 2|M_1 \cap M_2|,$$

má uvedený symetrický rozdíl množin sudý počet prvků, právě když obě množiny M_1, M_2 mají stejný počet prvků modulo 2. Musí mít tedy všechny množiny v $\boxed{S}$ buď sudý, anebo všechny lichý počet prvků. Odtud plyne, že největší možný počet prvků množiny $\boxed{S}$ je 2^{n-1} (polovina všech podmnožin dané množiny má totiž sudý počet prvků a polovina lichý počet prvků).

A - III - 2

Nechť $m \geqq n \geqq 3$ jsou přirozená čísla. Je dán mnohočlen p stupně m s celočíselnými koeficienty takový, že $p(a_1) = p(a_2) = \ldots = p(a_n) = 1$ pro n různých celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokažte, že p nemá žádný celočíselný kořen.

Řešení. Protože čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kořeny mnohočlenu $p - 1$, je

$$p(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)\, q(x),$$

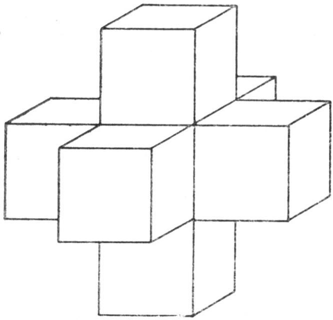
kde q je mnohočlen stupně $m - n$ s celočíselnými koeficienty. Kdyby bylo $p(a) = 0$ pro nějaké a celé, dostali bychom rovnost

$$-1 = (a - a_1)(a - a_2) \ldots (a - a_n)\, q(a).$$

V takovém případě by muselo být $|a - a_i| = 1$ pro tři různá celá čísla a_1, a_2, a_3. To nejde, takže mnohočlen p nemůže mít celočíselné kořeny.

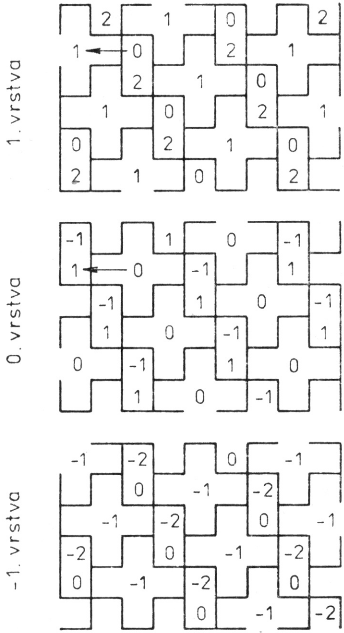
A - III - 3

Předpokládejme, že máme nekonečně mnoho stejných stavebnicových dílů složených ze sedmi krychlí (obr. 40). Dokažte, že je možno těmito díly vyplnit beze zbytku celý prostor.



Obr. 40

Řešení. Uvažujme krychlovou síť v prostoru tvořenou navzájem rovnoběžnými vrstvami krychlí stejné velikosti jako u daných dílů. Zvolme jednu vrstvu, označme ji nulou a všechny ostatní vrstvy očíslujme postupně celými čísly tak, aby nad n-tou vrstvou byla $(n + 1)$-ní vrstva. Rozmístíme-li nyní středové krychle jednotlivých dílů v nulté vrstvě podle obr. 41 na místa označená nulou, zůstanou nevyplněny právě všechny dvojice sousedních krychlí na místech označených -1 a 1. Přitom rozmístěné díly zaplní ještě místa označená 0 v -1. a 1. vrstvě. Rozmístíme-li další díly v 1. vrstvě tak, aby středové krychle jednotlivých dílů byly na místech označených 1, a podobně v -1. vrstvě

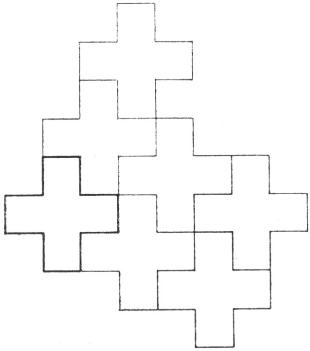


Obr. 41

do míst označených -1, bude nultá vrstva vyplněna beze zbytku. Pokračujeme-li analogicky i v dalších vrstvách (tj. díly se středy v n-té vrstvě posuneme např. o dvě krychle doleva a pak je zvedneme do následující vrstvy), vidíme, že takto vyplníme beze zbytku každou vrstvu, a tedy i celý prostor.

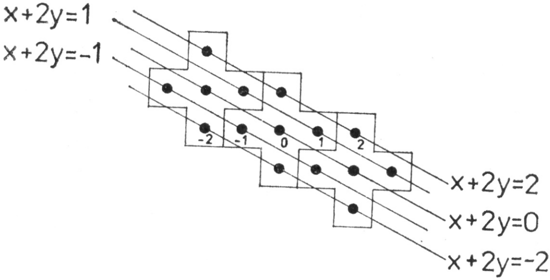
Poznámka. Není těžké zjistit, že po sedmi vrstvách se rozmístění dílů v jednotlivých vrstvách začne periodicky opakovat.

Jiné řešení. Uvažujme nejprve obdobnou úlohu v rovině pro útvary složené z pěti čtverců (obr. 42). Již z názoru je patrné, že těmito útvary lze vyplnit rovinu. Pokusme se přesto o přesný důkaz tohoto tvrzení.



Obr. 42

Uvažme kartézskou soustavu souřadnic takovou, že čtverce tvořící jednotlivé díly budou jednotkové a jejich středy budou mřížové body. Stačí si pak uvědomit (obr. 43), že



Obr. 43

středy jednotlivých dílů budou např. všechny mřížové body ležící na přímce s rovnicí $x + 2y = 0$. Podobně středy ostatních čtverců budou ležet na přímkách $x + 2y = \pm 1$, resp. $x + 2y = \pm 2$. Umístíme-li tedy středy jednotlivých dílů tak, aby jejich souřadnice (x, y, z) byly celočíselné a ležely na přímkách $x + 2y = 5k$, kde k je celé číslo, budou středy ostatních čtverců ležet na přímkách $x + 2y = 5k \pm 1$, resp. $x + 2y = 5k \pm 2$. Přitom se žádné dva díly nemohou překrývat a každý mřížový bod leží na některé z přímek $x + 2y = m$ pro nějaké m celé.

Právě naznačené řešení teď snadno přeneseme do prostoru: Uvažujme kartézskou soustavu souřadnic v prostoru takovou, že krychle tvořící daný díl budou jednotkové a jejich středy budou mřížové body. Jsou-li (x_0, y_0, z_0) souřadnice středu daného dílu a (x, y, z) souřadnice středu libovolné z jeho krychlí, platí

$$|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0| \leqq 1. \tag{1}$$

Umístěme nyní středy jednotlivých dílů tak, aby jejich souřadnice byly celočíselné a číslo $x + 2y + 3z$ bylo dělitelné sedmi. Jsou-li (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) souřadnice středů dvou různých dílů, je číslo $(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) + 3(z_1 - z_2)$ nenulové a dělitelné sedmi, takže musí být $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \geqq 3$, podle (1) se tedy žádné dva díly nepřekrývají. A naopak každý mřížový bod se souřadnicemi (t, u, v) je pokryt některým dílem, jehož střed bude mít souřadnice

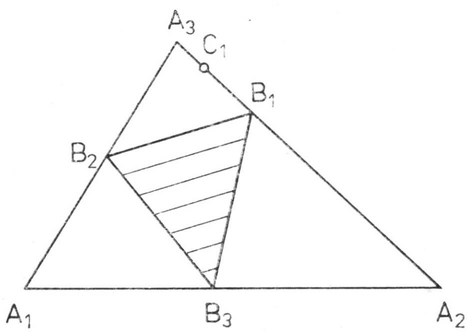
$$(t, u, v), \text{ když } t + 2u + 3v \equiv 0 \pmod 7),$$

$(t \pm 1, u, v)$, když $t + 2u + 3v \equiv \mp 1 \pmod 7$,
$(t, u \pm 1, v)$, když $t + 2u + 3v \equiv \mp 2 \pmod 7$,
$(t, u, v \pm 1)$, když $t + 2u + 3v \equiv \mp 3 \pmod 7$.

A - III - 4

V rovině je dána omezená konvexní množina A a tři navzájem disjunktní polopřímky s počátky v A. Doplňkem sjednocení těchto čtyř útvarů jsou tři navzájem disjunktní oblasti. Nechť množiny B a C jsou konvexní a disjunktní se všemi třemi polopřímkami, přičemž každá z množin B, C má neprázdný průnik s každou z uvedených tří oblastí. Dokažte, že množiny B a C mají neprázdný průnik.

Řešení. Pokud počátky A_1, A_2, A_3 uvedených tří polopřímek leží v přímce, neexistují konvexní množiny B, C požadovaných vlastností. Uvažujme trojúhelník $A_1A_2A_3 \subset$ A. Pokud jedna z polopřímek protíná stranu trojúhelníku $A_1A_2A_3$, množiny B, C požadovaných vlastností neexistují



Obr. 44

Předpokládejme tedy, že dané polopřímky mají s trojúhelníkem $A_1A_2A_3$ společné právě jeho vrcholy. Množina B pak nutně obsahuje nějaký trojúhelník $B_1B_2B_3$ a množina C trojúhelník $C_1C_2C_3$ s vrcholy B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 uvnitř stran trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Nechť např. $C_1 \in B_1A_3$ (obr. 44). Protože $C_3 \in A_1A_2$ a množiny B, C jsou konvexní, je $\mathsf{B} \cap \mathsf{C} \neq \neq \emptyset$.

A - III - 5

Nechť funkce f zobrazuje množinu N všech přirozených čísel do sebe tak, že je $f(1) = 1$ a pro každé $n \in \mathsf{N}$ platí

$$f(n + 2) = 2f(n + 1) - f(n) + 2.$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathsf{N}$ existuje $m \in \mathsf{N}$ takové, že

$$f(n)f(n + 1) = f(m).$$

Řešení. Protože

$$f(n + 2) - f(n + 1) = f(n + 1) - f(n) + 2,$$

platí pro každé $n \geqq 1$

$$f(n + 1) - f(n) = f(2) - 1 + 2(n - 1),$$

takže

$$f(n) = f(1) + (n - 1)(f(2) - 1) + 2(1 + 2 + \ldots + n - 2) =$$

$$= (n - 1)f(2) + (n - 2)^2.$$

Součin

$$f(n)f(n+1) = (n-1)n(f(2))^2 + f(2)(n(n-2)^2 + (n-1)^3) +$$

$$+ ((n-2)(n-1))^2$$

bychom chtěli pro libovolné n přirozené vyjádřit jako $(m-1)f(2) + (m-2)^2$. Položme $m - 1 = af(2) + b$, pak dostaneme

$$a(a+1) = (n-1)n,$$

$$(b-1)^2 = ((n-2)(n-1))^2,$$

$$2a(b-1) + b = 2n^3 - 7n^2 + 7n - 1.$$

Těmto podmínkám vyhovují čísla $a = n - 1$, $b = (n-2)(n-1) + 1 = n^2 - 3n + 3$, takže $m = (n-1)f(2) + n^2 - 3n + 4 = f(n) + n$. Je tedy

$$f(n)f(n+1) = f(f(n) + n).$$

A - III - 6

Nechť A je taková množina celých kladných čísel, že pro každé dva její různé prvky x, y platí nerovnost

$$|x - y| \geqq \frac{xy}{25}.$$

Dokažte, že množina A obsahuje nejvýše 9 prvků. Rozhodněte, zda taková devítiprvková množina A existuje.

Řešení. V množině A existuje nejvýše jeden prvek větší než 24, jinak by pro $25 \leqq y < x$ bylo $|x - y| < x \leqq \frac{xy}{25}$, což je ve sporu s předpokladem. A je tedy konečná.

Nechť $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, kde $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ a $x_{N-1} < 25$. Pro $j \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ označme $d_j = x_{j+1} - x_j$, pak platí

$$d_j \geqq \frac{x_j x_{j+1}}{25} = \frac{x_j(x_j + d_j)}{25},$$

neboli

$$d_j \geqq \frac{x_j^2}{25 - x_j}.$$

Zřejmě $x_5 \geqq 5$, pak ale $d_5 \geqq \frac{25}{20} > 1$, neboli $x_6 \geqq 7$, dále $d_6 \geqq \frac{49}{18} > 2$, neboli $x_7 \geqq 10$, $d_7 \geqq \frac{100}{15} > 6$, neboli $x_8 \geqq 17$, $d_8 \geqq \frac{289}{8} > 36$, tedy $x_9 \geqq 54$. Musí tedy být $N \leqq 9$. Zároveň ale vidíme, že množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54\}$ vyhovuje naší úloze.

Poznámka. Není těžké popsat všechny množiny A vyhovující dané podmínce. Např. množiny

$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, a_1\}$, kde $a_1 \geqq 54$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 18, a_2\}$, kde $a_2 \geqq 70$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 19, a_3\}$, kde $a_3 \geqq 80$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20, a_4\}$, kde $a_4 \geqq 100$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 21, a_5\}$, kde $a_5 \geqq 132$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 22, a_6\}$, kde $a_6 \geqq 184$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 23, a_7\}$, kde $a_7 \geqq 288$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 24, a_8\}$, kde $a_8 \geqq 600$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 20, a_9\}$, kde $a_9 \geqq 100$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 21, a_{10}\}$, kde $a_{10} \geqq 132$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 22, a_{11}\}$, kde $a_{11} \geqq 184$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 23, a_{12}\}$, kde $a_{12} \geqq 288$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 24, a_{13}\}$, kde $a_{13} \geqq 600$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 12, 24, a_{14}\}$, kde $a_{14} \geqq 600$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 24, a_{15}\}$, kde $a_{15} \geqq 600$,
$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, a_{16}\}$, kde $a_{16} \geqq 600$

jsou všechny devítiprvkové množiny, které vyhovují dané podmínce.